УДК 512.745, 512.815.4

Л. П. Бедратюк (Хмельниц. нац. ун-т)

РЯДИ ПУАНКАРЕ МУЛЬТИГРАДУЙОВАНИХ АЛГЕБР SL_2-ІНВАРІАНТІВ

Formulas for computation of the multivariate Poincaré series $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$ and $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n)$, are found, where $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{d}=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, are multigraded algebras of joint covariants and joint invariants for n binary forms of degrees $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Найдены формулы для вычисления мультирядов Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$ и $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{d}=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, — мультиградуированные алгебры совместных ковариантов и совместных инвариантов для n бинарных форм степеней $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

1. Вступ. Нехай V_d — комплексний векторний простір бінарних форм степеня d, на якому природно діє підстановками спеціальна лінійна група $G = SL_2$. При цій дії елемент $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$ переводить бінарну форму $F = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i}$ у бінарну форму $F' = \sum_{i=0}^{d} a_i' x^i y^{d-i}$, де коефіцієнти a_i' визначаються із співвідношення

$$\sum_{i=0}^{d} a_i' x^i y^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} a_i (\alpha x + \beta y)^i (\gamma x + \delta y)^{d-i}, \quad a_i, a_i' \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо індуковану дію групи G на координатних алгебрах $\mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}}]$ та $\mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}} \oplus \mathbb{C}^2]$, де $V_{\boldsymbol{d}} := V_{d_1} \oplus V_{d_1} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}$. При цій дії елемент $g \in G$ переводить поліноміальну функцію $f \in \mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}} \oplus \mathbb{C}^2]$ у функцію gf за правилом $gf(v) = f\left(g^{-1} v\right)$ для всіх $g \in G$ і всіх $v \in V_{\boldsymbol{d}} \oplus \mathbb{C}^2$.

Позначимо через $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}} = \mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}}]^G$ та $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}} = \mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}} \oplus \mathbb{C}^2]^G$ відповідні підалгебри G-інваріантних поліноміальних функцій, тобто таких функцій f, які задовольняють умову $gf = f$. На мові класичної теорії інваріантів алгебри $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}$ та $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$ називаються алгебрами спільних інваріантів та спільних коваріантів для n бінарних форм степенів $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Задача повного опису структури цих алгебр є важливою відкритою алгебраїчною проблемою уже понад 150 років.

Ототожнимо координатну алгебру $\mathbb{C}[V_{\boldsymbol{d}} \oplus \mathbb{C}^2]$ з алгеброю комплексних многочленів від коефіцієнтів цих бінарних форм та від двох допоміжних змінних X, Y. Тоді довільний коваріант можна розглядати як многочлен, а його степінь відносно змінних X, Y називається *порядком* цього коваріанта. Зрозуміло, що кожен інваріант є коваріантом нульового порядку. Набір степенів коваріанта відносно коефіцієнтів кожної бінарної форми називається *мультистепенем* цього коваріанта.

Алгебри $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}$ є скінченнопородженими мультиградуйованими алгебрами відносно мультистепеня та порядку:

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}} = (\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},0} + (\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},1} + \ldots + (\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},j} + \ldots,$$

де кожен підпростір $(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{d},j}$ коваріантів мультистепеня $\boldsymbol{m} := (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ та порядку j є скінченновимірним. Формальні степеневі ряди

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^n} \sum_{j=0}^{\infty} \dim((\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},j}) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_n^{m_n} t^j,$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^n} \dim((\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m}}) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_n^{m_n}$$

називаються *мультирядами* Пуанкаре мультиградуйованих алгебр спільних коваріантів та спільних інваріантів. Зрозуміло, що має місце рівність $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots \ldots, z_2, 0) = \mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Крім того, легко бачити, що ряд $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z, z, \ldots \ldots, z, 1)$ буде звичайним рядом Пуанкаре градуйованої алгебри $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$ відносно її стандартного градуювання за загальним степенем.

Згідно з теоремою Хохстера і Робертса [1] алгебри інваріантів редуктивних груп, зокрема і групи SL_2, є алгебрами Коена – Маколея. Звідси безпосередньо випливає, що ряди та мультиряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів є розкладом деяких раціональних функцій. У даній статті ми розглянемо задачу ефективного обчислення цих раціональних функцій. Інтерес до рядів Пуанкаре градуйованих скінченнопороджених алгебр викликаний тим, що вони несуть важливу інформацію про структуру цих алгебр. Для прикладу – порядок полюса $z = 1$ ряду $\mathcal{P}(A, z)$ дорівнює степеню трансцендентності алгебри A. Також всі ефективні алгоритми знаходження мінімальної породжуючої системи елементів алгебри A використовують ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(A, z)$. Використання мультирядів Пуанкаре значно підвищує швидкодію цих алгоритмів.

Обчислення рядів Пуанкаре алгебр інваріантів та коваріантів було важливою задачею класичної теорії інваріантів 19-го століття. У випадку однієї бінарної форми для $d \leq 10$, $d = 12$ ряди $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z, t)$ були обчислені ще Сильвестром і Франкліном (див. [2, 3]). Ці результати є правильними лише для $d <= 6$. В роботах [4 – 6] знайдено звичайні ряди Пуанкаре алгебр спільних коваріантів для двох та трьох бінарних форм малих степенів.

У даній статті ми доводимо аналог формули Келлі – Сильвестра для обчислення розмірності $\dim(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i}$ градуйованих компонент алгебри $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$. На основі цієї формули, а також при допомозі відомих комбінаторних операторів Мак-Магона отримано зручні формули для обчислення мультирядів Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Також пропонуються Maple-пакети для обчислення мультирядів Пуанкаре та алгебр спільних інваріантів бінарних форм.

2. Аналог формули Келлі – Сильвестра. Спочатку доведемо аналог формули Келлі – Сильвестра для розмірності мультиградуйованих підпросторів алгебри коваріантів $\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}$.

Нехай $V_{d_k}^{(k)} = \langle v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, ..., v_{d_k}^{(k)} \rangle$, $\dim V_{d_k}^{(k)} = d_k + 1$, $k = 1, \ldots, n$, — набір із n стандартних незвідних зображень алгебри $\mathfrak{sl}_2$. Базисні елементи $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ алгебри $\mathfrak{sl}_2$ діють на V_{d_k} диференціюваннями D_1, D_2, E:

$$D_1 \left(v_i^{(k)} \right) = i \, v_{i-1}^{(k)}, \quad D_2 \left(v_i^{(k)} \right) = (d - i) \, v_{i+1}^{(k)}, \quad E \left(v_i^{(k)} \right) = (d - 2 \, i) \, v_i^{(k)}.$$

Дія $\mathfrak{sl}_2$ природним способом продовжується до дії диференціюваннями на симетричній алгебрі $S(V_{\boldsymbol{d}})$.

Множина всіх старших коефіцієнтів коваріантів відносно впорядкування $X > > Y$ утворює підалгебру, яка позначається через $\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}$ і називається *алгеброю спільних семіінваріантів* n бінарних форм порядків $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Можна показати (див. [7]), що алгебри коваріантів та семіінваріантів ізоморфні. Крім того, алгебру $\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}$ можна ототожнити з ядром диференціювання D_1. Для довільного $v \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}$ натуральне число s називається *порядком* семіінваріанта v, якщо s є таким найменшим числом, що

$$D_2^s(v) \neq 0, \quad D_2^{s+1}(v) = 0.$$

Зрозуміло, що кожен семіінваріант $v \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}$ порядку i є старшим вектором незвідного $\mathfrak{sl}_2$-модуля розмірності $i+1$ в $S(V_{\boldsymbol{d}})$.

Симетрична алгебра $S(V_{\boldsymbol{d}})$ є $\mathbb{N}^n$-градуйованою

$$S(V_{\boldsymbol{d}}) = S^{(0,0,\ldots,0)}(V_{\boldsymbol{d}}) + S^{(1,0,\ldots,0)}(V_{\boldsymbol{d}}) + \ldots + S^{\boldsymbol{m}}(V_{\boldsymbol{d}}) + \ldots,$$

і кожен $S^{\boldsymbol{m}}(V_{\boldsymbol{d}})$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^n$, є цілком звідним зображенням алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ [8].

Нехай V_k — стандартний незвідний $\mathfrak{sl}_2$-модуль, $\dim V_k = k+1$. Тоді має місце розклад

$$S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}} \cong \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};0)V_0 + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};1)V_1 + \ldots + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};md^*)V_{md^*}.$$

Тут $md^* := \max(m_1\,d_1, m_2\,d_2, \ldots m_n\,d_n)$, а $\gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i)$ позначає кратність незвідного зображення V_k у розкладі $S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}}$. З іншого боку, кратність $\gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i)$ дорівнює числу лінійно незалежних однорідних спільних семіінваріантів мультистепеня $\boldsymbol{m}$ та порядку i. Зокрема, число лінійно незалежних однорідних спільних інваріантів мультистепеня $\boldsymbol{m}$ дорівнює $\gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};0)$. Отже, справедливим є наступне твердження.

Лема 1. $\dim(S_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} = \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i)$.

Розглянемо набір змінних $v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_{d_1}^{(1)}, v_0^{(2)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{d_2}^{(2)}, \ldots, v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \ldots$ $\ldots, v_{d_n}^{(n)}$. Характер $\mathrm{Char}\,(S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}})$ зображення $S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}}$ дорівнює

$$H_{\boldsymbol{m}}(q^{-d_1}, q^{-d_1+2}, \ldots, q^{d_1}, q^{-d_2}, q^{-d_2+2}, \ldots, q^{d_2}, \ldots, q^{-d_n}, q^{-d_n+2}, \ldots, q^{d_n}),$$

де $H_{\boldsymbol{m}}(v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_{d_1}^{(1)}, \ldots, v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \ldots, v_{d_n}^{(n)})$ — повна симетрична функція,

$$H_{\boldsymbol{m}}(v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_{d_1}^{(1)}, \ldots, v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \ldots, v_{d_n}^{(n)}) =$$

$$= \sum_{|\alpha^{(1)}|=m_1,\ldots,|\alpha^{(n)}|=m_n} (v_0^{(1)})^{\alpha_0^{(1)}} (v_1^{(1)})^{\alpha_1^{(1)}} \ldots (v_{d_1}^{(1)})^{\alpha_{d_1}^{(1)}} \ldots (v_0^{(n)})^{\alpha_0^{(n)}} \ldots (v_{d_n}^{(1)})^{\alpha_{d_n}^{(n)}} =$$

$$= \sum_{|\alpha^{(1)}|=m_1,\ldots,|\alpha^{(n)}|=m_n} \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{d_k} (v_i^{(k)})^{\alpha_i^{(k)}}, |\alpha^{(k)}| := \sum_{i=0}^{d_i} \alpha_i^{(k)}.$$

Замінивши $v_i^{(k)}$ на $q^{d_k-2\,i}$, отримаємо формулу для характеру $\mathrm{Char}(S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}})$:

$$\mathrm{Char}(S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}}) =$$

$$= \sum (q^{d_1})^{\alpha_0^{(1)}} (q^{d_1-2\cdot 1})^{\alpha_1^{(1)}} \ldots (q^{-d_1})^{\alpha_{d_1}^{(1)}} \ldots (q^{d_n})^{\alpha_0^{(n)}} (q^{d_n-2\cdot 1})^{\alpha_1^{(n)}} \ldots (q^{-d_n})^{\alpha_{d_n}^{(n)}} =$$

$$= \sum q^{d_1|\alpha^{(1)}|+\ldots+d_n|\alpha^{(n)}|-2\left(\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}+\ldots+d_1\,\alpha_{d_1}^{(1)}\right)-\ldots-2\left(\alpha_1^{(n)}+2\alpha_2^{(n)}+\ldots+d_n\,\alpha_{d_n}^{(n)}\right)} =$$

$$= \sum_{i=-md^*}^{md^*} \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i)q^i.$$

Тут перші дві суми беруться по всіх наборах $|\alpha^{(1)}| = m_1, \ldots, |\alpha^{(n)}| = m_n$, а $\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i)$ позначає число невід'ємних цілих розв'язків системи рівнянь

$$\begin{aligned} & d_1|\alpha^{(1)}| + \ldots + d_n|\alpha^{(n)}| - 2\left(\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} + \ldots + d_1\,\alpha_{d_1}^{(1)}\right) - \\ & -2\left(\alpha_1^{(n)} + 2\alpha_2^{(n)} + \ldots + d_n\,\alpha_{d_n}^{(n)}\right) = i, \\ & |\alpha^{(1)}| = m_1, \\ & |\alpha^{(2)}| = m_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & |\alpha^{(s)}| = m_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Як і в [6], можна показати, що ліва частина першого рівняння цієї системи є вагою зображення $S(V_{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{m}}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. $\dim(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} = \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i) - \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+2)$.

Доведення. Вага i з'являється по одному разу в кожному зображенні V_j при $j = i, \bmod 2$, $j \geq i$, отже,

$$\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i) = \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i) + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+2) + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+4) + \ldots\ .$$

Вага $i+2$ з'являється один раз у кожному зображенні V_j для $j = i, \bmod 2$, $j \geq i+2$, отже,

$$\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+2) = \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+2) + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+4) + \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+6) + \ldots.$$

Таким чином,

$$\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i) - \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i+2) = \gamma_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i) = \dim(S_{\boldsymbol{d}})_{\mathbf{m},i}.$$

Теорему доведено.

Перетворимо систему (1) до вигляду

$$\begin{aligned} & d_1\alpha_0^{(1)} + (d_1-2)\alpha_1^{(1)} + (d_1-4)\alpha_2^{(1)} + \ldots + (-d_1)\,\alpha_{d_1}^{(1)} + \ldots \\ & \ldots + d_s\alpha_0^{(s)} + (d_s-2)\alpha_1^{(s)} + (d_s-4)\alpha_2^{(s)} + \ldots + (-d_s)\,\alpha_{d_s}^{(s)} = i, \\ & |\alpha^{(1)}| = m_1, \\ & |\alpha^{(2)}| = m_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & |\alpha^{(s)}| = m_s. \end{aligned}$$

Відомо, що число $\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m}; i)$ невід'ємних цілих розв'язків цієї системи дорівнює коефіцієнту при $z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_n^{m_n} t^i$ породжуючої функції

$$f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{j=0}^{d_k}(1 - z_k t^{d_k - 2j})}.$$

Позначимо це так:

$$\omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i) = [z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_n^{m_n} t^i] f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) := [z^{\boldsymbol{m}} t^i] f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t).$$

Зауважимо, що $f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t^{-1})$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. $\dim(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} = [z^{\boldsymbol{m}} t^{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \cdots + d_n m_n - i}](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots \ldots, z_n t^{d_n}, t)$.

Доведення. Врахувавши формальну властивість $[x^{i-k}]f(x) = [x^i](x^k f(x))$, отримаємо

$$\dim(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} = \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i) - \omega_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{m};i+2)) =$$
$$= \left[z^{\boldsymbol{m}} t^i\right] f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) - \left[z^{\boldsymbol{m}} t^{i+2}\right] f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) =$$
$$= [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{-i} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) - [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{-(i+2)} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) =$$
$$= [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{-i} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t^{-1}) - [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{-(i+2)} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t^{-1}) =$$
$$= [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{i} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) - [z^{\boldsymbol{m}}]\, t^{(i+2)} f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) =$$
$$= [z^{\boldsymbol{m}}]\,(t^i - t^{i+2}) f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = \left[z^{\boldsymbol{m}} t^{-i}\right](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t).$$

Взявши до уваги, що $[x^i]f(x) = [(xy)^i]f(xy)$, знайдемо

$$\left[z^{\boldsymbol{m}} t^{-i}\right](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) =$$
$$= \left[(z_1 t^{d_1})^{m_1} (z_2 t^{d_2})^{m_2} \ldots (z_n t^{d_n})^{m_n} t^i\right](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t) =$$
$$= [z^{\boldsymbol{m}} t^{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \ldots + d_n m_n - i}](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t),$$

що і потрібно було довести.

Ми замінили z_k на $z_k t^{d_k}$, $1 \le k \le n$, для того, щоб позбутися від'ємних степенів t у знаменнику функції $f_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{z}, t)$.

Зрозуміло, що

$$\dim(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m}} = [z^{\boldsymbol{m}} t^{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \ldots + d_n m_n}](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t).$$

3. Аналоги формули Спрінгера та Бріона. Виведемо формули для мультирядів Пуанкаре, які є аналогічними відомим формулам Спрінгера та Бріона (див. [4, 9]) для рядів Пуанкаре.

Розглянемо алгебру $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n, t]]$ формальних степеневих рядів. Визначимо $\mathbb{C}$-лінійну функцію

$$\Psi_{\boldsymbol{d}} \colon \mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n, t]] \to \mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n, t]]$$

таким чином:

$$\Psi_{\boldsymbol{d}}\left(\sum_{\boldsymbol{i},j=0}^{\infty} a_{\boldsymbol{i},j}\, z^{\boldsymbol{i}} t^j\right) = \sum_{d_1 i_1 + \cdots + d_n i_n - j \ge 0} a_{\mathbf{i},j} z^{\boldsymbol{i}} t^{d_1 i_1 + \cdots + d_n i_n - j}.$$

Тут $a_{\boldsymbol{i},j} := a_{i_1, i_2, \ldots, i_n, j} \in \mathbb{C}$.

Виразимо мультиряд Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$, який, нагадаємо, співпадає з мультирядом $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$, у термінах функції $\Psi_{\boldsymbol{d}}$. Має місце наступне твердження.

Лема 2. $\mathcal{P}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = \Psi_{\boldsymbol{d}}\left((1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t)\right).$

Доведення. Теорема 2 стверджує, що

$$\dim(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} = [z^{\boldsymbol{m}} t^{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \ldots + d_n m_n - i}](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t).$$

Тоді

$$\mathcal{P}\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\boldsymbol{m}, i=0}^{\infty} \dim(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{m},i} z^{\boldsymbol{m}} t^i =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{m}, i=0}^{\infty} \left([z^{\boldsymbol{m}} t^{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \ldots + d_n m_n - i}](1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t)\right) z^{\boldsymbol{m}} t^i =$$

$$= \Psi_{\boldsymbol{d}}\left((1-t^2) f_{\boldsymbol{d}}(z_1 t^{d_1}, z_2 t^{d_2}, \ldots, z_n t^{d_n}, t)\right).$$

Лему доведено.

Для обчислення кратних рядів Пуанкаре $\mathcal{P}\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}(\mathbf{z}, t)$ ми скористаємося відомими [10] комбінаторними операторами Мак-Магона $\underset{\geq 0}{\Omega}$, $\underset{= 0}{\Omega}$, які діють на рядах Лорана

$$\mathcal{L} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_s=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{k_1, k_2, \ldots, k_s, \alpha} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_s^{k_s} (\lambda t)^{\alpha}$$

таким чином:

$$\underset{\geq 0}{\Omega} \mathcal{L} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_s=0}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_s, \alpha} z_1^{k_1} \ldots z_s^{k_s} t^{\alpha},$$

та

$$\underset{= 0}{\Omega} \mathcal{L} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_s=0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_s, 0} z_1^{k_1} \ldots z_s^{k_s}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Мультиряди Пуанкаре алгебр $\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}$ та $\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}$ обчислюються за формулами*

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}, z_1, \ldots z_n, t) = \underset{\geq 0}{\Omega} f_{\boldsymbol{d}}\left(z_1 (t\lambda)^{d_1}, z_2 (t\lambda)^{d_2}, \ldots, z_s (t\lambda)^{d_s}, \frac{1}{t\lambda}\right)$$

та

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, \ldots z_n) = \underset{= 0}{\Omega} f_{\boldsymbol{d}}\left(z_1 (t\lambda)^{d_1}, z_2 (t\lambda)^{d_2}, \ldots, z_s (t\lambda)^{d_s}, \frac{1}{t\lambda}\right).$$

Доведення. Припустимо, що має місце розклад

$$f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) = \sum_{k_1, \ldots, k_n, j \geq 0} a_{k_1, \ldots, k_n, j}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^j.$$

Тоді

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}, z_1, \ldots z_n, t) = \Psi_{\boldsymbol{d}}\left(f_{\boldsymbol{d}}(z_1, z_2, \ldots, z_n, t)\right) =$$

$$= \Psi_{\boldsymbol{d}} \left(\sum_{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0} a_{k_1,\ldots,k_n,j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^j \right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0} \Psi_{\boldsymbol{d}} \left(a_{k_1,\ldots,k_n,j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^j \right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0 \\ d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j\geq 0}} a_{k_1,\ldots,k_n,j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^{d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j}.$$

З іншого боку,

$$\underset{\geq 0}{\Omega} f_{\boldsymbol{d}} \left(z_1(t\lambda)^{d_1}, z_2(t\lambda)^{d_2}, \ldots, z_s(t\lambda)^{d_n}, \frac{1}{t\lambda} \right) =$$

$$= \underset{\geq 0}{\Omega} \sum_{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0} a_{k_1,\ldots,k_n,j} (z_1(t\lambda)^{d_1})^{k_1} (z_2(t\lambda)^{d_2})^{k_2} \ldots (z_n(t\lambda)^{d_n})^{k_n} (t\lambda)^{-j} =$$

$$= \underset{\geq 0}{\Omega} \sum_{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0} a_{k_1,\ldots,k_n,j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^{d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j} \lambda^{d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n,j\geq 0 \\ d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j\geq 0}} a_{k_1,\ldots,k_n,j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} t^{d_1k_1+d_2k_2+\ldots+d_nk_n-j}.$$

Тому $\mathcal{P}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}, z_1, \ldots, z_n, t) = \underset{\geq 0}{\Omega} f_{\boldsymbol{d}} \left(z_1(t\lambda)^{d_1}, z_2(t\lambda)^{d_2}, \ldots, z_s(t\lambda)^{d_s}, \frac{1}{t\lambda} \right)$.

Формула для алгебри інваріантів доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Для знаходження мультирядів Пуанкаре алгебр інваріантів та ядер локально нільпотентних диференціювань автором було розроблено Maple-пакет `Poincare_series`, який разом із детальною інструкцією його використання знаходиться на сайті http://sites.google.com/site/bedratyuklp.

Процедура `MULTIVAR_COVARIANTS` $(\boldsymbol{d})$ обчислює мультиряд $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots \ldots, z_n, t)$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{(1,1)}, z_1, z_2, t) = \frac{1}{(1 - z_2t)(1 - z_1t)(1 - z_1z_2)},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{(1,2)}, z_1, z_2, t) = \frac{1 + z_1z_2t}{(1 - z_2t^2)(1 - z_2{}^2)(1 - z_1t)(1 - z_1{}^2z_2)},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{(2,2)}, z_1, z_2, t) = \frac{1 + z_1z_2t^2}{(1 - z_1)(1 - z_2t^2)(1 - z_2{}^2)(1 - z_1t^2)(1 - z_2z_1)(1 - z_1)},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{(1,1,1)}, z_1, z_2, z_3, t) = \frac{1 - z_1z_2z_3t}{(1 - z_3t)(1-z_2t)(1-z_3z_2)(1 - z_1t)(1-z_3z_1)(1 - z_2z_1)}.$$

Процедура `MULTIVAR_INVARIANTS` $(\boldsymbol{d})$ обчислює мультиряд $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{d}}, z_1, z_2, \ldots \ldots, z_n)$. Для прикладу

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{(1,1)}, z_1, z_2) = \frac{1}{1 - z_1z_2}, \mathcal{P}(\mathcal{I}_{(1,3)}, z_1, z_2) = \frac{1 + z_2{}^2z_1{}^2 - z_2z_1}{(1 - z_2{}^4)(1 - z_1{}^3z_2)(1 - z_2z_1)},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{(1,2,2)}, z_1, z_2, z_3) = \frac{1 + {z_1}^2 z_2 z_3}{(1 - {z_3}^2)\,(1 - z_3 z_2)\,(1 - {z_2}^2)\,(1 - {z_1}^2 z_3)\,(1 - {z_1}^2 z_2)}.$$

Деякі результати обчислень мультирядів Пуанкаре, проведених за цими формулами, розміщено на сайті http://www.win.tue.nl/∼aeb/math/poincare2.html.

4. Приклад. Проілюструємо використання техніки рядів Пуанкаре для знаходження мінімальних породжуючих систем алгебр семіінваріантів та ядер локально нільпотентних диференціювань.

Розглянемо алгебру семіінваріантів $\mathcal{S}_{(1,2)}$. Можна показати (див. [7]), що ця алгебра ототожнюється з ядром такого диференціювання алгебри $\mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2]$:

$$\mathcal{D}(x_0) = 0, \quad \mathcal{D}(x_1) = x_0,$$
$$\mathcal{D}(y_0) = 0, \quad \mathcal{D}(y_1) = y_0, \quad \mathcal{D}(y_2) = 2\, y_1.$$

Працювати з диференціюваннями зручніше, оскільки у цьому випадку легко перевірити безпосередньо чи даний конкретний многочлен належить ядру диференціювання.

Використовуючи пакет `Poincare_series`, знаходимо мультиряд Пуанкаре

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_{(1,2)}, z_1, z_2, t) = \mathcal{P}(\ker \mathcal{D}, z_1, z_2, t) = \frac{1 + z_1 z_2 t}{(1 - z_2^2)\,(1 - z_2 t^2)\,(1 - z_1 t)\,(1 - z_2 {z_1}^2)}.$$

Аналізуючи вигляд мультиряду Пуанкаре, робимо припущення про існування таких п'яти елементів ядра: одного семіінваріанта мультистепеня $(1, 0)$ і порядку 1, одного семіінваріанта мультистепеня (0,1) і порядку 2, одного інваріанта мультистепеня (0,2), одного інваріанта мультистепеня (2,1) і одного семіінваріанта елемента мультистепеня (1,1) і порядку 1. Семіінваріанти першого степеня легко знайти – ними є змінні x_0 та y_0. Решту із вказаних семіінваріантів, знаючи їхні мультистепені та порядки, легко знайти методами лінійної алгебри. В результаті отримаємо

$$dv_1 = y_0 x_1 - y_1 x_0, \quad dv_2 = y_0 y_2 - y_1^2, \quad tr = y_0 {x_1}^2 - 2\, y_1 x_1 x_0 + y_2 {x_0}^2.$$

Ранг якобіана $J(x_0, y_0, dv_1, dv_2)$ дорівнює 4, тому многочлени x_0, y_0, dv_1, dv_2 алгебраїчно незалежні. Прямою перевіркою знаходимо одну сизигію

$$dv_1^2 = y_0\, tr - dv_2 x_0^2.$$

Припустимо, що існує ще одна сизигія вигляду $F(x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr) = 0$, де F — деякий многочлен. Тоді, виконавши підстановку

$$tr = \frac{dv_1^2 + dv_2 x_0^2}{y_0},$$

отримаємо раціональне співвідношення для многочленів x_0, y_0, dv_1, dv_2, а це суперечить їхній алгебраїчній незалежності. Отже, між многочленами x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr існує лише одна сизигія. Звідси випливає, що многочлени x_0, y_0, dv_2, tr утворюють однорідну систему параметрів для алгебри $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr]$. Також із вигляду сизигії робимо висновок, що алгебра $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr]$ є вільною над своєю підалгеброю $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_2, tr]$, тобто є алгеброю Коена – Маколея. Тому має місце розклад

$$\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr] = \mathbb{C}[x_0, y_0, dv_2, tr] \oplus dv_1\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_2, tr].$$

Оскільки алгебра $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_2, tr]$ ізоморфна відповідно мультиградуйованій алгебрі многочленів від чотирьох змінних, то її мультиряд Пуанкаре має вигляд

$$\frac{1}{(1-z_2^2)\,(1-z_2t^2)\,(1-z_1t)\,(1-z_2{z_1}^2)}.$$

Звідси, врахувавши, що многочлен dv_1 має мультистепінь $(1,1)$ та порядок 1, відразу отримуємо мультиряд Пуанкаре мультиградуйованої алгебри $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr]$:

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr], z_1, z_2, t) = \frac{1+z_1z_2t}{(1-z_2^2)\,(1-z_2t^2)\,(1-z_1t)\,(1-z_2{z_1}^2)}.$$

Отже, мультиряди Пуанкаре алгебри $\mathcal{S}_{(1,2)}$ та її підалгебри $\mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr]$ рівні між собою, а тому (див. [11]) ці алгебри збігаються і ми отримуємо

$$\mathcal{S}_{(1,2)} = \mathbb{C}[x_0, y_0, dv_1, dv_2, tr].$$

Поклавши в мультиряді для $\mathcal{S}_{(1,2)}$ $t=0$, отримаємо мультиряд Пуанкаре для алгебри інваріантів $\mathcal{I}_{(1,2)}$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{(1,2)}, z_1, z_2) = \frac{1}{(1-z_2^2)\,(1-z_2{z_1}^2)}.$$

Звідси робимо висновок, що алгебра інваріантів $\mathcal{I}_{(1,2)}$ є вільною алгеброю, породженою двома інваріантами dv_2 і tr : $\mathcal{I}_{(1,2)} = \mathbb{C}[dv_2, tr]$.

Для обчислення алгебр спільних семіінваріантів, інваріантів та ядер диференціювань Вейтценбека автором розроблено Maple-пакет `SL_2_Inv_Ker` , який також знаходиться на сайті http://sites.google.com/site/bedratyuklp. В основі алгоритму лежить використання мультирядів Пуанкаре.

1. *Hochster M., Roberts J.* Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macalay // Adv. Math. – 1974. – **13**. – P. 125 – 175.
2. *Sylvester J.J., Franklin F.* Tables of the generating functions and groundforms for the binary quantic of the first ten orders // Amer. J. Math. – 1879. – **2**. – P. 223 – 251.
3. *Sylvester J. J.* Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzygies of certain quantics // Amer. J. Math. – 1881. – **4**. – P. 41 – 62.
4. *Brion M.* Invariants de plusieurs formes binaires // Bull. Soc. math. France. – 1982. – **110**. – P. 429 – 445.
5. *Drensky V., Genov G. K.* Multiplicities of Schur functions with applications to invariant theory and PI-algebras // J. C. R. Acad. Bulg. Sci. – 2004. – **57**, № 3. – P. 5 – 10.
6. *Bedratyuk L.* The Poincaré series of the algebras of simultaneous invariants and covariants of two binary forms // Linear and Multilinear Algebra. – 2010. – **58**, № 6. – P 789 – 803.
7. *Bedratyuk L.* Weitzenböck derivations and the classical invariant theory, I: Poincaré series // Serdica Math. J. – 2010. – **36**, № 2. – P. 99 – 120.
8. *Fulton W., Harris J.* Representation theory: a first course. – New York etc.: Springer, 1991.
9. *Springer T. A.* On the invariant theory of $SU(2)$ // Indag. Math. –1980. – **42.** – P. 339 – 345.
10. *MacMahon P. A.* Combinatory analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1915 – 1916. – Vol. 2. – (Reprinted: New York: Chelsea, 1960).
11. *Dersken H., Kemper G.* Computational invariant theory. – New York: Springer, 2002.

Одержано 17.01.11,
після доопрацювання — 25.04.11