УДК 517.96

С. А. Плакса, Ю. В. Кудьявина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА РАЗОМКНУТОЙ ЖОРДАНОВОЙ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ. I

The Riemann boundary-value problem is solved for classes of open Jordan rectifiable curves extended in comparison with the previous results and for functions given on these curves.

Розв'язано крайову задачу Рімана для розширених у порівнянні з попередніми результатами класів розімкнених жорданових спрямлюваних кривих та заданих на них функцій.

Пусть в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана ориентированная разомкнутая жорданова спрямляемая кривая $\gamma = \overset{\frown}{a_1 a_2}$ с началом в точке a_1 и концом в точке a_2. Обозначим $T := \{a_1, a_2\}$.

Пусть множество H_T включает в себя голоморфные в $\mathbb{C}\setminus\gamma$ функции F, имеющие предел в бесконечно удаленной точке и предельные значения $F^+(t)$ и $F^-(t)$ при всех $t \in \gamma \setminus T$ соответственно слева и справа от γ, а также допускающие оценку

$$|F(z)| \leq c \sum_{j=1}^{2} |z - a_j|^{-\nu_F} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma, \tag{1}$$

в которой постоянная c не зависит от z, а ν_F — некоторое число из промежутка $(0;1)$, зависящее от функции F.

Рассмотрим краевую задачу Римана об отыскании функции $\Phi \in H_T$, предельные значения Φ^+ и Φ^- которой удовлетворяют условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \tag{2}$$

где G и g — заданные функции. При $g(t) \not\equiv 0$ имеем неоднородную краевую задачу Римана, а при $g(t) \equiv 0$ — однородную краевую задачу Римана.

В монографиях [1, 2] развита классическая теория краевой задачи Римана с гельдеровским коэффициентом на гладкой кривой. В этом случае индекс краевой задачи определяется исключительно свойствами аргумента коэффициента G.

В работе [3] изучена краевая задача Римана с коэффициентом G, удовлетворяющим условию Дини на разомкнутой кривой, линейная мера порции которой в каждом круге с центром в точке кривой соизмерима с радиусом круга. При этом установлена формула индекса краевой задачи Римана, полностью описывающая влияние кривой γ, а также модуля и аргумента функции G на разрешимость задачи.

Зависимость разрешимости краевых задач от контура γ, модуля и аргумента коэффициента G исследовалась также в работах [4 – 14] как в случае замкнутой, так и разомкнутой кривой.

В монографиях [1, 2] показано, что краевые задачи Римана на разомкнутой и замкнутой гладких кривых эквивалентны в том смысле, что задача на разомкнутой гладкой кривой приводится к соответствующей задаче на замкнутой кривой и, наоборот, решение задачи на замкнутой кривой может быть получено путем решения краевых задач Римана для нескольких разомкнутых дуг, составляющих замкнутую кривую.

В п. 1 данной работы решение однородной краевой задачи Римана на произвольной разомкнутой жордановой спрямляемой кривой получено на основе соответствующего результата работы [14] для замкнутой кривой. При этом в п. 2 показано, что формула индекса однородной краевой задачи Римана, установленная в работе [3], справедлива при более общих предположениях о кривой γ и функции G.

Для решения неоднородной краевой задачи Римана на разомкнутых спрямляемых кривых более общего, чем в работах [3, 12, 13], вида в отличие от гладких кривых требуется выполнение дополнительных (в сравнении со случаем замкнутой кривой) предположений. Соответствующие результаты о разрешимости неоднородной задачи получены в п. 4 с использованием специальных оценок интегралов типа Коши в окрестностях концов кривой γ, изложенных в п. 3.

1. Однородная краевая задача Римана. Покажем сначала, что произвольную разомкнутую жорданову спрямляемую дугу можно дополнить до замкнутой жордановой спрямляемой кривой.

Пусть $x \in \gamma \setminus \{a_1, a_2\}$. При $j = 1, 2$ введем в рассмотрение связную компоненту $\gamma^j(x)$ множества $\{t \in \gamma\colon |\arg(t - a_j) - \arg(x - a_j)| < \pi/2\}$, содержащую точку x. Обозначим теперь через $\rho^j(x)$ расстояние от точки x до $\gamma \setminus \gamma^j(x)$ в случае, когда $\gamma^j(x) \neq \gamma$, а в случае, когда $\gamma^j(x) = \gamma$, примем по определению $\rho^j(x) := |x - a_j|$. С учетом того, что кривая γ жорданова, легко устанавливается, что для любой ее дуги γ_0, концы которой отличны от точек a_1 и a_2, выполняются неравенства $\inf\limits_{x \in \gamma_0} \rho^j(x) > 0$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, а также $K(z, \varepsilon) := \{t \in \mathbb{C}\colon |t - z| < \varepsilon\}$ и $c_\varepsilon(z) := \{t \in \mathbb{C} : |t - z| = \varepsilon\}$.

Лемма 1. *Пусть $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ — разомкнутая жорданова спрямляемая кривая. Тогда существует разомкнутая жорданова спрямляемая кривая $\gamma_1 = \overset{\smile}{a_2 a_1}$ такая, что $\widetilde{\gamma} := \gamma \cup \gamma_1$ является замкнутой жордановой спрямляемой кривой.*

Доказательство. Пусть l — длина кривой γ. Использовав натуральный параметр $s \in [0, l]$, представим γ в виде $\gamma = \{t = t(s)\colon s \in [0, l]\}$ так, что при этом $a_1 = t(0)$ и $a_2 = t(l)$.

Введем в рассмотрение точки $b_n := t(l/2^{n+1})$ при $n = 0, 1, \ldots$ и $c_n := t((2^{n+1} - 1)\, l/2^{n+1})$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть

$$\rho_0 := \min\left\{\frac{1}{2}\rho^1(b_0), \frac{1}{2}\rho^2(b_0), \inf_{k \in \mathbb{N}}\{|b_0 - c_k|, |b_0 - b_k|\}\right\},$$

$$\rho_n := \min\left\{\frac{1}{2}\rho^1(b_n), \frac{1}{2}\rho^2(b_n), \frac{1}{2}\rho^1(c_n), \frac{1}{2}\rho^2(c_n), |b_n - b_0|, |c_n - b_0|,\right.$$

$$\left.\inf_{k \in \mathbb{N}\colon\, k \neq n,\, m \in \mathbb{N}}\{|b_n - b_k|, |b_n - c_m|, |c_n - c_k|, |c_n - b_m|\}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Выберем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\delta_0 < \frac{1}{2}\,\rho_0, \quad \delta_n < \frac{1}{2}\,\min\{\delta_{n-1}, \rho_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

При $n = 0, 1, \ldots$ рассмотрим множество $\{t \in \gamma\colon |t - b_n| < \delta_n\}$ и выделим его связную компоненту, содержащую точку b_n. При этом обозначим через B'_n, B''_n

концы указанной компоненты так, чтобы точка B'_n предшествовала точке B''_n при заданной ориентации кривой γ. Аналогично при $n = 1, 2, \ldots$ выделим связную компоненту множества $\{t \in \gamma\colon |t - c_n| < \delta_n\}$, содержащую точку c_n, и обозначим через C'_n, C''_n концы указанной компоненты, при этом точка C'_n предшествует точке C''_n при заданной ориентации кривой γ.

При $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\omega_n := \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{\substack{\tau \in \wideparen{B''_n B'_{n-1}}, \\ \xi \in \wideparen{a_1 B'_n} \cup \wideparen{B''_{n-1} a_2}}} |\tau - \xi|; \quad \min_{\substack{\tau \in \wideparen{C''_{n-1} C'_n}, \\ \xi \in \wideparen{a_1 C'_{n-1}} \cup \wideparen{C''_n a_2}}} |\tau - \xi|; \right.$$

$$\left. \inf_{x \in \wideparen{B''_n B'_{n-1}}} \{\rho^1(x), \rho^2(x)\}; \quad \inf_{x \in \wideparen{C''_{n-1} C'_n}} \{\rho^1(x), \rho^2(x)\} \right\},$$

где $C''_0 := B''_0$, $C'_0 := B'_0$.

Выберем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\,\omega_1, \quad \varepsilon_n < \frac{1}{2}\,\min\{\varepsilon_{n-1}, \omega_n\}, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

При $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим дугу $\wideparen{B''_n B'_{n-1}}$ и конечное покрытие ее открытыми кругами $K(B_{n,k}, \varepsilon_n)$, центры которых $B_{n,k}$ выбираем с помощью следующей процедуры. Пусть $B_{n,1} := B''_n$. Рассмотрим теперь связную компоненту множества $\left\{t \in \wideparen{B''_n B'_{n-1}}\colon |t - B_{n,1}| < \varepsilon_n\right\}$, содержащую точку $B_{n,1}$, и обозначим через $B_{n,2}$ тот ее конец, который следует за точкой $B_{n,1}$ при заданной ориентации кривой γ. Продолжим далее процедуру выбора точек $B_{n,k}$ дуги $\wideparen{B''_n B'_{n-1}}$, при этом каждая следующая точка $B_{n,k+1}$ определяется путем рассмотрения связной компоненты множества $\left\{t \in \wideparen{B''_n B'_{n-1}}\colon |t - B_{n,k}| < \varepsilon_n\right\}$, содержащей точку $B_{n,k}$, и тогда через $B_{n,k+1}$ обозначается тот ее конец, который следует за точкой $B_{n,k}$ при заданной ориентации кривой γ.

Оценим число m'_n точек $B_{n,k}$ дуги $\wideparen{B''_n B'_{n-1}}$, полученных в результате описанной процедуры:

$$m'_n \leq \left[\frac{\operatorname{mes} \wideparen{B''_n B'_{n-1}}}{\varepsilon_n} \right] + 1 < \frac{\operatorname{mes} \wideparen{b_n b_{n-1}}}{\varepsilon_n} + 1 = \frac{l}{2^{n+1}\,\varepsilon_n} + 1, \tag{5}$$

где mes обозначает линейную меру Лебега на кривой γ.

При каждом $n = 1, 2, \ldots$ аналогично покрывается дуга $\wideparen{C''_{n-1} C'_n}$ конечным числом открытых кругов $K(C_{n,k}, \varepsilon_n)$ с центрами в точках $C_{n,k}$, при этом число m''_n указанных кругов, как и m'_n, удовлетворяет оценке

$$m''_n < \frac{l}{2^{n+1}\,\varepsilon_n} + 1. \tag{6}$$

Рассмотрим множество

$$\mho := \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} K(b_n, \delta_n)\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K(c_n, \delta_n)\right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{k=1}^{m'_n} K(B_{n,k}, \varepsilon_n)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m''_n} K(C_{n,k}, \varepsilon_n)\right)\right)\right)$$

и обозначим через Γ границу неограниченной компоненты связности множества $\mathbb{C}\setminus\overline{\mho}$. По построению Γ является замкнутой жордановой кривой, имеющей с кривой γ только две общие точки: a_1 и a_2.

Оценивая длину кривой Γ с учетом соотношений (3) – (6)

$$\text{mes}\ \Gamma \le \sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}\ c_{\delta_n}(b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}\ c_{\delta_n}(c_n) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m'_n} \text{mes}\ c_{\varepsilon_n}(B_{n,k}) + \sum_{k=1}^{m''_n} \text{mes}\ c_{\varepsilon_n}(C_{n,k}) \right) \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \frac{\delta_0}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \frac{\delta_0}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_n + m''_n)\, 2\pi\, \varepsilon_n \le$$

$$\le 4\pi\delta_0 + 2\pi\delta_0 + 2\pi \left(l + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \right) = 2\pi(l + 3\delta_0 + 4\varepsilon_1),$$

заключаем, что Γ является спрямляемой кривой.

Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что точки a_1 и a_2 разбивают кривую Γ на две дуги, одну из которых обозначим через γ_1.

Переходя к решению однородной краевой задачи Римана на произвольной разомкнутой жордановой спрямляемой кривой, введем необходимые обозначения. Обозначим $\gamma_\varepsilon(X) := \bigcup_{x \in X} \{t \in \gamma \colon |t - x| \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и $X \subset \gamma$. Если же $X = \{x\}$, то множество $\gamma_\varepsilon(X)$ обозначим через $\gamma_\varepsilon(x)$.

Все интегралы по кривой γ понимаем в смысле их главного значения, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(t)\, dt := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(X)} \varphi(t)\, dt\,,$$

где X — конечное множество особых точек функции φ.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\widetilde{p}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{p(t)}{t - z}\, dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma\,. \tag{7}$$

Если функция p суммируема на γ или $p = F^+ - F^-$, где $F \in H_T$, то функция $\widetilde{p}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Заметим, что функция $p = F^+ - F^-$, где $F \in H_T$, может быть не суммируемой на γ. В качестве примера рассмотрим кривую

$$\gamma = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [-b_{2k-1}, -b_{2k}]\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [b_{2k+1}, b_{2k}]\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \gamma_k\right)$$

с началом в точке 0 и концом в точке 1, где $b_k := 1/k^2$ и $\gamma_k := \{t = b_k\, e^{i\varphi}\colon 0 \le \le \varphi \le \pi\}$, и функцию $p(t) = F^+(t) - F^-(t)$ при $t \in \gamma \setminus \{0, 1\}$, где $F(z) = 1/\sqrt{z}$ — голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ветвь аналитической функции $1/\sqrt{z}$. При этом $F \in H_T$, но p не суммируема на γ, поскольку

$$\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(0)} |p(t)|\,|dt| \ge \sum_{k=1}^{[1/\sqrt{\varepsilon}]-1} \int\limits_{\gamma_k} |p(t)|\,|dt| = 2\pi \sum_{k=1}^{[1/\sqrt{\varepsilon}]-1} \frac{1}{k} \to \infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

В то же время интеграл (7) существует, поскольку, обозначив через Γ_ε границу множества $\{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma\colon |z| > \varepsilon, |z - 1| > \varepsilon\}$, при $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ с учетом интегральной формулы Коши будем иметь

$$\widetilde{p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\varepsilon(0)\cup\gamma_\varepsilon(1))} \frac{p(t)}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{F(t)}{t - z}\, dt = F(z)\,.$$

В каждой точке $a_j \in T$ произвольной разомкнутой жордановой спрямляемой кривой $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ определим числа

$$\Delta_p(a_j) := \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\operatorname{Re}\widetilde{p}\,(z)}{\ln|z - a_j|}\,,$$

$$\Delta^p(a_j) := \liminf_{r\to 0} \frac{1}{\ln r} \inf_{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma\colon |z-a_j|=r} \operatorname{Re}\widetilde{p}\,(z)$$

и, кроме того, предположим, что выполняется соотношение (см. [14])

$$\Delta^p(a_j) \le \Delta_p(a_j) + c \quad \forall\, a_j \in T\,, \tag{8}$$

где c — некоторая постоянная.

Определим *индекс* κ краевой задачи Римана следующим образом. Если числа $\Delta^p(a_j)$ и $\Delta_p(a_j)$ конечны для всех $a_j \in T$, то полагаем

$$\kappa := \sum_{j=1}^{2} \kappa_j\,, \tag{9}$$

где

$$\kappa_j := \begin{cases} \Delta_p(a_j)\,, & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ целое,} \\[2ex] [\Delta_p(a_j)] + 1\,, & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ нецелое.} \end{cases}$$

В случае, когда среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $+\infty$, но нет $-\infty$, полагаем $\kappa = +\infty$. Наконец, если среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $-\infty$, то полагаем $\kappa = -\infty$.

Теорема 1. *Пусть $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ — разомкнутая жорданова спрямляемая кривая и функция G имеет вид $G(t) = \exp(p(t))$, при этом $\widetilde{p} \in H_T$ и, кроме того, выполняется соотношение* (8). *Тогда*:

1) *если $-\infty \le \kappa < 0$, то однородная краевая задача Римана не имеет нетривиальных решений*;

2) *если $\kappa = +\infty$, то однородная краевая задача Римана имеет бесконечное множество линейно независимых решений*;

3) *если* $0 \le \kappa < \infty$, *то однородная краевая задача Римана имеет* $\kappa+1$ *линейно независимое решение и ее общее решение определяется формулой*

$$\Phi(z) = \exp(\widetilde{p}(z)) P_\kappa(z) \prod_{j=1}^{2} (z-a_j)^{-\kappa_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma,$$

где P_κ — *произвольный полином степени не выше* κ.

Для доказательства теоремы достаточно на основании леммы 1 дополнить кривую γ до замкнутой жордановой спрямляемой кривой разомкнутой дугой $\gamma_1 := \overset{\frown}{a_2 a_1}$, положив при этом $G(t) \equiv 1$ на γ_1, и применить теорему 1 из [14] о разрешимости однородной краевой задачи Римана на замкнутой кривой.

2. Однородная краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом. Распространим формулу индекса краевой задачи Римана, установленную в [3] для коэффициента G, удовлетворяющего условию Дини, на случай более общих предположений о кривой γ и функции G.

Будем использовать следующую метрическую характеристику кривой γ (см. [15]): $\theta(\varepsilon) := \sup\limits_{z\in\gamma} \theta_z(\varepsilon)$, где $\theta_z(\varepsilon) := \mathrm{mes}\,\{t \in \gamma\colon |t-z| \le \varepsilon\}$.

Для функции f, заданной на $\gamma \setminus T$, и точки $x \in \gamma \setminus T$ введем в рассмотрение локальные центрированные модули гладкости первого порядка

$$\Omega_x(f,\gamma,\varepsilon) := \begin{cases} \sup\limits_{t\in\gamma\colon |t-x|=\varepsilon} |f(t)-f(x)|, & \text{если } \{t\in\gamma\colon |t-x|=\varepsilon\} \ne \emptyset, \\ 0, & \text{если } \{t\in\gamma\colon |t-x|=\varepsilon\} = \emptyset, \end{cases}$$

$$\omega_x(f,\gamma,\varepsilon) := \sup_{0\le\eta\le\varepsilon} \Omega_x(f,\gamma,\eta).$$

Далее, пусть $\rho(z,\gamma) := \inf\limits_{t\in\gamma} |z-t|$ — расстояние от точки z до γ и $d := \sup\limits_{t_1,t_2\in\gamma} |t_1 - t_2|$ — диаметр кривой γ.

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть* γ — *разомкнутая жорданова спрямляемая кривая с концами* a_1 *и* a_2, *а функция* f *непрерывна на* $\gamma \setminus \{a_j\}$, *где* $j=1$ *или* $j=2$, *и суммируема на* γ. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$, $|z-a_j| = r \le |a_2-a_1|/4$, *справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_\gamma \frac{f(t)-f(x)}{t-z}\,dt - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)} \frac{f(t)-f(x)}{t-a_j}\,dt \right| \le$$

$$\le c \left(r \int\limits_{[0,d]\setminus\{|x-a_j|\}} \frac{\Omega_x(f,\gamma,\eta)}{\eta\,(r+\eta)} d\theta_x(\eta) + \frac{1}{r} \int\limits_{\gamma\cap c_{|x-a_j|}(x)} |f(t)-f(x)||dt| \right), \qquad (10)$$

где x — *произвольная точка из* $\gamma \cap c_r(a_j)$ *при* $\rho(z,\gamma) \ge r/2$ *и произвольная точка из* $\gamma \cap c_{\rho(z,\gamma)}(z)$ *при* $\rho(z,\gamma) < r/2$, *а* c — *универсальная постоянная.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$\int\limits_\gamma \frac{f(t)-f(x)}{t-z}\,dt - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)} \frac{f(t)-f(x)}{t-a_j}\,dt = (z-a_j) \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)} \frac{f(t)-f(x)}{(t-z)(t-a_j)}\,dt +$$

$$+\int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)} \frac{f(t)-f(x)}{t-z}\,dt - \int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)\setminus\gamma_r(a_j)} \frac{f(t)-f(x)}{t-a_j}\,dt =: I_1 + I_2 - I_3. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала случай $\rho(z,\gamma) \geq r/2$. Поскольку в этом случае $|t-x| \leq \leq \dfrac{3}{2}|t-a_j| \leq 3|t-z|$ при всех $t \in \gamma \setminus \gamma_{2r}(a_j)$, то

$$|I_1| \leq \frac{9}{2}\,r \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^2}\,|dt| \leq$$

$$\leq \frac{9}{2}\,r \int\limits_{(r,\,d]} \frac{\Omega_x(f,\,\gamma,\eta)}{\eta^2}\,d\theta_x(\eta) \leq 9\,r \int\limits_{(r,\,d]} \frac{\Omega_x(f,\,\gamma,\eta)}{\eta\,(r+\eta)}\,d\theta_x(\eta). \tag{12}$$

Обозначая $d_r := \sup\limits_{t\in\gamma_{2r}(a_j)} |x-t|$ и учитывая при этом неравенства $d_r \leq 3\,r$ и $|t-x| \leq 3\,r \leq 6\,|t-z|$ при всех $t \in \gamma_{2r}(a_j)$, получаем

$$|I_2| \leq 6\left(\int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)\setminus c_r(x)} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|}\,|dt| + \int\limits_{\gamma\,\cap\,c_r(x)} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|}\,|dt|\right) \leq$$

$$\leq 6\left(\int\limits_{[0,\,d_r]\setminus\{r\}} \frac{\Omega_x(f,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_x(\eta) + \frac{1}{r}\int\limits_{\gamma\,\cap\,c_r(x)} |f(t)-f(x)|\,|dt|\right) \leq$$

$$\leq 24\left(r \int\limits_{[0,\,d_r]\setminus\{r\}} \frac{\Omega_x(f,\gamma,\eta)}{\eta\,(r+\eta)}d\theta_x(\eta) + \frac{1}{r}\int\limits_{\gamma\,\cap\,c_r(x)} |f(t)-f(x)|\,|dt|\right). \tag{13}$$

С учетом неравенства $|t-x| \leq 2|t-a_j|$ при всех $t \in \gamma_{2r}(a_j)\setminus\gamma_r(a_j)$ аналогично оценке (13) получим

$$|I_3| \leq 8\left(r \int\limits_{[0,\,d_r]\setminus\{r\}} \frac{\Omega_x(f,\gamma,\eta)}{\eta\,(r+\eta)}d\theta_x(\eta) + \frac{1}{r}\int\limits_{\gamma\,\cap\,c_r(x)} |f(t)-f(x)|\,|dt|\right). \tag{14}$$

Из (11) – (14) следует неравенство (10) при $\rho(z,\gamma) \geq r/2$.

В случае $\rho(z,\gamma) < r/2$ интегралы I_1, I_2, I_3 с учетом неравенств $|t-x| \leq \leq \dfrac{7}{4}|t-a_j| \leq \dfrac{7}{2}|t-z|$ при всех $t \in \gamma \setminus \gamma_{2r}(a_j)$, $|t-x| \leq 2|t-z|$ при всех $t \in \gamma_{2r}(a_j)$, $|t-x| \leq \dfrac{5}{2}|t-a_j|$ при всех $t \in \gamma_{2r}(a_j)\setminus\gamma_r(a_j)$ оцениваются аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ *— разомкнутая жорданова спрямляемая кривая,* $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ *и* $|z-a_j| = r \leq |a_2-a_1|/2$ *при* $j=1$ *или* $j=2$. *Тогда*

$$\left|\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\gamma} \frac{dt}{t-z} - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)} \frac{dt}{t-a_j}\right)\right| \leq \frac{r}{|a_2-a_1|}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $j=1$ (случай $j=2$ рассматривается аналогично). Введем в рассмотрение связные компоненты множества $\gamma\setminus\gamma_r(a_1)$. Через γ_0 обозначим связную компоненту $\gamma\setminus\gamma_r(a_1)$, одним из концов которой является a_2, а через γ_k, где $k=1,2,\ldots,p\leq\infty$, — другие связные компоненты множества $\gamma\setminus\gamma_r(a_1)$. Поскольку оба конца каждой из кривых γ_k лежат на окружности $c_r(a_1)$, то

$$\mathrm{Re}\int\limits_{\gamma_k}\frac{dt}{t-a_1}=0,\quad k=1,2,\ldots,p\,,$$

и поэтому

$$\left|\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_1)}\frac{dt}{t-a_1}\right)\right|=\left|\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma_0}\frac{dt}{t-a_1}\right)\right|=$$

$$=\left|\ln\frac{|a_2-z|}{|a_1-z|}-\ln\frac{|a_2-a_1|}{r}\right|=\left|\ln\frac{|a_2-z|}{|a_2-a_1|}\right|=$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{|a_2-z|-|a_2-a_1|}{|a_2-a_1|}\right)\right|\leq\frac{||z-a_2|-|a_2-a_1||}{|a_2-a_1|}\leq\frac{r}{|a_2-a_1|}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть разомкнутая жорданова спрямляемая кривая $\gamma=\overset{\smile}{a_1a_2}$ удовлетворяет условию*

$$\theta(\varepsilon)=O(\varepsilon^{\nu}),\quad \varepsilon\to0,\quad 0<\nu\leq1, \tag{15}$$

а функция v непрерывна на γ и при $j=1,2$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{[0,|x-a_j|/4]}\frac{\Omega_x(v,\gamma,\eta)}{\eta}d\theta_x(\eta)=o(|\ln|x-a_j||),\quad x\to a_j,\quad x\in\gamma, \tag{16}$$

$$|v(x)-v(a_j)|=o(|x-a_j|^{1-\nu}),\quad x\to a_j,\quad x\in\gamma. \tag{17}$$

Тогда

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)}{t-z}\,dt=\frac{(-1)^j}{2\pi}\big(\mathrm{Im}\;v(a_j)\ln|z-a_j|+\mathrm{Re}\;v(a_j)\arg(z-a_j)\big)+$$

$$+o(|\ln|z-a_j||),\quad z\to a_j,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma,\quad j=1,2, \tag{18}$$

где $\arg(z-a_j)$ — произвольная непрерывная в $K\left(a_j,\dfrac{1}{2}|a_2-a_1|\right)\setminus\gamma$ ветвь функции $\mathrm{Arg}(z-a_j)$.

Доказательство. Пусть $|z-a_j|=:r$ и точка x такая, как и в лемме 2. Справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)-v(x)}{t-z}dt-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(x)}{t-a_j}dt\right)+$$

$$+\frac{v(x)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(a_j)}{t-a_j}dt+$$

$$+\frac{v(a_j)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j},$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)}{t-z}dt=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)-v(x)}{t-z}dt-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(x)}{t-a_j}dt\right)+$$

$$+\frac{\operatorname{Im}\,v(x)}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}\right)+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(a_j)}{t-a_j}dt+$$

$$+\frac{\operatorname{Re}(v(x)-v(a_j))}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}\right)+$$

$$+\frac{\operatorname{Im}\,v(a_j)}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}+\frac{\operatorname{Re}\,v(a_j)}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}.$$

Поскольку при любом $\eta\ge|x-a_j|/4$ и всех $t\in\gamma\cap c_\eta(x)$ выполняется неравенство $|t-a_j|\le 5\eta$, то $\Omega_x(v,\gamma,\eta)\le 2\omega_{a_j}(v,\gamma,5\eta)$. Поэтому, используя лемму 2 и оценивая при этом интеграл по множеству $[|x-a_j|/4,d\,]$ с учетом предложения 1 работы [16] (см. также доказательство теоремы 1 работы [17]), а также учитывая соотношения (15) – (17), получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{v(t)-v(x)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(x)}{t-a_j}\,dt\right|\le$$

$$\le c\,r\int\limits_{[0,d]}\frac{\Omega_x(v,\gamma,\eta)}{\eta\,(r+\eta)}\,d\theta_x(\eta)+\Omega_x(v,\gamma,|x-a_j|)\le$$

$$\le c\left(\int\limits_{[0,|x-a_j|/4]}\frac{\Omega_x(v,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_x(\eta)+r\int\limits_{[|x-a_j|/4,d]}\frac{\omega_{a_j}(v,\gamma,5\eta)}{\eta^2}\,d\theta_x(\eta)\right)\le$$

$$\le c\left(\int\limits_{[0,|x-a_j|/4]}\frac{\Omega_x(v,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_x(\eta)+r\int\limits_{|x-a_j|/4}^{2d}\frac{\theta(\eta)\omega_{a_j}(v,\gamma,5\eta)}{\eta^3}\,d\eta\right)=$$

$$=o(|\ln r|),\quad r\to 0.$$

Аналогично с учетом соотношений (15), (17) имеем

$$\left|\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{v(t)-v(a_j)}{t-a_j}\,dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{|v(t)-v(a_j)|}{|t-a_j|}\,|dt|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[r,d]}\frac{\omega_{a_j}(v,\gamma,\eta)}{\eta}d\theta_{a_j}(\eta)\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^{2d}\frac{\theta(\eta)\,\omega_{a_j}(v,\gamma,\eta)}{\eta^2}\,d\eta=o(|\ln r|),\quad r\to 0\,.$$

Следствием леммы 2 из [16] является оценка

$$\left|\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_1)}\frac{dt}{t-a_1}\right|\le c\ r\int\limits_r^{d_1}\frac{\theta_{a_1}(\eta)}{\eta^3}\,d\eta$$

(здесь c — универсальная постоянная), учитывая которую и соотношения (15), (17), получаем

$$\left|\frac{\mathrm{Re}\,(v(x)-v(a_j))}{2\pi}\ \mathrm{Im}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}\right)\right|\le$$

$$\le c\ r\ \frac{|v(x)-v(a_j)|}{2\pi}\int\limits_r^{d}\frac{\theta_{a_j}(\eta)}{\eta^3}\,d\eta\to 0,\quad r\to 0.$$

В силу леммы 3

$$\left|\frac{\mathrm{Im}\ v(x)}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{|\,\mathrm{Im}\ v(x)|}{2\pi}\frac{r}{|a_2-a_1|}\to 0,\quad r\to 0.$$

Наконец,

$$\frac{\mathrm{Im}\ v(a_j)}{2\pi}\ \mathrm{Re}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_r(a_j)}\frac{dt}{t-a_j}=(-1)^j\,\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\ v(a_j)\ln r+O(1)\,,\quad r\to 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{Re}\ v(a_j)}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}=(-1)^j\,\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\ v(a_j)\arg(z-a_j)+O(1)\,,\quad r\to 0\,.$$

Следствием всех приведенных соотношений является асимптотическое равенство (18).

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть разомкнутая жорданова спрямляемая кривая* $\gamma=\overset{\smile}{a_1a_2}$ *удовлетворяет условию* (15), *а функция* G *имеет вид* $G(t)=\exp(v(t))$, *где функция* v *непрерывна на* γ, *удовлетворяет условиям* (16), (17) *и условию*

$$\sup_{x\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \int\limits_{[0,\varepsilon]} \frac{\Omega_x(v,\gamma,\eta)}{\eta}\, d\theta_x(\eta) \to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad \forall\,\delta>0. \tag{19}$$

Пусть, кроме того, при $j=1,2$ выполняется соотношение

$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{\ln r} \inf_{\substack{|z-a_j|=r,\\ z\in\mathbb{C}\setminus\gamma}} \arg(z-a_j) \le \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\arg(z-a_j)}{\ln|z-a_j|} + c\,, \tag{20}$$

если $(-1)^j\ \mathrm{Re}\, v(a_j)>0$, или же соотношение

$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{|\ln r|} \sup_{\substack{|z-a_j|=r,\\ z\in\mathbb{C}\setminus\gamma}} \arg(z-a_j) \le \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\arg(z-a_j)}{|\ln|z-a_j||} + c\,, \tag{21}$$

если $(-1)^j\ \mathrm{Re}\, v(a_j)<0$; здесь $\arg(z-a_j)$ — произвольная непрерывная на множестве $K\left(a_j,\dfrac{1}{2}|a_2-a_1|\right)\setminus\gamma$ ветвь функции $\mathrm{Arg}(z-a_j)$ и постоянная c зависит только от γ. Тогда справедливы утверждения теоремы 1, при этом $p=v$ и при $j=1,2$ выполняется равенство

$$\Delta_v(a_j) = \frac{1}{2\pi}\left((-1)^j\ \mathrm{Im}\ v(a_j) + \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{(-1)^j\ \mathrm{Re}\ v(a_j)\arg(z-a_j)}{\ln|z-a_j|}\right). \tag{22}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что при условии (19) в силу леммы 1 и леммы 1 из [14] $\widetilde{v}\in H_T$ и, кроме того, следствием соотношений (18), (20), (21) являются соотношение (8) и равенство (22), а затем применить теорему 1.

Отметим, что формула (22), полностью описывающая влияние кривой γ и коэффициента $G(t)=\exp(v(t))$ на разрешимость однородной краевой задачи Римана, фактически установлена в работе [3] в случае, когда γ удовлетворяет условию (15) при $\nu=1$, а функция G удовлетворяет условию Дини. При этом в [3] установлено, что если γ удовлетворяет условию (15) при $\nu=1$, то выполняются неравенства $\big|\arg(z-a_j)\big| \le c\big|\ln|z-a_j|\big|$, $j=1,2$ (здесь постоянная c зависит только от γ), следствием которых являются соотношения (20), (21). Очевидно также, что при $\nu=1$ соотношение (17) является следствием непрерывности функции v на γ, а условия (16), (19) являются более слабыми ограничениями на коэффициент $G(t)=\exp(v(t))$ краевой задачи Римана, чем условие Дини, наложенное в теореме 1 из [3].

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. *Сейфуллаев Р. К.* Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Мат. сб. – 1980. – **112**, № 2. – С. 147 – 161.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 239 с.
5. *Кац Б. А.* Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 12. – С. 41 – 50.
6. *Данилов Е. А.* Зависимость числа решений однородной задачи Римана от контура и модуля коэффициента // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 6. – С. 1305 – 1308.
7. *Кац Б. А.* Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 12. – С. 30 – 38.
8. *Gonzalez B., Reyes J.* The homogeneous Riemann boundary value problem on rectifiable open Jordan curves // Cience. Mat. Havana. – 1988. – **9**, № 2. – P. 3 – 9.

9. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 116 – 121.
10. *Кац Б. А.* О краевой задаче Римана на фрактальных дугах и дугах бесконечной длины. I // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 6. – С. 7 – 16.
11. *Кац Б. А.* О краевой задаче Римана на фрактальных дугах и дугах бесконечной длины. II // Там же. – № 7. – С. 17 – 23.
12. *Kutlu K.* On Riemann boundary value problem // An. Univ. Timişoara. Ser. mat.-inform. – 2000. – **38**, № 1. – P. 89 – 96.
13. *Pena D., Reyes J.* Riemann boundary value problem on a regular open curve // J. Natur. Geom. – 2002. – **22**, № 1. – P. 1 – 17.
14. *Васильева Ю. В., Плакса С. А.* Кусочно-непрерывная краевая задача Римана на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 616 – 628.
15. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.
16. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1509 – 1517.
17. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594 – 601.

Получено 19.01.10