УДК 517.5

О. Ю. Теплінський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРАНИЧНИЙ АБСОРБУЮЧИЙ ПОЯС ДЛЯ КВАЗІПЕРІОДИЧНО КЕРОВАНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ ВІДРІЗКІВ

For a discontinuous discrete-time dynamical system on a two-dimensional cylinder generated by a quasi-periodically driven interval shift map with overlapping, we prove the existence and uniqueness of a limit half-invariant absorbing belt, whose width is confined in the same bounds as the width of overlapping. In the case of constant overlapping width, this belt is invariant, and the dynamics inside it is equivalent to a skew translation on a two-dimensional torus.

Для разрывной динамической системы с дискретным временем на двумерном цилиндре, порождаемой квазипериодически управляемым отображением сдвига отрезков с перекрытием, доказаны существование и единственность полуинвариантного предельного абсорбирующего пояса, ширина которого содержится в тех же пределах, что и ширина перекрытия. В случае перекрытия постоянной ширины этот пояс является инвариантным, и динамика внутри него эквивалентна косому сдвигу на двумерном торе.

1. Вступ. *Зсув відрізків* (або *інтервальний зсув*) — це розривне відображення певного, скінченного чи нескінченного, проміжку дійсної прямої $\mathbb{R}$ в себе, яке полягає в його розбитті на скінченну кількість підпроміжків і жорсткому зсуві кожного з них на певну відстань. Інакше кажучи, це є одновимірне кусково-афінне відображення таке, що кутовий коефіцієнт кожного з його афінних кусків дорівнює 1. Зсув відрізків є природним узагальненням *перекладення відрізків* (яке можна означити як взаємно однозначний зсув) — добре вивченого класу відображень, що породжує одновимірні динамічні системи з нетривіальними ергодичними властивостями [1]. Динамічні властивості інтервальних зсувів є ще більш складними, і навіть питання про геометрію їхніх граничних множин у загальному вигляді є дуже нетривіальним [2]. У цій статті ми обмежимося вивченням найпростішого випадку зсуву лише двох інтервалів, але додане квазіперіодичне керування (форсинг) перетворює систему на двовимірну, фазовим простором якої є не пряма, а циліндр.

Одним із факторів, що мотивують інтерес до вивчення динаміки інтервальних зсувів і пов'язаних із ними відображень, є стрімкий розвиток цифрової електроніки, який природним чином породжує низку моделей, які, на відміну від моделей відповідних аналогових пристроїв, описуються саме розривними відображеннями, неперервні куски яких діють зі збереженням як міри, так і орієнтації простору (докладніше див. в огляді [3]). В одновимірному випадку таке відображення є нічим іншим як зсувом відрізків. Зауважимо, що з практичної точки зору цікавим є лише випадок глобально дисипативних систем, тобто таких, в яких усі як завгодно далекі траєкторії з часом втягуються до певного обмеженого регіону фазового простору, і вже в цьому „абсорбуючому" регіоні виявляють свою складну динаміку.

Іншою мотивацією до дослідження квазіперіодично керованого інтервального зсуву є інтерес математиків, який розвинувся в останні 10 – 15 років щодо трикутних відображень (косих добутків) з ірраціональним поворотом кола в якості бази. В таких динамічних системах було виявлено досить специфічні ефекти, якто існування дивних нехаотичних атракторів [4]. У неперервному випадку для таких систем було нещодавно доведено аналог теореми Шарковського [5]. Об'єктом дослідження у даній статті фактично є динаміка найпростішого *розривного* трикутного відображення із зазначеною базою. Ми не вивчатимемо властивостей його граничної множини, але доведемо існування та в певному сенсі єдиність граничного поясу, який охоплює цю множину і межі якого задаються неперервними розв'язками певних функціональних рівнянь на колі.

Перейдемо до формального викладу. Спочатку розглянемо просту динамічну систему на $\mathbb{R}$, породжену інтервальним зсувом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x - d_1, & x \geq c, \\ x + d_2, & x < c, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

з дійсними параметрами d_1, d_2 і c. Тут є два проміжки, що зсуваються: $(-\infty, c)$ та $[c, +\infty)$. Динаміку цієї системи легко описати. Якщо $d_1 = 0$ ($d_2 = 0$), то другий (перший) із цих проміжків складається з нерухомих точок. Якщо хоча б одне з чисел d_1 і d_2 є від'ємним, а друге — відмінним від нуля, то всі траєкторії прямують до $+\infty$ або $-\infty$. Єдиним дисипативним, а отже, нетривіальним є випадок, коли $d_1, d_2 > 0$. Дійсно, в цьому випадку на прямій існує множина $B = [c - d_1, c + d_2)$, що є *інваріантною*, тобто $\tilde{f}(B) = B$, і *абсорбуючою*, тобто для кожного початкового значення $x_0 \in \mathbb{R}$ знайдеться таке $N \geq 0$, що $\tilde{f}^n(x_0) \in B$ для всіх $n \geq N$. (Тут і далі для заданого відображення f запис f^n позначає його n-ту ітерацію $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n разів).) Всередині інваріантного абсорбуючого проміжку B відображення $\tilde{f}$ є перекладенням відрізків $[c - d_1, c)$ і $[c, c + d_2)$, і його динаміка є еквівалентною до динаміки жорсткого повороту кола з числом обертання $d_2/(d_1 + d_2)$ (щоб у цьому переконатися, достатньо лише ототожнити між собою кінці півінтервалу B, отримавши коло довжиною $d_1 + d_2$).

Розглянемо тепер цілу однопараметричну сім'ю інтервальних зсувів

$$\tilde{f}_\theta(x) = \begin{cases} x - d_1(\theta), & x \geq c(\theta), \\ x + d_2(\theta), & x < c(\theta), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

в яких значення чисел d_1, d_2 та c залежать від дійсного параметра θ неперервним чином. Цей параметр ми примусимо змінюватися квазіперіодично. Тобто будемо вважати, що $\theta \in \mathbb{T}^1$, де $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — коло одиничної довжини, і динаміка зміни параметра θ визначається поворотом цього кола

$$T(\theta) = \theta + \rho \mod 1, \quad \theta \in \mathbb{T}^1, \tag{1}$$

на певне ірраціональне число обертання $\rho \in (0, 1)$. Отже, динамічну систему в цілому задано на двовимірному циліндрі $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ трикутним відображенням

$$\tilde{F}(\theta, x) = (T\theta, \tilde{f}_\theta(x)), \qquad \theta \in \mathbb{T}^1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Зауваження 1. Замість жорсткого повороту кола можна розглянути будь-який гомеоморфізм, що є топологічно еквівалентним до такого повороту. Зокрема, згідно з теоремою Данжуа, на місці T може стояти довільний C^2-гладкий зберігаючий орієнтацію дифеоморфізм кола з ірраціональним числом обертання ρ. Далі явний вигляд відображення T не будемо використовувати.

Виконавши нескладну заміну змінних

$$(\theta, x) \mapsto (T^{-1}\theta, x - c(\theta)),$$

для відображення (2) отримаємо іншу форму запису, яку нам зручніше буде використовувати, а саме (позначаючи нові змінні знову як θ та x)

$$F(\theta, x) = (T\theta, f_{T\theta}(x)), \qquad \theta \in \mathbb{T}^1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

де інтервальні зсуви задаються виразами

$$f_\theta(x) = x + a(\theta) - b(\theta)\operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

в яких функції $a = \dfrac{1}{2}(d_2 - d_1) + c - c \circ T^{-1}$ та $b = \dfrac{1}{2}(d_2 + d_1)$ неперервно відображають $\mathbb{T}^1$ в $\mathbb{R}$, а функція знаку sgn набуває лише двох значень:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

У подальшому викладі умови на відображення (3) будуть накладатися вже у термінах функцій a та b. Зауважимо, що образи проміжків, що зсуваються відображенням f_θ, перекриваються на ширину $2b(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Множину у фазовому просторі $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, яку можна задати у вигляді $\big\{(\theta, u) \mid u = \phi(\theta), \theta \in M\big\}$, де M — якась підмножина кола $\mathbb{T}^1$, а ϕ — дійсна функція на ній, називатимемо *графіком над* M і позначатимемо тією ж самою літерою ϕ. *Контуром* назвемо графік над суцільним колом $\mathbb{T}^1$. У геометричних описах уявлятимемо фазовий простір як нескінченний циліндр, дійсна вісь якого спрямована вертикально вгору. Отже, кажучи, що над певною множиною $M \subset \mathbb{T}^1$ графік ϕ_1 лежить вище за графік ϕ_2, матимемо на увазі, що $\phi_1(\theta) \geq \phi_2(\theta)$ для кожного $\theta \in M$. Якщо у наведеному випадку $M = \mathbb{T}^1$, то множину, обмежену контурами ϕ_1 та ϕ_2, назвемо *поясом*, а відстань між ними $\phi_1(\theta) - \phi_2(\theta) \geq 0$ — його *шириною* в точці $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Для неперервної функції $\phi\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ визначатимемо її найбільше, найменше і середнє значення $\phi_{\max} = \max_{\theta\in\mathbb{T}^1} \phi(\theta)$, $\phi_{\min} = \min_{\theta\in\mathbb{T}^1} \phi(\theta)$, $\phi_{\text{ave}} = \displaystyle\int_{\mathbb{T}^1} \phi d\mu$ відповідно (тут μ — нормована інваріантна міра, що відповідає гомеоморфізму T; для лінійного повороту (1) це просто міра Лебега). З відомих фактів [1] щодо ергодичності гомеоморфізму кола T випливає, що

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k\theta) \to \phi_{\text{ave}} \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{4}$$

(середнє за часом дорівнює середньому за простором), до того ж збіжність (4) є рівномірною за $\theta \in \mathbb{T}^1$.

2. Граничний абсорбуючий пояс. Уведемо для $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$ позначення

$$\xi_s(t) = \min\{t + s, \max\{t - s, s\}\} = \begin{cases} t - s, & t \geq 2s, \\ s, & 0 \leq t \leq 2s, \\ t + s, & t \leq 0. \end{cases}$$

Дійсна функція ξ двох змінних s та t має наступні важливі властивості: є неперервною; відносно $t \in \mathbb{R}$ — неспадною і задовольняє нерівність нестрогого стискання

$$0 \le \xi_s(t_2) - \xi_s(t_1) \le t_2 - t_1 \quad \text{для} \quad -\infty < t_1 \le t_2 < +\infty, \quad s \ge 0; \tag{5}$$

має симетрію

$$\xi_s(t) + \xi_s(2s - t) \equiv 2s, \quad s \ge 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

і, більш загально, задовольняє нерівність

$$2s_1 \le \xi_{s_2}(t) + \xi_{s_2}(2s_1 - t) \le 2s_2 \quad \text{для} \quad s_2 \ge s_1 \ge 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Якщо $b(\theta) > 0$ для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$, а $|a_{\text{ave}}| < b_{\text{ave}}$, то існує єдиний пояс*

$$B = \left\{ (\theta, x) \,\Big|\, L(\theta) \le x < U(\theta), \theta \in \mathbb{T}^1 \right\},$$

межі якого U та L є неперервними контурами, що задовольняють функціональні рівняння

$$U(\theta) = \xi_{b(\theta)}(U(T^{-1}\theta)) + a(\theta), \tag{8}$$

$$L(\theta) = -\xi_{b(\theta)}(-L(T^{-1}\theta)) + a(\theta) \tag{9}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$. Цей пояс має наступні властивості:

1) *є напівінваріантним відносно F, тобто*

$$F(B) \subset B;$$

2) *його ширина $\Delta(\theta) = U(\theta) - L(\theta)$ знаходиться у межах перекриття образів проміжків, що зсуваються, тобто задовольняє нерівності*

$$2b_{\min} \le \Delta(\theta) \le 2b_{\max}, \quad \theta \in \mathbb{T}^1;$$

3) *абсорбує всі траєкторії в динамічній системі рівномірно на обмежених множинах початкових даних, тобто для кожного $C > 0$ існує таке натуральне $N = N(C)$, що з нерівності $|x_0| \le C$ випливає включення $F^n(\theta_0, x_0) \in B$ для всіх $n \ge N$, $\theta_0 \in \mathbb{T}^1$;*

4) *межові контури U та L складаються з частин скінченної кількості кривих, заданих формулами*

$$C_1^+ \colon x = a(\theta) + b(\theta), \qquad C_1^- \colon x = a(\theta) - b(\theta), \tag{10}$$

$$C_n^+ = F(C_{n-1}^+), \qquad C_n^- = F(C_{n-1}^-), \quad n \ge 2. \tag{11}$$

Доведення. План доведення є таким: спочатку конструктивно будуємо пояс B, межі якого є неперервними і задовольняють співвідношення (8) та (9), потім для нього послідовно доводимо властивості 1–4 і наприкінці (з використанням доведених властивостей побудованого поясу) показуємо, що інших неперервних контурів, які задовольняють (8) та (9), не існує.

У першій частині доведення буде побудовано послідовність напівінваріантних поясів

$$B_n = \left\{ (\theta, x) \,\big|\, L_n(\theta) \le x < U_n(\theta) \right\}, \quad n \ge 1,$$

з неперервними межами U_n та L_n шляхом індуктивної процедури.

Розглянемо розклад числа обертання у *ланцюговий дріб* [6]:

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \in (0,1). \tag{12}$$

Оскільки за припущенням число ρ є ірраціональним, то послідовність натуральних *неповних часток* k_n, $n \geq 1$, у дробі (12) є нескінченною і визначається однозначно. Нескінченна послідовність *раціональних наближень* $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ прямує до ρ при $n \to +\infty$. Взаємопрості натуральні числа p_n та q_n, $n \geq 1$, задовольнять рекурентні співвідношення $p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}$, де для зручності покладено $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ та $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Раціональні наближення p_n/q_n наближаються до ірраціонального числа ρ почергово з двох боків:

$$0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \rho < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \leq 1. \tag{13}$$

Відповідним чином для гомеоморфізму кола T з числом обертання ρ, якщо відмічено певну точку $\theta^* \in \mathbb{T}^1$, її *динамічні наближення* $T^{q_n}\theta^*$ розташовані на колі у наступному циклічному порядку:

$$T^{q_0}\theta^* \leq T^{q_1}\theta^* < T^{q_3}\theta^* < \ldots < T^{q_{2m-1}}\theta^* < \theta^* < T^{q_{2m}}\theta^* < \ldots < T^{q_2}\theta^* < T^{q_0}\theta^*. \tag{14}$$

Також наслідком комбінаторного сенсу розкладу числа ρ у ланцюговий дріб є наступний факт: набір напіввідкритих дуг $\{T^k I_1 \mid 0 \leq k < q_{2m}\} \cup \{T^n I_2 \mid 0 \leq n < q_{2m-1}\}$, де $I_1 = [T^{q_{2m-1}}\theta^*, \theta^*)$, $I_2 = [\theta^*, T^{q_{2m}}\theta^*)$, є диз'юнктним розбиттям кола $\mathbb{T}^1$, тобто покриває його цілком і без перекриттів. При цьому $I_1 \cup I_2 = T^{q_{2m-1}} I_2 \cup T^{q_{2m}} I_1 = [T^{q_{2m-1}}\theta^*, T^{q_{2m}}\theta^*)$. Це означає, що $T^{q_{2m}}$ на I_1 та $T^{q_{2m-1}}$ на I_2 є нічим іншим як двома неперервними компонентами відображення першого повернення траєкторій (яке ще називають перерізом Пуанкаре) гомеоморфізму T на проміжок $I = [T^{q_{2m-1}}\theta^*, T^{q_{2m}}\theta^*)$.

З нерівності $|a_{\text{ave}}| < b_{\text{ave}}$ і ергодичної властивості (4) випливає існування такого $N \geq 1$, що для всіх $n \geq N$ та $\theta \in \mathbb{T}^1$ виконується оцінка

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a(T^k\theta) \right| < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b(T^k\theta),$$

а отже, мають місце нерівності

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-b(T^k\theta) + a(T^k\theta)) < 0 < \sum_{k=0}^{n-1} (b(T^k\theta) + a(T^k\theta)). \tag{15}$$

З огляду на викладене вище зафіксуємо довільну точку $\theta^* \in \mathbb{T}^1$, таке досить велике натуральне m, що $q_{2m-1} \geq N$, а також досить велике дійсне число

$$A > (2q_{2m} - 1)(b_{\max} + \max_{\theta \in \mathbb{T}^1} |a(\theta)|) + 2b_{\max} \tag{16}$$

і розглянемо у фазовому просторі $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ графіки $J_1^* = I_1 \times \{A\}$ та $J_2^* = I_2 \times \{A\}$.

Відповідно до нашої конструкції, перше повернення точок на I під дією T відбувається після не менш ніж N ітерацій, отже, графіки $F^{q_{2m}}(J_1^*)$ та $F^{q_{2m-1}}(J_2^*)$ лежать строго нижче за графік $I \times \{A\} = J_1^* \cup J_2^*$ внаслідок (15). Тепер виберемо довільним чином такі неперервні графіки J_1 над I_1 та J_2 над I_2, що з'єднують послідовно точки $F^{q_{2m-1}}(\theta^*, A)$, (θ^*, A) та $F^{q_{2m}}(\theta^*, A)$ і лежать строго між $I \times \{A\}$ та $F^{q_{2m}}(J_1^*) \cup F^{q_{2m-1}}(J_2^*)$. Як неважко переконатися, множина

$$U_1 = \bigcup_{n=0}^{q_{2m}-1} F^n(J_1) \bigcup_{n=0}^{q_{2m-1}-1} F^n(J_2)$$

є неперервним контуром, який внаслідок (16) лежить вище за контур $2b_{\max}$. Контур $F(U_1)$ збігається з U_1 над $\mathbb{T}^1 \backslash I$ і лежить нижче за U_1 над I. Аналогічно, використовуючи $-A$ замість A, отримуємо неперервний контур L_1, що лежить нижче за $-2b_{\max}$, при цьому контур $F(L_1)$ збігається з L_1 над $\mathbb{T}^1 \backslash I$ і лежить вище за L_1 над I. Таким чином, щойно побудований пояс B_1 з неперервними межами U_1 та L_1 насправді є напівінваріантним, і його ширина $\Delta_1(\theta) = U_1(\theta) - L_1(\theta) > 4b_{\max} >$ $> 2b_{\min}$ для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Прослідкувавши за дією відображення F (в усіх випадках, що з'являються), можна бачити, що

$$-\xi_{b(\theta)}(-x') + a(\theta) \le f_\theta(x) < \xi_{b(\theta)}(x'') + a(\theta) \quad \text{для} \quad x' \le x < x'', \quad \theta \in \mathbb{T}^1. \tag{17}$$

Для $n \ge 1$ та $\theta \in \mathbb{T}^1$ покладемо

$$U_{n+1}(\theta) = \xi_{b(\theta)}(U_n(T^{-1}\theta)) + a(\theta), \tag{18}$$

$$L_{n+1}(\theta) = -\xi_{b(\theta)}(-L_n(T^{-1}\theta)) + a(\theta) \tag{19}$$

і покажемо індукцією по n, що контури U_n та L_n є неперервними, відстань між ними $\Delta_n(\theta) = U_n(\theta) - L_n(\theta)$ є не меншою за $2g_{\min}$ і

$$U_n(\theta) \ge U_{n+1}(\theta) > L_{n+1}(\theta) \ge L_n(\theta)$$

для кожного $n \ge 1$ та $\theta \in \mathbb{T}^1$. База індукції ($n = 1$) виконується згідно з проведеною вище побудовою поясу B_1. Неперервність U_n та L_n обумовлює таку саму властивість для U_{n+1} та L_{n+1}, оскільки ξ, b та a в (18) та (19) є неперервними функціями. З нерівності $U_{n+1} \le U_n$ випливає, що $U_{n+2} \le U_{n+1}$ згідно з (18), оскільки функція ξ є неспадною; відповідний факт також має місце для L. Зрештою, ширина $\Delta_{n+1}(\theta) = \xi_{b(\theta)}(U_n(T^{-1}\theta)) + \xi_{b(\theta)}(-L_n(T^{-1}\theta)) \ge$ $\ge \xi(U_n(T^{-1}\theta)) + \xi(2b_{\min} - U_n(T^{-1}\theta)) \ge 2b_{\min}$, $\theta \in \mathbb{T}^1$. (Тут ми використали послідовно (18) та (19); (5) та припущення індукції у вигляді $\Delta_n(T^{-1}\theta) \ge 2b_{\min}$; насамкінець (7).) Тепер пояси B_n, $n \ge 1$, є коректно означеними. Нерівність (17) разом із (18) та (19) доводить, що $F(B_n) \subset B_{n+1}$ для кожного $n \ge 1$.

Монотонні обмежені послідовності функцій $\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$ та $\{L_n\}_{n=1}^{+\infty}$ мають поточкові границі

$$U(\theta) = \lim_{n \to +\infty} U_n(\theta), \qquad L(\theta) = \lim_{n \to +\infty} L_n(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{T}^1.$$

Контури U та L обмежують граничний пояс B. Граничний перехід у (18), (19) при $n \to +\infty$ дає співвідношення (8), (9) для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$, що й завершує першу частину доведення.

Припустимо, що верхній межовий контур U не є неперервним. Це означає, що в якійсь точці $\bar{\theta} \in \mathbb{T}^1$ функція U має ненульовий стрибок:

$$\operatorname{jmp} U(\bar{\theta}) = \limsup_{\theta \to \bar{\theta}} U(\theta) - \liminf_{\theta \to \bar{\theta}} U(\theta) = c > 0.$$

Внаслідок властивості стискання (5) разом із (8) маємо нерівність

$$\operatorname{jmp} U(\theta) \leq \operatorname{jmp} U(T^{-1}\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^1.$$

Отже, $\operatorname{jmp} U(T^{-n}\bar{\theta}) \geq c$ для кожного $n \geq 0$. Нехай $U_{\min} = \inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} U(\theta)$. Знайдеться точка $\tilde{\theta} \in \mathbb{T}^1$ така, що $U(\tilde{\theta}) < m + c$, а отже, $U_k(\tilde{\theta}) < m + c$ для певного натурального k. Оскільки контур U_k неперервний, нерівність $U_k(\theta) < m + c$ виконується в деякому околі $\theta \in (\tilde{\theta} - \epsilon, \tilde{\theta} + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, а отже, в цьому околі маємо $m \leq U(\theta) < m + c$, звідки $\operatorname{jmp} U(\theta) < c$. Але ж множина $\{T^{-n}\bar{\theta} \,|\, n \geq 0\}$ є скрізь щільною на $\mathbb{T}^1$, зокрема $T^{-\tilde{n}}\bar{\theta} \in (\tilde{\theta} - \epsilon, \tilde{\theta} + \epsilon)$ для певного натурального $\tilde{n}$, і, згідно з викладеним вище, $\operatorname{jmp} U(T^{-\tilde{n}}\bar{\theta}) \geq c$. Дана суперечність показує, що контур U є неперервним. Неперервність L доводиться аналогічно.

Доведемо тепер, що побудований пояс B задовольняє твердження 1 – 4 теореми. Одразу зазначимо, що

$$\Delta(\theta) = \lim_{n \to +\infty} \Delta_n(\theta) \geq 2b_{\min} > 0, \quad \theta \in \mathbb{T}^1. \tag{20}$$

Нерівність (17) разом із (8) та (9) доводить твердження 1.

Якби для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$ виконувалася нерівність $U(\theta) \leq 0$, то з (8) випливала б рівність $U(\theta) = U(T^{-1}\theta) + a(\theta) + b(\theta)$ для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$, а тому і $U_{\text{ave}} = U_{\text{ave}} + a_{\text{ave}} + b_{\text{ave}}$, що є неможливим внаслідок умови теореми $|a_{\text{ave}}| < b_{\text{ave}}$. Аналогічно, не може для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$ виконуватися нерівність $U(\theta) \geq 2b(T\theta)$, бо інакше з (8) випливатиме $U(T\theta) = U(\theta) + a(T\theta) - b(T\theta)$ для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$, а отже, $U_{\text{ave}} = U_{\text{ave}} + a_{\text{ave}} - b_{\text{ave}}$, що є неможливим внаслідок умови теореми $|a_{\text{ave}}| < b_{\text{ave}}$. Оскільки з двох неперервних контурів 0 та $2b \circ T$ (тобто $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ та $\{(\theta, 2b(T\theta)) \,|\, \theta \in \mathbb{T}^1\}$) другий лежить строго вище за перший, а контур U теж неперервний, то з викладеного випливає існування такої замкненої дуги $I_U \subset \mathbb{T}^1$ ненульової довжини, що над нею контур U лежить строго між 0 та $2b \circ T$, тобто для кожного $\theta \in I_U$ виконуються нерівності $0 < U(\theta) < 2b(T\theta)$.

Введемо до розгляду неперервну функцію $l(\theta) = \max\{\Delta(\theta), 2b_{\max}\}$, $\theta \in \mathbb{T}^1$. У випадку, коли $\Delta(T^{-1}\theta) \geq 2b(\theta)$,

$$\begin{aligned} \Delta(\theta) &= \xi_{b(\theta)}(U(T^{-1}\theta)) + \xi_{b(\theta)}(-L(T^{-1}\theta)) = \\ &= \xi_{b(\theta)}(U(T^{-1}\theta)) - \xi_{b(\theta)}(2b(\theta) + L(T^{-1}\theta)) + 2b(\theta) \leq \\ &\leq U(T^{-1}\theta) - (2b(\theta) + L(T^{-1}\theta)) + 2b(\theta) = \Delta(T^{-1}\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^1, \end{aligned} \tag{21}$$

внаслідок (8), (9), (6) та (5). У випадку $\Delta(T^{-1}\theta) \leq 2b(\theta)$ замість (21) маємо

$$\Delta(\theta) = \xi_{b(\theta)}(U(T^{-1}\theta)) - \xi_{b(\theta)}(2b(\theta) + L(T^{-1}\theta)) + 2b(\theta) \leq 2b(\theta)$$

внаслідок неспадності $\xi_{b(\theta)}$, отже, в обох випадках виконується нерівність

$$l(\theta) \leq l(T^{-1}\theta). \tag{22}$$

Знайдеться $\alpha \in \mathbb{T}^1$ таке, що $l(\alpha) = l_{\max}$. Внаслідок (22) і згідно з вибором α маємо $l(T^{-n}\alpha) = l_{\max}$ для всіх $n \geq 0$. Оскільки множина $\{T^{-n}\alpha \,|\, n \geq 0\}$ є скрізь щільною на $\mathbb{T}^1$, а функція l неперервна, то звідси випливає $l(\theta) = l_{\max}$ для всіх $\theta \in \mathbb{T}^1$, тобто насправді l є сталою. Припустимо, що $l > 2b_{\max}$. Тоді за означенням цієї величини робимо висновок, що ширина Δ також є сталою (і дорівнює l). Легко перевірити, що нерівність (5) перетворюється на строгу у випадку, коли $0 < t_2 < 2s$ і $t_1 < t_2$, внаслідок чого нерівність (21) у випадку $T^{-1}\theta \in I_U$ стає строгою, а це суперечить висновку, що Δ є сталою. Отже, $l = 2b_{\max}$, звідки $\Delta(\theta) \leq 2b_{\max}$ для будь-якого $\theta \in \mathbb{T}^1$, а це разом із (20) доводить твердження 2.

Щоб довести твердження 3, зазначимо, що для будь-яких $\theta \in \mathbb{T}^1$, $d \geq 0$ можна записати рівність

$$f_\theta(U(T^{-1}\theta) + d) = U(\theta) + d',$$

де

$$d - d' = \begin{cases} 2b(\theta) \quad \text{для} \quad U(T^{-1}\theta) < 0 \leq U(T^{-1}\theta) + d, \\ 0 \quad \text{для} \quad U(T^{-1}\theta) + d < 0 \quad \text{або} \quad U(T^{-1}\theta) \geq 2b(\theta), \\ 2b(\theta) - U(T^{-1}\theta) \quad \text{для} \quad 0 \leq U(T^{-1}\theta) \leq 2b(\theta). \end{cases}$$

В усіх випадках $d - d' \geq 0$. Для довільної точки (θ, x), $\theta \in I_U$, яка лежить на відстані $d \geq 0$ над поясом B, ця відстань під дією F зменшиться на $d - d' \geq$ $\geq \min_{\theta \in I_U}\{2b(T\theta) - U(\theta)\} = \delta_U > 0$. Існує таке натуральне N_U, що для будь-якого $\theta \in \mathbb{T}^1$ перетин $\{T^k\theta\}_{k=1}^{N_U} \cap I_U$ є непорожнім (оскільки скінченна кількість прообразів будь-якої дуги під дією T покриває все коло $\mathbb{T}^1$). Крім того, точка не може під дією F перестрибнути через пояс B згори донизу, не потрапивши всередину (щоб у цьому переконатись, досить покласти $x' = U(T^{-1}\theta)$ в нерівності (17) і порівняти її ліву частину з $L(\theta)$ з огляду на (9) і неспадність $\xi_{b(\theta)}$). Отже, після щонайбільше $N_U d/\delta_U$ ітерацій всі точки, що знаходилися на відстані не більше ніж d над поясом B, потраплять всередину B. Аналогічним чином знаходимо дугу I_L кола, числа N_L, δ_L і одержуємо, що після не більш ніж $N_L d/\delta_L$ ітерацій всі точки, що знаходилися на відстані не більше ніж d під поясом B, потраплять всередину B. З цього випливає твердження 3.

Покажемо нарешті, що межі U та L поясу B складаються з частин скінченної кількості ліній (10) та (11). З формули (8) випливає, що $U \subset F(U) \cup C_1^+$ і, зокрема, над дугою TI_U має місце рівність $U = C_1^+$. Отже, простими індуктивними міркуваннями доводимо, що для кожного $n \geq 1$ над $\bigcup_{k=1}^n T^k I_U$ виконується включення $U \subset \bigcup_{k=1}^n C_k^+$. Оскільки $\bigcup_{k=1}^{N_U} T^k I_U = \mathbb{T}^1$, то $U \subset \bigcup_{k=1}^{N_U} C_k^+$ і аналогічно $L \subset \bigcup_{k=1}^{N_L} C_k^-$, що разом доводить твердження 4.

Залишилося довести єдиність неперервних розв'язків функціональних рівнянь (8) та (9). Припустимо, що існує відмінний від U неперервний контур $\tilde{U}$, який також задовольняє співвідношення (8). Розглянемо точку $\theta_* \in \mathbb{T}^1$, в якій $\tilde{U}(\theta_*) \neq U(\theta_*)$. Нехай, для визначеності, $\tilde{U}(\theta_*) > U(\theta_*)$ (у протилежному випадку доведення аналогічне). Тоді над якимось околом точки θ_* — дугою I_* — має місце строга нерівність $\tilde{U} > U$. З рівності $\tilde{U}(\theta) - U(\theta) = \xi_{b(\theta)}(\tilde{U}(T^{-1}\theta)) - \xi_{b(\theta)}(U(T^{-1}\theta))$ і властивості (5) випливає, що нерівність $\tilde{U} > U$ має місце і над прообразом $T^{-1}I_*$, а отже (знову ж оскільки скінченна кількість прообразів будь-якої дуги під дією T покриває все коло $\mathbb{T}^1$), нерівність $\tilde{U} > U$ виконується скрізь над $\mathbb{T}^1$. Таким чином, на всьому колі виконується нерівність $\tilde{U}(\theta) - U(\theta) \leq \tilde{U}(T^{-1}\theta) - U(T^{-1}\theta)$, до того ж для $\theta \in I_U$ вона є строгою. Інтегруючи, дістаємо суперечність: $\tilde{U}_{\text{ave}} - U_{\text{ave}} < < \tilde{U}_{\text{ave}} - U_{\text{ave}}$. Для контуру L доведення аналогічне.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Функціональні рівняння (8) та (9) на колі $\mathbb{T}^1$ є подібними до відомого *гомологічного рівняння*, властивості загальних розв'язків якого вивчалися в 70-ті роки [7, 8]. Розвинувши ідею останньої частини доведення теореми 1, неважко переконатися, що за її умов кожний розв'язок рівняння (8) або не є вимірним на жодній підмножині додатної міри, або збігається з неперервним майже скрізь.

Зауваження 3. Поведінка траєкторій всередині напівінваріантного абсорбуючого поясу B може бути досить складною і важко піддається опису. Не виключено, що гранична множина $\Omega = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{F^k(B)}$ у загальному випадку може бути дивним нехаотичним атрактором [4].

На окрему увагу заслуговує випадок, коли ширина перекриття є сталою, тобто $b(\theta) \equiv b > 0$. Наступне твердження було використано у прикладній роботі [9] з дослідження поширеного радіоелектронного пристрою — сигма-дельта-модулятора.

Наслідок. *Якщо величина перекриття $b > 0$ не залежить від θ, то абсорбуючий пояс B є інваріантним, тобто $F(B) = B$, а його ширина є сталою*: $\Delta(\theta) \equiv 2b$. *Якщо ідентифікувати між собою точки $(\theta, U(\theta))$ та $(\theta, L(\theta))$ фазового простору для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$, то обмеження відображення F на зімкнений таким чином пояс B є косим зсувом на двовимірному торі.*

Доведення. Те, що $\Delta(\theta) \equiv 2b$, випливає безпосередньо з пункту 2 теореми 1. Отже, маємо

$$U(\theta) = L(\theta) + 2b, \quad \theta \in \mathbb{T}^1.$$

Вияснимо, як діє f_θ на проміжок $S = [L(T^{-1}\theta), U(T^{-1}\theta))$, що має довжину $2b$. Якщо $0 \notin (L(T^{-1}\theta), U(T^{-1}\theta))$, то f_θ зсуває цей проміжок цілком на певну відстань. У протилежному випадку проміжок S ділиться точкою 0 на два проміжки: $S_1 = [L(T^{-1}\theta), 0)$ та $S_2 = [0, U(T^{-1}\theta))$, перший з яких зсувається на $a(\theta) + b$, а другий — на $a(\theta) - b$. Оскільки різниця між зсувами дорівнює $2b$, то об'єднання $f_\theta(S_1) \cup f_\theta(S_2)$ є знову ж таки цілим напіввідкритим проміжком довжини $2b$. В обох випадках множина $f_\theta(S)$ є цілим напіввідкритим проміжком довжини $2b$, а внаслідок пункту 1 теореми 1 вона є підмножиною проміжку $[L(\theta), U(\theta))$ тої ж самої довжини. Тому $f_\theta(S) = [L(\theta), U(\theta))$ для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$, тобто пояс B дійсно є інваріантним.

Якщо перетворити B на топологічний двовимірний тор, для кожного $\theta \in \mathbb{T}^1$ ідентифікувавши між собою точки $(\theta, U(\theta))$ та $(\theta, L(\theta))$ фазового простору $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, то легко переконатися, що бієкція $\psi\colon B \to \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, задана таким чином:

$$\psi(\theta, x) = \left(\theta, \frac{1}{2b}(x - L(\theta))\right),$$

є гомеоморфізмом, який спрягає відображення F із косим зсувом $\tilde{F}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданим як

$$\tilde{F}\colon (\theta,\omega) \mapsto \left(T\theta,\, \omega + \frac{1}{2b}(a(T\theta) + L(\theta) - L(T\theta)) + \frac{1}{2} \mod 1\right),$$

у сенсі

$$\psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \psi = F.$$

Наслідок доведено.

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
2. *Boshernitzan M., Kornfeld I.* Interval translation mappings // Erg. Theory and Dynam. Syst. – 1995. – **15**, № 5. – P. 821 – 832.
3. *Теплінський О. Ю.* Відображення зсуву інтервалів як об'єднавчий підхід до вивчення динаміки ряду моделей дискретизованих електронних пристроїв // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 40 – 45.
4. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A.* Strange attractors that are not chaotic // Physica D. – 1984. – **13**, № 1-2. – P. 261 – 268.
5. *Fabbri R., Jager T., Johnson R., Keller R.* A Sharkovskii-type theorem for minimally forced interval maps // Top. Meth. Nonlinear Anal. – 2005. – **26**, № 1. – P. 163 – 188.
6. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1960. – 112 с.
7. *Аносов Д. В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 6. – С. 1259 – 1274.
8. *Корнфельд И. П.* Об аддитивном гомологическом уравнении // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 2. – С. 73 – 74.
9. *Teplinsky A., Condon E., Feely O.* Driven interval shift dynamics in sigma-delta modulators and phase-locked loops // IEEE Trans. Circuits and Syst. Pt I. – 2005. – **52**, № 6. – P. 1224 – 1235.

Одержано 11.03.08