УДК 512.5

Д. Є. Волошин (Ін-т математики НАН України, Київ)

БУДОВА НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР

The structure of nodal algebras over a complete discrete valuation ring with algebraically closed residue field is described.

Описывается строение нодальных алгебр над полным дискретно нормированным кольцом с алгебраически замкнутым полем вычетов.

Вступ. Нодальні алгебри вперше було розглянуто у статті [1], де доведено, що це єдині чисто нетерові алгебри, для яких опис усіх скінченнопороджених модулів є ручною задачею (тут чисто нетеровою алгеброю називається кільце, що має нетерів центр і є скінченнопородженим модулем над центром та не містить мінімальних лівих і правих ідеалів). У роботах [2, 3] встановлено, що для нодальних алгебр, і тільки для них, ручною є похідна категорія категорії скінченнопороджених модулів, і наведено явний опис цієї категорії. Природною задачею є вивчення будови таких алгебр. В роботі описано будову нодальних алгебр над повним дискретно нормованим кільцем з алгебраїчно замкненим полем лишків.

Будемо називати нетерове зліва кільце *чисто нетеровим зліва*, якщо воно не містить мінімальних лівих ідеалів. Аналогічно визначається *чисто нетерове справа* кільце. Нехай A — алгебра над комутативним нетеровим кільцем $\mathcal{O}$, скінченнопороджена як $\mathcal{O}$-модуль. Тоді A є нетеровим $\mathcal{O}$-модулем і, отже, нетеровим кільцем. Відомо, що для такої алгебри A чиста нетеровість зліва (справа) еквівалентна тому, що A не містить простих $\mathcal{O}$-підмодулів. Отже, в цьому випадку чиста нетеровість зліва і справа.

Означення. *Алгебра N над комутативним локальним нетеровим кільцем $\mathcal{O}$ називається нодальною, якщо існує спадкова чисто нетерова $\mathcal{O}$-алгебра $H \supseteq N$, яка є скінченнопородженим $\mathcal{O}$-модулем, і*

1) $\operatorname{rad} N = \operatorname{rad} H$;

2) $\operatorname{length}_N(H \otimes_N U) \leqslant 2$ *для кожного простого лівого N-модуля U.*

Нодальна $\mathcal{O}$-алгебра N є нетеровим $\mathcal{O}$-модулем без простих $\mathcal{O}$-підмодулів, як підмодуль H, і тому чисто нетеровим кільцем.

Теорема. *Нехай $\mathcal{O}$ — повне дискретно нормоване кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і алгебраїчно замкненим полем лишків $\mathbb{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$. Кожна нодальна алгебра над кільцем $\mathcal{O}$ ізоморфна деякій $\mathcal{O}$-алгебрі $N(\mathcal{O})$, що є підалгеброю прямого добутку матричних алгебр*

$$\prod_{i=1}^{m} M_{n_i}(\mathcal{O}) = \{(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \mid A_i \in M_{n_i}(\mathcal{O})\}$$

(*матриці A_i вважаємо блочними і розбитими на однакову кількість горизонтальних та вертикальних смуг t_i, до того ж k-ті горизонтальна та вертикальна смуги мають однакову ширину n_{ik}*). *Алгебра $N(\mathcal{O})$ визначається даними*:

1) $m \in \mathbb{N}$ — *кількість множників прямого добутку*;

2) $(t_i \in \mathbb{N}\colon 1 \leqslant i \leqslant m)$ — *набір кількостей смуг, на які розбито матриці* $A_i = (A_{ikl})_{1 \leqslant k,l \leqslant t_i}$;

3) ρ — *симетричне бінарне відношення на множині* $\{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant t_i\}$ *таке, що для кожної пари* (i,k) *існує щонайбільше одна пара* (i',k'), *для якої* $(i,k)\ \rho\ (i',k')$;

4) $(n_{ik} \in \mathbb{N}\colon 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant t_i)$ — *набір розмірів смуг, на які розбито матриці* A_i, *до того ж* $n_{ik} = n_{i'k'}$, *якщо* $(i,k)\ \rho\ (i',k')$ $\Big(n_i = \sum_{k=1}^{t_i} n_{ik}$ *для кожного* $i\Big)$;

5) $(n'_{ik}, n''_{ik} \in \mathbb{N}\colon (i,k)\ \rho\ (i,k))$ — *набір розмірів смуг, на які розбиваються матриці* A_{ikk} *у випадку* $(i,k)\ \rho\ (i,k)$ (*виконується* $n'_{ik} + n''_{ik} = n_{ik}$),
і задається так:

$$N(\mathcal{O}) = \Bigg\{ (A_i) \in \prod_{i=1}^{m} M_{n_i}(\mathcal{O}) \mid A_i = (A_{ikl})_{1 \leqslant k,l \leqslant t_i},$$

$$A_{ikl} \in \operatorname{Mat}(n_{ik} \times n_{il}, \mathcal{O});$$

$$A_{ikl} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \textit{якщо} \quad k < l;$$

$$A_{ikk} \equiv A_{i'k'k'} \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \textit{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i',k');$$

$$A_{ikk} \equiv A'_{ik} \oplus A''_{ik} \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \textit{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i,k),$$

$$\textit{де} \ \ A'_{ik} \in M_{n'_{ik}}(\mathcal{O}), \ \ A''_{ik} \in M_{n''_{ik}}(\mathcal{O}) \Bigg\}.$$

Кожна така $\mathcal{O}$-*алгебра* $N(\mathcal{O})$ *є нодальною.*

Зауваження **1.** Типовим прикладом кільця $\mathcal{O}$ з умови теореми є кільце степеневих рядів від однієї змінної $\mathbb{K}[[t]]$ над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$.

Зауваження **2.** З доведення теореми випливає, що для кільця $\mathcal{O}$ з теореми умову 2 означення нодальної $\mathcal{O}$-алгебри можна замінити на еквівалентну симетричну:

$$\operatorname{length}_N(V \otimes_N H) \leqslant 2 \quad \text{для кожного простого правого } N\text{-модуля} \quad V.$$

Для довільного комутативного локального нетерового кільця це випливає з результатів роботи [1].

Лема. *Нехай* A, B — *кільця,* $A \subseteq B$, *і* $\operatorname{rad} A$ *є ідеалом* B. *Покладемо* $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ *і* $\bar{B} = B/\operatorname{rad} A$. *Для кожного простого лівого* A-*модуля* ($\bar{A}$-*модуля*) U *виконується рівність*

$$\operatorname{length}_A(B \otimes_A U) = \operatorname{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Доведення. Кожний простий лівий A-модуль є простим лівим $\bar{A}$-модулем, і навпаки. Доведемо, що для кожного простого лівого A-модуля U має місце ізоморфізм лівих B-модулів

$$B \otimes_A U \simeq \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U.$$

Білінійне відображення $B \times U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U\colon (b,x) \mapsto \bar{b} \otimes x$ є A-збалансованим, тому існує гомоморфізм абелевих груп $f\colon B \otimes_A U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ такий, що $f(b \otimes x) = \bar{b} \otimes x$

для всіх $b \in B, x \in U$. Легко перевірити, що f також буде гомоморфізмом B-модулів. Якщо $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, де $b_1, b_2 \in B$, то $b_1 - b_2 \in \operatorname{rad} A$, і для довільного $x \in U$ виконується $(b_1 - b_2)x \in (\operatorname{rad} A)U = 0$, $b_1 \otimes x - b_2 \otimes x = 1 \otimes (b_1 - b_2)x = 0$ в $B \otimes_A U$. Тому можна коректно визначити білінійне $\bar{A}$-збалансоване відображення $\bar{B} \times U \to B \otimes_A U \colon (\bar{b}, x) \mapsto b \otimes x$. Значить, існує гомоморфізм абелевих груп $g \colon \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U \to B \otimes_A U$ такий, що $g(\bar{b} \otimes x) = b \otimes x$ для всіх $b \in B$, $x \in U$. Легко бачити, що g буде гомоморфізмом B-модулів. Ендоморфізми B-модулів fg, gf збігаються з $\mathrm{id}_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}$, $\mathrm{id}_{B \otimes_A U}$ на твірних модулів $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$, $B \otimes_A U$ відповідно, отже, $fg = \mathrm{id}_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}$ і $gf = \mathrm{id}_{B \otimes_A U}$.

З ізоморфізму B-модулів $B \otimes_A U$ і $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ випливає їх ізоморфізм як A-модулів та

$$\operatorname{length}_A(B \otimes_A U) = \operatorname{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Композиційний ряд кожного $\bar{A}$-модуля буде його композиційним рядом, як A-модуля, тому

$$\operatorname{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U) = \operatorname{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U),$$

що і дає потрібну рівність.

Лему доведено.

Доведення теореми. Нехай N — нодальна $\mathcal{O}$-алгебра, H — відповідна спадкова $\mathcal{O}$-алгебра. Покладемо $\bar{N} = N / \operatorname{rad} N$ і $\bar{H} = H / \operatorname{rad} H$. Оскільки $\operatorname{rad} N = \operatorname{rad} H$, то $\bar{N} \subseteq \bar{H}$. За лемою Накаями $\mathfrak{m}N \subseteq \operatorname{rad} N$ і $\mathfrak{m}H \subseteq \operatorname{rad} H$, тому $\bar{N}$ і $\bar{H}$ є скінченновимірними алгебрами над $\mathbb{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$. Маємо $\operatorname{rad} \bar{N} = \operatorname{rad} \bar{H} = 0$, тому $\bar{N}$, $\bar{H}$ — напівпрості $\mathbb{K}$-алгебри. З леми випливає, що умову 2 в означенні нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну:

$$\operatorname{length}_{\bar{N}}(\bar{H} \otimes_{\bar{N}} U) \leqslant 2 \quad \text{для кожного простого лівого } \bar{N}\text{-модуля} \quad U. \tag{1}$$

Далі доведення теореми розіб'ємо на дві частини.

Вигляд нодальної алгебри. Відомо [4, 5], що спадкова чисто нетерова алгебра H над повним дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з алгебраїчно замкненим полем лишків моріта-еквівалентна прямому добутку $\mathcal{O}$-алгебр $H_n(\mathcal{O})$, кожна з яких є підалгеброю $M_n(\mathcal{O})$, і складається з усіх матриць (a_{ij}) таких, що $a_{ij} \in \mathfrak{m}$ при $i < j$. Тому існує ізоморфізм $\mathcal{O}$-алгебр $\Phi \colon H \simeq H(\mathcal{O})$, де

$$H(\mathcal{O}) = \left\{ (A_i) \in \prod_{i=1}^{m} M_{n_i}(\mathcal{O}) \mid A_i = (A_{ikl})_{1 \leqslant k,l \leqslant t_i}, \right.$$

$$A_{ikl} \in \operatorname{Mat}(n_{ik} \times n_{il}, \mathcal{O});$$

$$\left. A_{ikl} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad k < l \right\} \tag{2}$$

(матриці A_i є блочними і розбитими на однакову кількість горизонтальних і вертикальних смуг t_i, до того ж k-ті горизонтальна та вертикальна смуги мають однакову ширину n_{ik} та $n_i = \sum_{k=1}^{t_i} n_{ik}$ для кожного i). Тоді

$$\Phi(\operatorname{rad} H) = \operatorname{rad} H(\mathcal{O}) = \left\{ (A_i) \in \prod_{i=1}^{m} M_{n_i}(\mathcal{O}) \mid A_i = (A_{ikl})_{1 \leqslant k,l \leqslant t_i}, \right.$$

$$A_{ikl} \in \operatorname{Mat}(n_{ik} \times n_{il}, \mathcal{O});$$

$$\left. A_{ikl} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad k \leqslant l \right\}.$$

Покладемо $\mathbf{F} = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant t_i\}$ та

$$M(\mathbb{K}) = \prod_{(i,k) \in \mathbf{F}} M_{n_{ik}}(\mathbb{K}).$$

Задамо епіморфізм $\mathcal{O}$-алгебр $\pi\colon H(\mathcal{O}) \to M(\mathbb{K})$ формулою $\pi((A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}) = (\overline{A}_{ikk})_{(i,k) \in \mathbf{F}}$ (покладемо $\overline{A} = (\bar{a}_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ для $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathcal{O})$). Оскільки $\ker \pi = \operatorname{rad} H(\mathcal{O})$, то $\ker \pi\Phi = \operatorname{rad} H$. Тому існує такий ізоморфізм $\mathbb{K}$-алгебр $\varphi : \bar{H} \simeq M(\mathbb{K})$, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Phi} & H(\mathcal{O}) \\ {\scriptstyle \pi_H}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ \bar{H} & \xrightarrow{\varphi} & M(\mathbb{K}) \end{array} \tag{3}$$

комутативна, де $\pi_H\colon H \to \bar{H}$ — канонічна проекція.

Оскільки нодальність алгебри зберігається при еквівалентності Моріти, будемо для простоти вважати, що N — зведена алгебра. Тоді $\bar{N}$ розкладається в скінченний добуток тіл над полем $\mathbb{K}$. Ці тіла скінченновимірні над $\mathbb{K}$, оскільки $\bar{N}$ скінченновимірна, а з алгебраїчної замкненості $\mathbb{K}$ випливає, що вони ізоморфні $\mathbb{K}$. Отже, $\bar{N} \simeq \mathbb{K}^s$. Нехай $1 = \sum_{j=1}^{s} e_j$ — відповідний розклад одиниці алгебри $\bar{N}$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів. Тоді $e_1, \ldots, e_s$ — базис $\bar{N}$ над $\mathbb{K}$ і $\varphi|_{\bar{N}}\colon \bar{N} \to M(\mathbb{K})$ — занурення $\mathbb{K}$-алгебр. Це дає можливість знайти образ алгебри $\bar{N}$ при деякому ізоморфізмі, а потім визначити ізоморфний образ алгебри N.

Очевидно, $\varphi = (\varphi_{ik})_{(i,k) \in \mathbf{F}}$, де $\varphi_{ik}\colon \bar{H} \to M_{n_{ik}}(\mathbb{K})$ — композиція φ і проекції $M(\mathbb{K}) \to M_{n_{ik}}(\mathbb{K})$. Розглянемо $M_{n_{ik}}(\mathbb{K})$ як алгебру лінійних операторів n_{ik}-вимірного лінійного $\mathbb{K}$-простору L_{ik}. Тоді розклад одиниці алгебри $M_{n_{ik}}(\mathbb{K})$ в суму ортогональних ідемпотентів $1 = \sum_{j=1}^{s} \varphi_{ik}(e_j)$ визначає розклад простору L_{ik} в пряму суму $\mathbb{K}$-просторів $\bigoplus_{j=1}^{s} L_{ik}^{j}$, де $L_{ik}^{j} = \operatorname{im} \varphi_{ik}(e_j)$ (можливо для деяких i, k, j виконується $\varphi_{ik}(e_j) = 0$, і, відповідно, $L_{ik}^{j} = 0$). Покладемо $d_{ik}^{j} = \dim_{\mathbb{K}} L_{ik}^{j}$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{s} d_{ik}^{j} = \dim_{\mathbb{K}} L_{ik} = n_{ik} \tag{4}$$

для всіх $(i,k) \in \mathbf{F}$. Вибравши за базис простору L_{ik} об'єднання базисів просторів $L_{ik}^{1}, \ldots, L_{ik}^{s}$, отримаємо, що для кожної пари (i,k) існує матриця $S_{ik} \in GL_{n_{ik}}(\mathbb{K})$ така, що для кожного j матриця $S_{ik}^{-1} \varphi_{ik}(e_j) S_{ik}$ є діагональною з нулями і d_{ik}^{j} одиницями на діагоналі, до того ж одиниці розташовані на місцях з номерами $1 + \sum_{l=1}^{j-1} d_{ik}^{l}, \ldots, d_{ik}^{j} + \sum_{l=1}^{j-1} d_{ik}^{l}$. Нехай $S = (S_{ik})_{(i,k) \in \mathbf{F}} \in M(\mathbb{K})$. Позначимо через

σ внутрішній автоморфізм $A \mapsto S^{-1}AS$ алгебри $M(\mathbb{K})$ і розглянемо ізоморфізм $\psi = \sigma\varphi\colon \bar{H} \simeq M(\mathbb{K})$. Маємо $\psi(e_j) = (\psi_{ik}(e_j))_{(i,k)\in\mathbf{F}}$, де $\psi_{ik}(e_j) = S_{ik}^{-1}\varphi_{ik}(e_j)S_{ik}$ для всіх $(i,k) \in \mathbf{F}$ і кожного $j \in \{1,\dots,s\}$.

Застосувавши умову (1) до всіх головних простих модулів $\bar{N}e_1,\dots,\bar{N}e_s$, отримаємо

$$\mathrm{length}_{\bar{N}}(\bar{H} \otimes_{\bar{N}} \bar{N}e_j) \leqslant 2$$

для кожного $j \in \{1,\dots,s\}$. З іншого боку, виконуються ізоморфізми $\bar{N}$-модулів

$$\bar{H} \otimes_{\bar{N}} \bar{N}e_j \simeq \bar{H}e_j \simeq \bigoplus_{(i,k)\in\mathbf{F}} d_{ik}^j \left(\bigoplus_{l=1}^{s} d_{ik}^l \bar{N}e_l \right)$$

(останній ізоморфізм одержимо, якщо ототожнимо $\bar{N}$ і $\bar{H}$ з їхніми образами при ізоморфізмі $\psi\colon \bar{H} \simeq M(\mathbb{K})$ і врахуємо спеціальний вигляд кожної матриці $\psi_{ik}(e_j)$). Тому

$$\mathrm{length}_{\bar{N}}(\bar{H} \otimes_{\bar{N}} \bar{N}e_j) = \sum_{(i,k)\in\mathbf{F}} d_{ik}^j \sum_{l=1}^{s} d_{ik}^l = \sum_{(i,k)\in\mathbf{F}} d_{ik}^j n_{ik}$$

(в останній рівності ми використали (4)). Звідси

$$\sum_{(i,k)\in\mathbf{F}} d_{ik}^j n_{ik} \leqslant 2 \tag{5}$$

для кожного $j \in \{1,\dots,s\}$.

Із співвідношень (4) і (5) легко випливає, що:

1) $n_{ik} \in \{1,2\}$ для всіх $(i,k) \in \mathbf{F}$;
2) $d_{ik}^j \in \{0,1\}$ для всіх $(i,k) \in \mathbf{F}$, $j \in \{1,\dots,s\}$;
3) $|\{(i,k) \in \mathbf{F} \mid d_{ik}^j = 1\}| \in \{1,2\}$ для кожного j;
4) якщо $n_{ik} = 2$ і $d_{ik}^j = 1$, то $d_{i'k'}^j = 0$ для всіх $(i',k') \neq (i,k)$.

Нехай $x = \sum_{j=1}^{s} x_j e_j \in \bar{N}$, де $x_1,\dots,x_s \in \mathbb{K}$. Якщо $n_{ik} = 1$ і $d_{ik}^j = 1$, то $\psi_{ik}(e_j) = (1)$ і $\psi_{ik}(e_{j'}) = (0)$ для всіх $j' \neq j$. Тому

$$\psi_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{s} x_j \psi_{ik}(e_j) = (\,x_j).$$

Якщо $n_{ik} = 2$ і $d_{ik}^j = d_{ik}^{j'} = 1, j < j'$, то $\psi_{ik}(e_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\psi_{ik}(e_{j'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\psi_{ik}(e_{j''}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для всіх $j'' \neq j, j'$. Тому $\psi_{ik}(x) = \begin{pmatrix} x_j & 0 \\ 0 & x_{j'} \end{pmatrix}$. Нехай $(A_{ik}) \in M(\mathbb{K})$ та існує $x \in \bar{N}$, для якого $(A_{ik}) = \psi(x)$. Тоді $A_{ik} = \psi_{ik}(x)$ для всіх $(i,k) \in \mathbf{F}$. Якщо $(i,k) \neq (i',k')$ і $d_{ik}^j = d_{i'k'}^j = 1$ для деякого j, то з умови 4 випливає, що $n_{ik} = n_{i'k'} = 1$, і тому $A_{ik} = (\,x_j) = A_{i'k'}$. Якщо $n_{ik} = 2$, то A_{ik} є діагональною. Оскільки всі $d_{ik}^j \in \{0,1\}$ і $d_{ik}^j = d_{i'k'}^j = 1$ має наслідком $n_{ik} = n_{i'k'} = 1$, то ці дві умови є й достатніми, щоб для $(A_{ik}) \in M(\mathbb{K})$ існував $x \in \bar{N}$, для якого $(A_{ik}) = \psi(x)$.

На множині $\mathbf{F}$ введемо симетричне бінарне відношення ρ: $(i,k)\ \rho\ (i',k')$ тоді і лише тоді, коли $(i,k) \neq (i',k')$ і $d_{ik}^{j} = d_{i'k'}^{j} = 1$ для деякого $j \in \{1,\ldots,s\}$, або $(i,k) = (i',k')$ і $n_{ik} = 2$. Відповідно зазначеному вище можемо записати

$$\psi(\bar{N}) = \Big\{ (A_{ik}) \in \prod_{(i,k)\in\mathbf{F}} M_{n_{ik}}(\mathbb{K}) \mid$$

$$A_{ik} = A_{i'k'}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i',k');$$

$$A_{ik} = A'_{ik} \oplus A''_{ik}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i,k),$$

$$\text{де} \quad A'_{ik}, A''_{ik} \in M_1(\mathbb{K}) \Big\}. \tag{6}$$

Доведемо, що для кожної пари (i,k) існує щонайбільше одна пара (i',k'), для якої $(i,k)\ \rho\ (i',k')$. Припустимо від супротивного: $(i,k)\ \rho\ (i',k')$, $(i,k)\ \rho\ (i'',k'')$ і $(i',k') \neq (i'',k'')$. Якщо $(i',k') = (i,k)$, то $n_{ik} = 2$, і внаслідок умови 4 відношення $(i,k)\ \rho\ (i'',k'')$ неможливе. Тому $n_{ik} = 1$ та $(i,k) \neq (i',k')$. Аналогічно $(i,k) \neq$ $\neq (i'',k'')$. Тоді для деяких j', j'' виконується $d_{ik}^{j'} = d_{i'k'}^{j'} = 1$ і $d_{ik}^{j''} = d_{i''k''}^{j''} = 1$. Внаслідок умови 3 $j' \neq j''$, отже, з рівності (4) $n_{ik} \geqslant d_{ik}^{j'} + d_{ik}^{j''} = 2$ — суперечність.

Знайдемо автоморфізм Σ алгебри $H(\mathcal{O})$, для якого комутативною є діаграма

$$\begin{array}{ccc} H(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\ \Sigma\ } & H(\mathcal{O}) \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ M(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & M(\mathbb{K})\,. \end{array} \tag{7}$$

Нагадаємо, що автоморфізм σ є внутрішнім і задається набором невироджених матриць $S = (S_{ik})_{(i,k)\in\mathbf{F}} \in M(\mathbb{K})$. Для кожної пари $(i,k) \in \mathbf{F}$ виберемо матрицю $T_{ik} \in M_{n_{ik}}(\mathcal{O})$ з властивістю $\overline{T}_{ik} = S_{ik}$. Оскільки S_{ik} невироджена, то $\overline{\det T_{ik}} =$ $= \det \overline{T}_{ik} = \det S_{ik} \neq 0$. Тому $\det T_{ik}$ є оборотним у кільці $\mathcal{O}$, і матриця T_{ik} оборотна в $M_{n_{ik}}(\mathcal{O})$. Покладемо $T_i = \bigoplus_{k=1}^{t_i} T_{ik} \in M_{n_i}(\mathcal{O})$ для кожного $i \in \{1,\ldots,m\}$ та $T = (T_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in H(\mathcal{O})$. Тоді $T_i^{-1} = \bigoplus_{k=1}^{t_i} T_{ik}^{-1}$ і $T^{-1} = (T_i^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m} \in H(\mathcal{O})$. В якості Σ виберемо внутрішній автоморфізм $A \mapsto T^{-1}AT$ алгебри $H(\mathcal{O})$. Комутативність діаграми легко перевірити.

З комутативних діаграм (3) і (7) випливає, що діаграма

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\ \Phi\ } & H(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\ \Sigma\ } & H(\mathcal{O}) \\ {\scriptstyle\pi_H}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ \bar{H} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & M(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & M(\mathbb{K}) \end{array}$$

є комутативною.

Нехай $\Psi = \Sigma\Phi\colon H \simeq H(\mathcal{O})$. З діаграми випливає, що $\pi\Psi = \sigma\varphi\pi_H = \psi\pi_H$. Тому $\pi(\Psi(N)) = \psi(\pi_H(N)) = \psi(\bar{N})$. Оскільки $N \supseteq \operatorname{rad} H$, то $\Psi(N) \supseteq \Psi(\operatorname{rad} H) =$ $= \operatorname{rad} H(\mathcal{O}) = \ker \pi$. Отже, $\Psi(N) = \pi^{-1}(\psi(\bar{N}))$ і з рівностей (6), (2) та визначення π випливає

$$N \simeq \Psi(N) = \Big\{ (A_i) \in \prod_{i=1}^{m} M_{n_i}(\mathcal{O}) \mid A_i = (A_{ikl})_{1\leqslant k,l\leqslant t_i},$$

$$A_{ikl} \in \mathrm{Mat}(n_{ik} \times n_{il}, \mathcal{O});$$

$$A_{ikl} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad k < l;$$

$$A_{ikk} \equiv A_{i'k'k'} \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i',k');$$

$$A_{ikk} \equiv A'_{ik} \oplus A''_{ik} \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i,k),$$

$$\left. \text{де} \quad A'_{ik}, A''_{ik} \in M_1(\mathcal{O}) \right\},$$

де $n_{ik} = 2$, якщо $(i,k)\ \rho\ (i,k)$, і $n_{ik} = 1$ в протилежному випадку.

Для кожної нодальної $\mathcal{O}$-алгебри N' її базисна алгебра N є нодальною, оскільки нодальність зберігається при еквівалентності Моріти. Тоді з $N \simeq \Psi(N)$ випливає, що N' моріта-еквівалентна алгебрі $\Psi(N)$ і тому ізоморфна деякій алгебрі $N(\mathcal{O})$ з умови теореми.

Нодальність алгебри $N(\mathcal{O})$. В цій частині доведення алгебри $N(\mathcal{O})$ і $H(\mathcal{O})$ позначимо літерами N і H відповідно. Далі, $N \subseteq H$ і H — спадкова чисто нетерова $\mathcal{O}$-алгебра, скінченнопороджена як $\mathcal{O}$-модуль [4, 5].

Задамо на множині $\mathbf{F}$ відношення еквівалентності $\approx$ так, що $(i,k) \approx (i',k')$, коли $(i,j) = (i',k')$, або $(i,k)\ \rho\ (i',k')$. Нехай

$$\mathbf{F}' = \big(\mathbf{F} \backslash \{(i,k) \mid (i,k)\ \rho\ (i,k)\}\big) \cup \{(i,k)', (i,k)'' \mid (i,k)\ \rho\ (i,k)\}.$$

Еквівалентність $\approx$ поширимо тривіальним чином на $\mathbf{F}'$ (кожний новий елемент $(i,k)'$ або $(i,k)''$ єдиний у своєму класі еквівалентності) і покладемо $\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}'/\approx$. Будемо ототожнювати одноелементні класи $\alpha \in \widetilde{\mathbf{F}}$ з відповідним елементом. Для кожного $\alpha \in \widetilde{\mathbf{F}}$ покладемо

$$n_\alpha = \begin{cases} n_{ik}, & \text{якщо } \alpha = (i,k), \text{ або } \alpha = \{(i,k), (i',k')\}, \\ n'_{ik}, & \text{якщо } \alpha = (i,k)', \\ n''_{ik}, & \text{якщо } \alpha = (i,k)''. \end{cases}$$

Позначимо через R прямий добуток $\prod_{i=1}^m R_i$, де

$$R_i = \Big\{ A \in M_{n_i}(\mathcal{O}) \mid A = (A_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant t_i}, \quad A_{kl} \in \mathrm{Mat}(n_{ik} \times n_{il}, \mathcal{O});$$

$$\left. A_{kl} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \text{якщо} \quad k \leqslant l \right\}.$$

Нагадаємо, що $\operatorname{rad} H = R$ (також це випливає з міркувань, аналогічних наведеним нижче для N). Епіморфізм $\mathcal{O}$-алгебр $\pi \colon H \to M(\mathbb{K})$, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \mapsto (\overline{A}_{ikk})_{(i,k) \in \mathbf{F}}$ має ядро R і визначає ізоморфізм $\mathcal{O}$-алгебр $\pi_* \colon \bar{H} \simeq M(\mathbb{K})$, де $\bar{H} = H/R$. Обмеження π_* на $\bar{N} = N/R$ дає ізоморфізм $\bar{N} \simeq \pi(N)$. Оскільки $\mathfrak{m}N \subseteq \mathfrak{m}H \subseteq R$, то $\bar{N}$ і $\bar{H}$ є алгебрами над $\mathbb{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, а π_* — ізоморфізм $\mathbb{K}$-алгебр. Маємо

$$\bar{N} \simeq \pi(N) = \Big\{ (A_{ik}) \in \prod_{(i,k) \in \mathbf{F}} M_{n_{ik}}(\mathbb{K}) \mid$$

$$A_{ik} = A_{i'k'}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i',k');$$

$$A_{ik} = A'_{ik} \oplus A''_{ik}, \quad \text{якщо} \quad (i,k)\ \rho\ (i,k),$$

$$\left.\text{де } \ A'_{ik} \in M_{n'_{ik}}(\mathbb{K}), \ \ A''_{ik} \in M_{n''_{ik}}(\mathbb{K})\right\} \simeq \prod_{\alpha \in \widetilde{\mathbf{F}}} M_{n_\alpha}(\mathbb{K}).$$

Доведемо, що $\operatorname{rad} N = R$. Оскільки $\bar{N} \simeq \prod_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{F}}} M_{n_\alpha}(\mathbb{K})$ — напівпроста $\mathbb{K}$-алгебра, то $\operatorname{rad} N \subseteq R$. Для доведення включення $\operatorname{rad} N \supseteq R$ достатньо показати, що кожний елемент множини $1+R$ є оборотним в N. Позначимо через $R_i(\mathbb{K})$ образ ідеалу R_i при стандартному епіморфізмі $M_{n_i}(\mathcal{O}) \to M_{n_i}(\mathbb{K})$. Очевидно,

$$R_i(\mathbb{K}) = \Big\{ A \in M_{n_i}(\mathbb{K}) \mid A = (A_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant t_i}, \ \ A_{kl} \in \operatorname{Mat}(n_{ik}\times n_{il}, \mathbb{K});$$

$$A_{kl} = 0, \ \ \text{якщо} \ \ k \leqslant l \Big\}.$$

Ідеал $R_i(\mathbb{K})$ є нільпотентним — $R_i(\mathbb{K})^{t_i} = 0$. Якщо матриця $A_i \in R_i$, то $\overline{\det(I_{n_i}+A_i)} = \det(I_{n_i} + \overline{A_i}\,) = 1$. Тому $\det(I_{n_i}+A_i)$ є оборотним в $\mathcal{O}$, і матриця $I_{n_i}+A_i$ оборотна в $M_{n_i}(\mathcal{O})$. Далі,

$$\overline{(I_{n_i}+A_i)^{-1}} = (I_{n_i} + \overline{A_i}\,)^{-1} = I_{n_i} + \sum_{j=1}^{t_i-1} (-\overline{A_i}\,)^j \in 1 + R_i(\mathbb{K}),$$

звідки $(I_{n_i}+A_i)^{-1} \in 1 + R_i$. Нехай $A = (A_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in R = \prod_{i=1}^m R_i$. Тоді $1 + A = (I_{n_i}+A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, і за доведеним вище

$$(1+A)^{-1} = ((I_{n_i}+A_i)^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m} \in \prod_{i=1}^m (1+R_i) = 1 + R.$$

Отже, матриці з множини $1+R$ є оборотними і $(1+R)^{-1} = 1 + R \subseteq N$.

Залишилось довести умову (1): $\operatorname{length}_{\bar{N}}(\bar{H} \otimes_{\bar{N}} U) \leqslant 2$ для кожного простого лівого $\bar{N}$-модуля U. Ототожнимо $\mathbb{K}$-алгебри $\bar{H}$ і $\bar{N}$ з їх образами при ізоморфізмі $\pi_* - M(\mathbb{K})$ та $\pi(N)$ відповідно. Набір матриць $(A_{ik})_{(i,k)\in\mathbf{F}} \in \bar{N}$, у якого $A_{ik,ll} = 1$ ($A'_{ik,ll} = 1$ або $A''_{ik,ll} = 1$, якщо $(i,k)\ \rho\ (i,k)$), а всі інші елементи матриць дорівнюють 0, позначимо через e_{ikl} (e'_{ikl} або e''_{ikl} відповідно). Для $\alpha \in \widetilde{\mathbf{F}}$, $l \in \{1,\ldots,n_\alpha\}$ покладемо

$$e_{\alpha l} = \begin{cases} e_{ikl}, & \text{якщо } \alpha = (i,k), \\ e'_{ikl}, & \text{якщо } \alpha = (i,k)', \\ e''_{ikl}, & \text{якщо } \alpha = (i,k)'', \\ e_{ikl} + e_{i'k'l}, & \text{якщо } \alpha = \{(i,k),(i',k')\}. \end{cases}$$

Тоді $1 = \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathbf{F}}} \sum_{l=1}^{n_\alpha} e_{\alpha l}$ — розклад одиниці алгебри $\bar{N}$ в суму ортогональних мінімальних ідемпотентів (мінімальність випливає з ізоморфізму алгебр $e_{\alpha l}\bar{N}e_{\alpha l} \simeq \mathbb{K}$). Оскільки алгебра $\bar{N}$ напівпроста, то кожний простий лівий $\bar{N}$-модуль U

ізоморфний деякому головному простому модулю $\bar{N}e_{\alpha l}$, $\alpha \in \widetilde{\mathbf{F}}$, $1 \leqslant l \leqslant n_\alpha$. Тепер нерівність випливає з ізоморфізмів $\bar{N}$-модулів:

$$\bar{H} \otimes_{\bar{N}} U \simeq \bar{H} \otimes_{\bar{N}} \bar{N}e_{\alpha l} \simeq \bar{H}e_{\alpha l}$$

і

$$\bar{H}e_{\alpha l} \simeq \begin{cases} \bar{N}e_{\alpha l}, & \text{якщо } \ \alpha = (i,k), \\ \bar{N}e'_{ikl} \oplus \bar{N}e''_{ikl}, & \text{якщо } \ \alpha = (i,k)' \ \text{ або } \ \alpha = (i,k)'', \\ 2(\bar{N}e_{\alpha l}), & \text{якщо } \ \alpha = \{(i,k),(i',k')\}. \end{cases}$$

Теорему доведено.

1. *Дрозд Ю. А.* Конечные модули над чисто нетеровыми алгебрами // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 56 – 68. (English transl.: *Drozd Y. A.* Finite modules over pure Noetherian algebras // Proc. Steklov Inst. Math. – 1991. – **183**. – P. 97 – 108.)
2. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**. – P. 46 – 94.
3. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories for nodal rings and projective configurations // Noncommutative Algebra and Geometry. – 2005. – **243**. – P. 23 – 46.
4. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Спадкові порядки // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 3. – С. 246 – 248.
5. *Harada M.* Structure of hereditary orders over local rings // J. Math. Osaka City Univ. – 1963. – **14**. – P. 1 – 22.

Одержано 25.10.10