

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ МЕЛКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИ ИХ ПОВЕРХНОСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

We study the asymptotic behavior of solutions of the problem describing small motions of viscous incompressible fluid filling the domain Ω with a large number of suspended small solid interacting particles concentrated in a small neighborhood of some smooth surface $\Gamma \subset \Omega$. We prove that, under certain conditions, the limit of these solutions satisfies the original equations in the domain $\Omega \setminus \Gamma$ together with some homogenized boundary conditions (conjugation conditions) on Γ .

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків задачі, що описує малі рухи в'язкої нестисливої рідини, яка заповнює об'єм Ω , з великою кількістю змунених у ній дрібних твердих взаємодіючих частинок, що концентруються у малому околі деякої гладкої поверхні $\Gamma \subset \Omega$. Доведено, що при певних умовах границя цих розв'язків задовольняє вихідні рівняння в області $\Omega \setminus \Gamma$ та деякі усереднені крайові умови типу умов спряження на Γ .

1. Введение. В данной работе изучается асимптотическое поведение решений линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса, описывающей нестационарные малые колебания вязкой несжимаемой жидкости в объеме с мелкими твердыми частицами, расположенными вблизи некоторой плоскости. Предполагается, что частицы взаимодействуют между собой посредством упругих сил.

Подобные задачи возникают при изучении транспортировки жидкостей в различных контейнерах. Для демпфирования колебаний жидкости используются различные перегородки с дырками, сетки и т. д. (см. [1 – 4]). Так, в работе [4] показано, что перегородки с густо расположенными мелкими дырками вызывают уменьшение частот колебаний идеальной жидкости. Метод расчета колебаний жидкости в объемах с перегородками основывается на использовании эффективных граничных условий, эквивалентных действию перегородки.

Задача, рассматриваемая в данной работе, описывает колебания вязкой жидкости в области с упругой системой, действие которой подобно перегородкам. Предполагается, что эта система образована маленькими твердыми шарообразными частицами, взаимодействующими между собой посредством упругих сил (например, пружин). Основной результат состоит в установлении эффективных граничных условий на поверхности, вблизи которой располагаются частицы. Используя такие условия, можно изучить возмущение частот колебаний жидкости, что предполагается сделать в следующей работе.

Оказывается, что вид этих условий существенно зависит от соотношения между размерами частиц и средними расстояниями между ними (в случае критически малого размера частиц вид этих условий качественно меняется). Для вывода эффективных граничных условий изучается асимптотическое поведение малых колебаний жидкости с частицами, когда средние расстояния между частицами и их размеры стремятся к нулю. Показывается, что главный член асимптотики описывается исходными уравнениями Навье – Стокса с эффективными граничными условиями на плоскости, вблизи которой расположены частицы.

В данной работе применяется вариационный метод, развитый в работах [5–7] при изучении задач о малых колебаниях ньютоновской жидкости с взаимодействующими частицами, распределенными внутри всего объема, занятого жидкостью. Такие задачи, как правило, возникают при моделировании поведения неньютоновских жидкостей (см. также [8–11]).

Опишем кратко содержание работы. В п. 2 дается постановка задачи и формулируется основной результат. В п. 3 вводится локальная энергетическая характеристика упругой системы, образованной взаимодействующими частицами. В пп. 4, 5 доказывается основная теорема, а в п. 6 коэффициенты в эффективном граничном условии вычисляются в явном виде для случая периодического расположения частиц.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с гладкой границей. Предположим, что эта область заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Пусть, кроме того, в сколь угодно малой окрестности некоторой поверхности Γ внутри этой области содержится большое число $N^\varepsilon = \varepsilon^{-2}$ малых шарообразных твердых тел Q_ε^i , ограниченных сферами $S_\varepsilon^i = \partial Q_\varepsilon^i$, $i = 1, 2, \dots, N^\varepsilon$. Параметр ε характеризует микроструктуру смеси таким образом, что расстояния между ближайшими частицами имеют порядок ε , а радиусы частиц — порядок ε^α , $1 \leq \alpha \leq 2$. Поскольку тела имеют малый размер, будем называть их частицами. Положения частиц $Q_\varepsilon^i \in \Omega$ определяются векторами $\underline{x}_\varepsilon^i$ их центров. Предположим, что частицы взаимодействуют между собой благодаря центральным силам и векторы $\underline{x}_\varepsilon^i$ соответствуют положению равновесия, определяемому минимумом потенциальной энергии взаимодействия, т. е. $H_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) = \min H_\varepsilon(\underline{x}^i)$.

Энергия взаимодействия состоит из сумм взаимодействий центров частиц $\underline{x}_\varepsilon^i \in Q_\varepsilon^i$ и $\underline{x}_\varepsilon^j \in Q_\varepsilon^j$. Таким образом, энергия взаимодействия частиц в окрестности положения равновесия определяется равенством

$$H_\varepsilon(\underline{u}^i) = H_\varepsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \langle C_\varepsilon^{ij} [\underline{u}^i - \underline{u}^j], [\underline{u}^i - \underline{u}^j] \rangle, \quad (2.1)$$

где $\underline{u}^i = \underline{x}^i - \underline{x}_\varepsilon^i$ — смещения частиц, C_ε^{ij} — симметричная положительная матрица взаимодействия (см. далее), скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^3 .

Предположим также, что некоторые частицы Q_ε^j совпадают с частями $\partial\Omega_\varepsilon^j$ неподвижной границы $\partial\Omega$, а соответствующие смещения $\underline{u}_\varepsilon^j$ равны нулю (в силу краевого условия на $\partial\Omega$). Тогда система частиц имеет единственное положение равновесия $\{\underline{x}_\varepsilon^i\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$.

Введем такие обозначения: $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N^\varepsilon} Q_\varepsilon^i$ — область, заполненная жидкостью; ρ — удельная плотность жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; ρ_s — удельная плотность вещества частиц; $m_\varepsilon^i = \rho_s |Q_\varepsilon^i|$ — масса частицы Q_ε^i ; $\underline{\theta}_\varepsilon^i$ — вектор угла поворота частицы Q_ε^i ; r_ε^i — радиус частицы Q_ε^i ; $I_\varepsilon^i = \frac{2}{5} m_\varepsilon^i (r_\varepsilon^i)^2$ — момент инерции частицы Q_ε^i .

Тогда линеаризованная система уравнений, описывающих малые нестационарные движения жидкости с твердыми частицами, имеет вид

$$\rho \frac{\partial \underline{v}_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v}_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \operatorname{div} \underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\underline{v}_\varepsilon = \dot{\underline{u}}_\varepsilon^i + \dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \quad \text{на частицах,} \quad (2.3)$$

$$m_\varepsilon^i \ddot{\underline{u}}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \underline{\nu} ds = -\nabla_{\underline{u}^i} H_\varepsilon, \quad (2.4)$$

$$I_\varepsilon^i \ddot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \times \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \underline{\nu} ds = -\nabla_{\underline{\theta}^i} H_\varepsilon (\equiv 0), \quad (2.5)$$

где $\underline{v}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ – скорость жидкости, $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\underline{x}, t)$ – давление, $\underline{u}_\varepsilon^i$ – смещение центра i -й частицы, $\dot{\underline{u}}_\varepsilon^i = \frac{d\underline{u}_\varepsilon^i}{dt}$ – скорость центра i -й частицы, $\ddot{\underline{u}}_\varepsilon^i = \frac{d^2\underline{u}_\varepsilon^i}{dt^2}$ – ускорение центра i -й частицы и $\dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i$ – мгновенная угловая скорость i -й частицы. Через $\underline{\nu}$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к сфере S_ε^i , а через $\sigma[\underline{v}_\varepsilon]$ – тензор напряжений в жидкости. Компоненты этого тензора определяются как $\sigma[\underline{v}_\varepsilon]_{ij} = \mu \left[\frac{\partial v_{\varepsilon i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_i} \right] - p_\varepsilon \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Энергия взаимодействия H_ε определяется в соответствии с формулой (2.1).

Система (2.2)–(2.5) дополняется начальными условиями

$$\begin{aligned} \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, 0) &= \underline{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ \underline{u}_\varepsilon^i(0) &= \underline{0}, \quad \dot{\underline{u}}_\varepsilon^i(0) = \underline{u}_{\varepsilon 1}^i, \quad \underline{\theta}_\varepsilon^i(0) = \underline{0}, \quad \dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i(0) = \underline{\theta}_{\varepsilon 1}^i \end{aligned} \quad (2.6)$$

и краевым условием на $\partial\Omega$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (2.7)$$

Существует единственное решение $\{v_\varepsilon(\underline{x}), \underline{u}_\varepsilon^i, \underline{\theta}_\varepsilon^i, i = 1, 2, \dots, N^\varepsilon\}$ задачи (2.2)–(2.7). Основной целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Как уже отмечалось, предполагается, что радиусы частиц имеют порядок ε^α , $1 \leq \alpha \leq 2$. Оказывается, что в случае частиц некритического размера ($1 \leq \alpha < 2$) частицы движутся как бы „вливая” в несущую жидкость (средние скорости частиц и жидкости оказываются равными), а в случае частиц критического размера ε^2 (частицы меньшего размера не оказывают влияния на жидкость) жидкость с частицами движется в режиме фильтрации (средние скорости частиц и жидкости оказываются различными). Приведем теперь качественную формулировку основного результата.

В случае частиц некритического размера предельное поведение жидкости с частицами описывается системой

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v} = \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \left[\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right]_+^- = \\ & = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \int_0^t a_{1pqr}(\underline{x}, t - \tau) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \tau)] d\tau \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right]_+^- =$$

$$= \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \int_0^t a_{2pqr}(\underline{x}, t - \tau) e_{qr} [v(\underline{x}, \tau)] d\tau \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (2.11)$$

$$2\mu \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_+^- = [p]_+^-, \quad [v]_+^- = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (2.12)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2.13)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, 0) = v_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (2.14)$$

В случае частиц критического размера предельное поведение жидкости с частицами описывается системой

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v = \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.16)$$

$$\left[\sigma_{n3}[v] \right]_+^- = C(\underline{x})(w_n - v_n), \quad n = \overline{1, 2}, \quad (2.17)$$

$$2\mu \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_+^- = [p]_+^-, \quad [v]_+^- = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0,$$

$$\sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ b_{npqr}(\underline{x}) e_{qr} \left[\int_0^t w(\underline{x}, \tau) d\tau \right] \right\} =$$

$$= C(\underline{x})(w_n - v_n), \quad n = \overline{1, 2}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (2.18)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, 0) = v_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (2.20)$$

где $[\bullet]_+^-$ обозначает скачок функции на поверхности Γ при переходе из области Ω^- в область Ω^+ , $\{a_{npqr}(\underline{x}, t)\}_{n,p,q,r=1}^2$ — непрерывный по $\underline{x} \in \Gamma$ и локально интегрируемый по $t > 0$ положительно определенный тензор в \mathbb{R}^2 , $\{b_{npqr}(\underline{x})\}_{n,p,q,r=1}^2$ — непрерывный по $\underline{x} \in \Gamma$ положительно определенный тензор в \mathbb{R}^2 , а $C(\underline{x}) > 0$ — непрерывная функция. Заметим, что в случае периодического расположения частиц компоненты тензоров $\{a_{npqr}(\underline{x}, t)\}$ и $\{b_{npqr}(\underline{x})\}$ являются константами и выражаются через коэффициенты жесткости связей между частицами. Ниже будет дано точное определение этих величин и приведена строгая формулировка основного результата.

Доказательство приведем только для некритического случая. Но сначала введем некоторые обозначения и сделаем некоторые предположения.

3. Локальная энергетическая характеристика. Обозначим через d_ε^i расстояние от частицы Q_ε^i до остальных частиц и границы $\partial\Omega$, т. е. $d_\varepsilon^i = \operatorname{dist} \left\{ Q_\varepsilon^i, \bigcup_{j \neq i} Q_\varepsilon^j \cup \partial\Omega \right\}$.

Предполагается, что выполняются следующие условия.

I. Геометрические условия.

1. Существуют константы $0 < C_1, C_2, C_3 < \infty$, не зависящие от ε и такие, что

$$C_1\varepsilon \leq d_\varepsilon^i \leq C_2\varepsilon, \quad (3.1)$$

$$r_\varepsilon^i \leq C_3\varepsilon^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (3.2)$$

2. Имеет место только близкое взаимодействие, так что центр каждой частицы $\underline{x}_\varepsilon^i$ (для простоты будем считать, что эти центры располагаются на поверхности Γ , а сама поверхность является плоскостью) связан ребрами некоторого плоского графа $\tilde{\Gamma}$ с центрами некоторых других частиц, находящихся на расстояниях, меньших $C\varepsilon$, где $C > 0$ — фиксированная постоянная, не зависящая от ε . Более того, рассматриваются графы, удовлетворяющие условию триангуляции. Именно, предполагается, что поверхность Γ может быть разбита на треугольники, вершины которых соответствуют частицам $\underline{x}_\varepsilon^i$, а стороны — некоторым ребрам графа $\tilde{\Gamma}$, причем углы между сторонами этих треугольников равномерно по ε отделены от нуля.

II. Условия на взаимодействие.

1. Частицы Q_ε^i и Q_ε^j взаимодействуют, если они находятся на расстоянии порядка $O(\varepsilon)$ друг от друга. Таким образом, матрица взаимодействия $C_\varepsilon^{ij} = 0$, если $\text{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j) \geq C_1\varepsilon$, $C_1 > 0$. В частности, частицы, связанные общим ребром симплекса, обязательно взаимодействуют между собой.

2. Матрица взаимодействия C_ε^{ij} частиц Q_ε^i и Q_ε^j является матрицей оператора проектирования на вектор $\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j$ с точностью до положительного скалярного множителя $\frac{k_\varepsilon^{ij}}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}$, т. е.

$$C_\varepsilon^{ij} \underline{u} = k_\varepsilon^{ij} \left\langle \frac{\underline{u}}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}, \underline{e}^{ij} \right\rangle \underline{e}^{ij} \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Здесь $\underline{e}^{ij} = \frac{\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}$, а коэффициенты k_ε^{ij} определяются равенством

$$k_\varepsilon^{ij} = k^{ij}\varepsilon, \quad k_1 \leq k^{ij} \leq k_2, \quad (3.4)$$

где постоянные $k_2 \geq k_1 > 0$ не зависят от ε .

Введем теперь количественную характеристику упругой „сетки”, образованной взаимодействующими частицами. Как и ранее, полагаем для простоты, что поверхность Γ представляет собой кусок плоскости (например, $x_3 = 0$) и разбивает область Ω на подобласти Ω^+ и Ω^- ($\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$). Обозначим через $K(\underline{y}, h) = K_h^{\underline{y}}$ квадрат в плоскости Γ со стороной длины $h > 0$, $\varepsilon \ll h \ll 1$, и центром в точке $\underline{y} \in \Gamma$. Для определенности полагаем, что стороны квадрата параллельны координатным осям x_1 и x_2 . Через все точки $K(\underline{y}, h)$ проведем перпендикуляры к Γ длиной $\delta > 0$, $\varepsilon \ll \delta \ll h$, в разные стороны от Γ (их концы образуют квадраты $K_\delta^+(\underline{y}, h)$ и $K_\delta^-(\underline{y}, h)$). Слой в Ω , заполненный указанными отрезками перпендикуляров, обозначим $\bar{T}(K(\underline{y}, h), \delta)$.

Введем теперь множество вектор-функций

$$\begin{aligned}
 & J_\varepsilon^{\varphi, \underline{T}}[T(K(\underline{y}, h), \delta)] = \\
 & = \left\{ \underline{w}_\varepsilon \in H^1(T(K(\underline{y}, h), \delta)) : \operatorname{div} \underline{w}_\varepsilon = 0, \quad \underline{x} \in T(K(\underline{y}, h), \delta); \right. \\
 & \quad \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{w}_\varepsilon^i + \underline{v}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i), \quad \underline{x} \in Q_\varepsilon^i; \\
 & \quad \left. \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) = \sum_{n,p=1}^3 \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}) T_{np}, \quad \underline{x} \in K_\delta^\pm(\underline{y}, h) \right\},
 \end{aligned}$$

где $\underline{w}_\varepsilon^i$ и $\underline{v}_\varepsilon^i$ — произвольные постоянные векторы,

$$\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_p \underline{e}^n + x_n \underline{e}^p) - \frac{\delta_{np}}{3} \sum_{k=1}^3 x_k \underline{e}^k, \tag{3.5}$$

а $\underline{T} = \{T_{np}\}$ — произвольный симметрический тензор второго ранга.

Рассмотрим задачу минимизации в этом классе следующего функционала:

$$\begin{aligned}
 & A_{\varepsilon\delta h}^\tau(\underline{w}_\varepsilon, \underline{y}, \lambda, \underline{T}) = E_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}[\underline{w}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon] + \frac{1}{\lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{w}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon] + \\
 & + P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau \underline{T}} \left[\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) - \sum_{n,p=1}^3 T_{np} \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) - \sum_{q,r=1}^3 T_{qr} \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x} - \underline{y}) \right],
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$E_G[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = 2\mu \int_G \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\underline{u}_\varepsilon] e_{kl}[\underline{v}_\varepsilon] d\underline{x}, \tag{3.7}$$

$$I_G^\varepsilon[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} [\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)], \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 & P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau \underline{T}}[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = \\
 & = h^{-2-\tau} \varepsilon^2 \sum_i \langle \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i), \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) \rangle + h^{-2-\tau} \int_{T(K(\underline{y}, h), \delta)} \langle \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}), \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) \rangle d\underline{x},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$e_{kl}[\underline{u}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$, сумма \sum_i соответствует суммированию по всем частицам $Q_\varepsilon^i \subset G$, расположенным внутри области G , $0 < \tau < 2$, $\lambda > 0$. Можно показать, что существует единственная вектор-функция, минимизирующая функционал (3.6); минимум этого функционала является квадратичной функцией компонент тензора \underline{T} :

$$\min_{\underline{w}_\varepsilon \in J_\varepsilon^{\varphi, \underline{T}}[T(K(\underline{y}, h), \delta)]} A_{\varepsilon\delta h}^\tau(\underline{w}_\varepsilon, \underline{y}, \lambda, \underline{T}) = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) T_{np} T_{qr}, \tag{3.10}$$

где $a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)$ – компоненты тензора четвертого ранга, определяемые равенством

$$a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) = E_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}[\underline{w}^{np}, \underline{w}^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{w}^{np}, \underline{w}^{qr}] + P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau} \left[\underline{w}^{np}(\underline{x}) - \varphi^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \underline{w}^{qr}(\underline{x}) - \varphi^{qr}(\underline{x} - \underline{y}) \right]. \quad (3.11)$$

Здесь $\underline{w}^{np}(\underline{x})$ – вектор-функция из $J_\varepsilon^{\varphi, T}[T(K(\underline{y}, h), \delta)]$, минимизирующая функционал (3.6) при $\underline{T} = \underline{T}^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$; \underline{e}^n , $n = 1, 2, 3$, – ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 .

Теперь по решению $\{v_\varepsilon(\underline{x}, t), \underline{u}_\varepsilon^i, \underline{\theta}_\varepsilon^i, i = \overline{1, N_\varepsilon}\}$ задачи (2.2) – (2.7) построим вектор-функцию

$$\tilde{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \chi_\varepsilon(\underline{x})v_\varepsilon(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(\underline{x}) \left[\dot{u}_\varepsilon^i + \dot{\theta}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \right], \quad (3.12)$$

где $\chi_\varepsilon(\underline{x})$ – характеристическая функция области Ω_ε , заполненной жидкостью, а $\chi_\varepsilon^i(\underline{x})$ – характеристическая функция частицы Q_ε^i .

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 2.1) последовательность начальных вектор-функций $\tilde{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}) = \tilde{v}_\varepsilon(\underline{x}, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $v_0(\underline{x})$;
- 2.2) для каждого $\lambda > 0$ и некоторого вещественного $\tau > 0$ равномерно по $\underline{x} \in \Gamma$ существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} = a_{npqr}(\underline{x}, \lambda),$$

где $\{a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)\}$ – непрерывный по $\underline{x} \in \Gamma$ и $\lambda > 0$ положительно определенный тензор.

Замечание. Учитывая (3.3) и (3.11), легко показать, что $a_{3pqr} = a_{n3qr} = a_{np3r} = a_{npq3} = 0$, $n, p, q, r = \overline{1, 3}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2. Тогда последовательность вектор-функций $\tilde{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$, определенная в (3.12), сходится слабо в $L_2(\Omega \times [0, T])$ (для любого $T > 0$) к вектор-функции $v(\underline{x}, t)$, являющейся решением задачи (2.8) – (2.14).

Задача (2.8) – (2.14) имеет единственное решение.

Эта теорема доказывается в пп. 3 – 5 с использованием преобразования Лапласа (п. 3), дающего стационарный аналог задачи (2.2) – (2.7) со спектральным параметром λ . В п. 4 устанавливается сходимость решений этой стационарной задачи к решению предельной стационарной задачи. Затем изучаются аналитические свойства этих решений по параметру λ и их поведение при $|\lambda| \rightarrow \infty$, после чего с использованием обратного преобразования Лапласа доказывается теорема 1 (п. 5).

4. Вариационная формулировка стационарной задачи. Используя преобразование Лапласа искомых вектор-функций (в дальнейшем будем сохранять за преобразованиями те же обозначения: $v_\varepsilon(\underline{x}, t) \rightarrow v_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$, $p_\varepsilon(\underline{x}, t) \rightarrow p_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$, $\underline{u}_\varepsilon^i(t) \rightarrow \underline{u}_\varepsilon^i(\lambda)$, $\underline{\theta}_\varepsilon^i(t) \rightarrow \underline{\theta}_\varepsilon^i(\lambda)$) и учитывая (2.1), записываем задачу (2.2) – (2.5) в

виде

$$-\mu \Delta v_\varepsilon + \lambda \rho v_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = \rho v_{\varepsilon 0}(x), \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (4.1)$$

$$v_\varepsilon = \lambda \left[\underline{u}_\varepsilon^i + \underline{\theta}_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) \right], \quad x \in S_\varepsilon^i, \quad (4.2)$$

$$\lambda^2 m_\varepsilon^i \underline{u}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] \nu ds = -\frac{1}{\lambda} \sum_j^i C_\varepsilon^{ij} \left[v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j) \right] + m_\varepsilon^i \underline{v}_\varepsilon^i, \quad (4.3)$$

$$\lambda^2 I_\varepsilon^i \underline{\theta}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] \nu ds = I_\varepsilon^i \underline{\theta}_{\varepsilon 1}^i, \quad (4.4)$$

$$v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.5)$$

Здесь $\operatorname{Re} \lambda > 0$, \sum_j^i соответствует суммированию по всем частицам Q_ε^j , взаимодействующим с частицей Q_ε^i . Будем продолжать вектор-функцию скорости $v_\varepsilon(x, \lambda)$ на частицы Q_ε^i в соответствии с (4.2), сохраняя то же обозначение за продолженной вектор-функцией. Обозначим через

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho \chi_\varepsilon(x) + \rho_s \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(x)$$

удельную плотность суспензии „жидкость – частицы”.

Зафиксируем $\lambda > 0$. Тогда задача (4.1)–(4.5) эквивалентна вариационной задаче

$$\Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) = \min_{v'_\varepsilon \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)} \Phi_\varepsilon(v'_\varepsilon), \quad (4.6)$$

где $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ обозначает класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$, равных $\underline{a}_\varepsilon^i + \underline{b}_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах Q_ε^i ($\underline{a}_\varepsilon^i$ и $\underline{b}_\varepsilon^i$ – произвольные векторы), а

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) = & \int_\Omega \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + \lambda \langle \rho_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon v_{\varepsilon 0}, v_\varepsilon \rangle \right\} dx + \\ & + \frac{1}{2\lambda} \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} \left\langle C_\varepsilon^{ij} [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$\Phi_0(v) = \min_{v' \in \overset{\circ}{J}(\Omega)} \Phi_0(v'), \quad (4.8)$$

где $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ – класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$, первые две компоненты которых также принадлежат классу $H^1(\Gamma)$, а

$$\Phi_0(v) = \int_\Omega \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle - 2 \langle \rho v_0, v \rangle \right\} dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \sum_{n,p,q,r=1}^2 a_{npqr}(\underline{x}, \lambda) e_{np}[\underline{v}] e_{qr}[\underline{v}]. \quad (4.9)$$

Минимизант этой задачи является решением следующей краевой задачи:

$$\lambda \rho \underline{v} - \mu \Delta \underline{v} = \rho \underline{v}_0 + \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (4.11)$$

$$\left[\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right]_{-}^{+} = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{1pqr}(\underline{x}, \lambda) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \lambda)] \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.12)$$

$$\left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right]_{-}^{+} = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{2pqr}(\underline{x}, \lambda) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \lambda)] \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.13)$$

$$2\mu \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_{+}^{-} = [p]_{+}^{-}, \quad [\underline{v}]_{+}^{-} = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.14)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, \lambda) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (4.15)$$

Асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений задачи (4.6) описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 2.1, 2.2. Тогда решение $\underline{v}_{\varepsilon}(\underline{x}, \lambda)$ задачи (4.6) для любого $\lambda > 0$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$ задачи (4.8) в следующем смысле:

$$\underline{v}_{\varepsilon}(\underline{x}, \lambda) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{v}(\underline{x}, \lambda) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega).$$

Доказательство этой теоремы приведено в п. 5.

5. Теорема сходимости для вариационной задачи (4.6). Пусть $\underline{v}_{\varepsilon}(\underline{x}, \lambda)$ – решение задачи (4.6). Используя это решение, построим кусочно-линейный сплайн

$$\underline{w}_{\varepsilon}(\underline{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \underline{v}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^i) \underline{L}_{\varepsilon}^i(\underline{x}) \equiv \lambda \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \underline{u}_{\varepsilon}^i \underline{L}_{\varepsilon}^i, \quad (5.1)$$

где $\underline{u}_{\varepsilon}^i = \underline{u}_{\varepsilon}^i(\lambda)$ определяется равенством $\lambda^{-1} \underline{v}_{\varepsilon}(\underline{x}, \lambda) = \underline{u}_{\varepsilon}^i(\lambda) + \underline{\theta}_{\varepsilon}^i(\lambda) \times (\underline{x} - \underline{x}^i)$ для $\underline{x} \in Q_{\varepsilon}^i$, а $\underline{L}_{\varepsilon}^i$ – конечный элемент треугольников, определенных в условии I.2 (п. 2). Функция $\underline{L}_{\varepsilon}^i$ непрерывна в \mathbb{R}^2 , линейна в каждом треугольнике графа $\tilde{\Gamma}$ и $\underline{L}_{\varepsilon}^i(\underline{x}_{\varepsilon}^j) = \delta_{ij}$.

Поскольку $0 \in \overset{\circ}{J}_{\varepsilon}(\underline{v}_{\varepsilon})$, то $\Phi_{\varepsilon}(\underline{v}_{\varepsilon}) \leq \Phi_{\varepsilon}(0) = 0$. Отсюда

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_{\varepsilon}] dx + \lambda \langle \rho_{\varepsilon} \underline{v}_{\varepsilon}, \underline{v}_{\varepsilon} \rangle \right\} dx + \frac{1}{\lambda} I_{\varepsilon}(\underline{v}_{\varepsilon}, \underline{v}_{\varepsilon}) \leq \\ \leq 2 \|\rho_{\varepsilon} \underline{V}_{\varepsilon 0}\|_{L_2(\Omega)} \|\underline{v}_{\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.2)$$

где

$$I_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon) = \sum_{j \neq i} \langle C_\varepsilon^{ij} [\underline{v}_\varepsilon^i - \underline{v}_\varepsilon^j], [\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j] \rangle, \tag{5.3}$$

$$\underline{v}_\varepsilon^i = \underline{v}_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^i), \quad \underline{w}_\varepsilon^i = \underline{w}_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^i).$$

Применим теперь второе неравенство Корна (см. [12])

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_\Omega \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [\underline{v}_\varepsilon] dx + \|\underline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)$$

и дискретное неравенство Корна (см. [13])

$$\|P\underline{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)}^2 \leq C \sum'_{i,j} \langle \underline{C}_\varepsilon^{ij} [\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j], [\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j] \rangle, \tag{5.4}$$

где $P\underline{w} \equiv P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, константа C не зависит от ε , а сумма $\sum'_{i,j}$ берется по всем парам (i, j) , соответствующим сторонам $(\underline{x}_\varepsilon^i, \underline{x}_\varepsilon^j)$ треугольников, триангулирующих область Ω .

Учитывая, что $\mu > 0, \lambda > 0, \rho_\varepsilon(x) \geq \min(\rho, \rho_s) > 0$, из (5.2)–(5.4) получаем оценку

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|P\underline{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)}^2 < C,$$

где C не зависит от ε .

Поэтому множества вектор-функций $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$ и $\{P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$ (см. (5.1)) слабокомпактны в $H^1(\Omega)$ и $H^1(\Gamma)$ соответственно. Выделим подпоследовательности $\underline{v}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$ и $P\underline{w}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$, слабосходящиеся к некоторым вектор-функциям

$\underline{v} \in H_0^1(\Omega)$ и $\underline{w}_0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Gamma)$ соответственно (при $\varepsilon_k \rightarrow 0$). В силу теоремы

вложения $\underline{v}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$ сходится к $\underline{v}(\underline{x})$ сильно в $L_2(\Omega)$. Как будет показано далее, след $\gamma_\Gamma P\underline{v}$ вектор-функции $P\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$ на поверхности Γ совпадает с $\underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)$ (т. е. $P\underline{v} \in H_0^1(\Gamma)$), а сама предельная вектор-функция $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$ является решением задачи (4.8). Но поскольку эта задача имеет единственное решение, то и вся последовательность $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$ также является сходящейся:

$$\underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v} \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \underline{v}_\varepsilon \rightarrow \underline{v} \text{ сильно в } L_2(\Omega). \tag{5.5}$$

Ясно, что $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$.

Докажем теперь, что

$$\int_\Gamma |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma = 0. \tag{5.6}$$

Имеем

$$\int_\Gamma |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} + \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |\gamma_\Gamma P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} + \\
&+ \int_\Gamma |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \gamma_\Gamma P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma + \\
&+ \int_\Gamma |P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается величиной $\varepsilon \|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(T(\Gamma, 2\varepsilon))}$, которая стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно, что третье и четвертое слагаемые также стремятся к нулю. Оценим теперь первое слагаемое. Учитывая равномерную по ε ограниченность вектор-функций $\underline{v}_\varepsilon$ и $P\underline{w}_\varepsilon$ в пространствах $H_0^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Gamma)$ соответственно, легко показать, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} \leq \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_i \int_{B_\varepsilon^i} |\langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2 d\underline{x} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

где $B_\varepsilon^i = U_\varepsilon^i \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $U_\varepsilon^i = \{\underline{x} \in \Gamma: |\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}| \leq |\underline{x}_\varepsilon^j - \underline{x}|, j \neq i\}$ — ячейка Вороного на поверхности Γ , а $\langle \bullet \rangle_G$ — среднее значение вектор-функции на множестве G . Отсюда с учетом (4.2) и (5.1) находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \sum_i |\langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{Q_\varepsilon^i}|^2.$$

Учитывая теперь, что $Q_\varepsilon^i \subset B_\varepsilon^i$, и применяя неравенство (см. [6])

$$|\langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{Q_\varepsilon^i}| \leq C \frac{\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(B_\varepsilon^i)}}{\sqrt{r_\varepsilon^i}},$$

получаем, что и первое слагаемое в правой части неравенства (5.7) стремится к нулю ($\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, соотношение (5.6) доказано, откуда следует, что $P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) \in H_0^1(\Gamma)$.

Покажем, что для любой вектор-функции $\underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\Phi_0(\underline{v}) \leq \Phi_0(\underline{w}). \tag{5.8}$$

Доказательство этого неравенства проведем в два этапа.

1. Для любой вектор-функции $\underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ построим тестовую вектор-функцию $\underline{w}_{\varepsilon\delta h} \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ такую, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{w}_{\varepsilon\delta h}) \leq \Phi_0(\underline{w}). \tag{5.9}$$

Опишем эту конструкцию. Покроем плоскость Γ квадратами $K_h^{x_\alpha}$ с центрами в точках $x_\alpha \in \Gamma$ и сторонами длины h , параллельными координатным осям: $\overline{\Gamma} \subset \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_h^{x_\alpha}$. Пусть центры $x_\alpha \in \Gamma$ этих квадратов образуют квадратную решетку периода $h - h^{1+\tau/2}$, $0 < \tau < 2$. Обозначим через $K_{h'}^{x_\alpha}$ квадраты со сторонами длины $h' = h - 2h^{1+\tau/2}$, концентрические к $K_h^{x_\alpha}$. Известно (см. [5]), что существует множество функций $\{\phi_\alpha(\underline{x}) \in C_0^\infty(\Gamma)\}_{\alpha \in \Lambda}$ (называемое *специальным разбиением единицы*) такое, что

$$\phi_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \in K_h^{x_\alpha}, \\ 0, & \underline{x} \notin K_h^{x_\alpha}, \end{cases} \quad 0 \leq \phi_\alpha(\underline{x}) \leq 1, \quad |\nabla \phi_\alpha(\underline{x})| \leq \frac{c}{h^{1+\frac{\tau}{2}}}, \tag{5.10}$$

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(\underline{x}) \equiv 1, \quad \underline{x} \in \overline{\Gamma}, \quad \phi_\alpha(\underline{x}) = C_\varepsilon^i, \quad \underline{x} \in B_\Gamma(Q_\varepsilon^i),$$

где C_ε^i , $0 \leq C_\varepsilon^i \leq 1$, — некоторые константы, а $B_\Gamma(Q_\varepsilon^i)$ — шары на плоскости Γ с центрами в точках $\underline{x}_\varepsilon^i$, содержащие проекции частиц Q_ε^i на эту плоскость и имеющие радиусы $\frac{d_\varepsilon^i}{3}$ (см. (3.1)).

Для любой соленоидальной вектор-функции $\underline{w}(\underline{x}) \in C_0^2(\Omega)$ построим вектор-функцию $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, обладающую следующими свойствами. Во-первых, она аппроксимирует (в $L_2(\Omega)$) заданную вектор-функцию $\underline{w}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ при малых ε , δ и h , а во-вторых, „почти“ минимизирует функционал (3.6).

Заметим, что любую вектор-функцию $\underline{w}(\underline{x}) \in C^2(T(K(x_\alpha, h), \delta))$ можно представить в виде

$$\underline{w}(\underline{x}) = \underline{w}(x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[\underline{w}(x^\alpha)] \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - x^\alpha) + w_{np}[\underline{w}(x^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - x^\alpha)) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in T(K(x_\alpha, h), \delta), \tag{5.11}$$

где

$$e_{np}[\underline{w}(x_\alpha)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_p}(x_\alpha) + \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(x_\alpha) \right),$$

$$w_{np}[\underline{w}(x_\alpha)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_p}(x_\alpha) - \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(x_\alpha) \right),$$

вектор-функция $\underline{\varphi}^{np}(\underline{x})$ определяется равенством (3.5),

$$\underline{\psi}^{np}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_n \underline{e}^p - x_p \underline{e}^n), \tag{5.12}$$

а $D^k \underline{g}_\alpha(\underline{x}) = \underline{O}(h^{2-k})$, $k = \overline{0, 2}$. Определим квазиминимизант $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) = & \\ = & \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Lambda} \left\{ \underline{w}(\underline{x}_\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np} [\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] v_{\alpha,\varepsilon\delta h}^{np}(\underline{x}) + \right. \\ \left. + \sum_{n,p=1}^3 w_{np} [\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}) \right\} \phi_\alpha(\underline{x}_\Gamma), & \underline{x} \in T(\Gamma, \delta), \\ \underline{w}(\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega \setminus T(\Gamma, \delta), \end{cases} + \\ & + \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) = \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) + \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь \underline{x}_Γ — проекция точки \underline{x} на плоскость Γ , а вектор-функция $v_{\alpha,\varepsilon\delta h}^{np}(\underline{x})$ — минимизант функционала (3.6) при $T = T^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$. Вектор-функция $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$ соленоидальна и равна постоянным векторам $\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i$ на шарах G_ε^i , содержащих частицы и имеющих радиусы $(1 + \beta)r_\varepsilon^i = O(\varepsilon^{1+\alpha})$, $\beta > 0$. Более того, векторы $\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i$ являются средними значениями вектор-функции $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$ на шарах G_ε^i , вектор-функции $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$ и $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$ совпадают вне шаров радиуса $(1 + 2\beta)r_\varepsilon^i$, концентрических к G_ε^i , и имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\underline{g}_\alpha - \underline{g}_\alpha\|_{L_2(\Omega)} &\leq c \max_i \{r_\varepsilon^i\}, & |\underline{g}_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{g}_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i)| &\leq c r_\varepsilon^i, \\ \|\underline{g}_\alpha\|_{H^1(G)} &\leq c \|\underline{g}_\alpha\|_{H^1(G)}, & |\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i - \underline{g}_{\alpha\varepsilon}^j| &\leq c \text{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где константы c не зависят от ε , а G — любая подобласть области Ω . Существование такой вектор-функции \underline{g}_α установлено в [5].

Вектор-функция $\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$ строится в соответствии со следующей леммой (см. [5]).

Лемма 1. Для любой функции $F_\varepsilon(\underline{x}) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\underline{x}) &= 0, \quad \underline{x} \in \bigcup_i B(Q_\varepsilon^i), \\ \int_\Omega F_\varepsilon(\underline{x}) d\underline{x} &= 0, \end{aligned}$$

существует вектор-функция $\underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) &= F_\varepsilon(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \\ \underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\zeta}_\varepsilon^i, \quad \underline{x} \in B(Q_\varepsilon^i), \quad \|\underline{\zeta}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|F_\varepsilon(\underline{x})\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $B(Q_\varepsilon^i)$ — шары с центрами в точках $\underline{x}_\varepsilon^i$, содержащие частицы Q_ε^i и имеющие радиусы $\frac{d_\varepsilon^i}{3}$, $\underline{\zeta}_\varepsilon^i$ — постоянные векторы, а C не зависит от ε .

В силу (5.13) вектор-функция $\underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in H^1(\Omega)$ равна нулю на границе $\partial\Omega$, следовательно,

$$\int_\Omega \text{div } \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

Более того, можно показать, что

$$\operatorname{div} z_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) = 0, \quad x \in B(Q_\varepsilon^i).$$

Применяя теперь лемму 1 к функции $F_\varepsilon(\underline{x}) = -\operatorname{div} z_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$, можно построить соленоидальную вектор-функцию $\zeta_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$, равную постоянным векторам $\zeta_{\varepsilon\delta h}^i$ на шарах $B(Q_\varepsilon^i)$ и нулю на $\partial\Omega$. Теперь очевидно, что $w_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$.

Вычислим значение функционала (4.7) на вектор-функции $w_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$. Аналогично [6] можно показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\zeta_{\varepsilon\delta h}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Поскольку выражение $I_\varepsilon[\zeta_{\varepsilon\delta h}, \zeta_{\varepsilon\delta h}]$ задает эквивалентную норму в $H_0^1(\Gamma)$ для сплайна, построенного по векторам $\zeta_{\varepsilon\delta h}^i$, из (5.6) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon[\zeta_{\varepsilon\delta h}, \zeta_{\varepsilon\delta h}] = 0.$$

Далее, аналогично [6] можно показать, что

$$\begin{aligned} & E_{T(\Gamma, \delta)}[w_{\varepsilon\delta h}, w_{\varepsilon\delta h}] = \\ & = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w(\underline{x}_\alpha)] e_{qr}[w(\underline{x}_\alpha)] E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h'), \delta)}[v_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{np}, v_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{qr}] + L_1(\varepsilon, \delta, h), \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} & I_\varepsilon[w_{\varepsilon\delta h}, w_{\varepsilon\delta h}] \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w(\underline{x}_\alpha)] e_{qr}[w(\underline{x}_\alpha)] I_{T(K(\underline{x}_\alpha, h'), \delta)}^\varepsilon[v_{\alpha, \varepsilon h}^{np}, v_{\alpha, \varepsilon h}^{qr}] + L_2(\varepsilon, \delta, h), \end{aligned} \tag{5.16}$$

где $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} L_i(\varepsilon, \delta, h) = 0, i = \overline{1, 2}$.

Из (5.15) и (5.16) с учетом (3.11) получаем

$$\begin{aligned} & E_\Omega[w_{\varepsilon\delta h}, w_{\varepsilon\delta h}] + \frac{1}{\lambda} I_\Omega^\varepsilon[w_{\varepsilon\delta h}, w_{\varepsilon\delta h}] \leq E_\Omega[w, w] + \\ & + \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h) \varepsilon_{np}[w(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[w(\underline{x}_\alpha)] + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Используем теперь неравенство (5.17) для оценки функционала (4.7):

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(w_{\varepsilon\delta h}) & \leq \int_\Omega 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w] dx + \sum_{\alpha \in \Lambda} h^2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} \varepsilon_{np}[w(\underline{x}_\alpha)] \times \\ & \times \varepsilon_{qr}[w(\underline{x}_\alpha)] + \lambda \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon w_{\varepsilon\delta h}, w_{\varepsilon\delta h} \rangle - 2 \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon v_{\varepsilon 0}, w_{\varepsilon\delta h} \rangle dx + \Delta(\varepsilon, \delta, h), \end{aligned} \tag{5.18}$$

где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon, \delta, h) = 0.$$

Учитывая (5.13), можно показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_{\varepsilon\delta h} - \underline{w}\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Переходя в неравенстве (5.18) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, с учетом условий 2.1, 2.2 и гладкости вектор-функции $\underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\overline{\Omega})$ имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(w_{\varepsilon\delta h}) \leq \Phi_0(\underline{w}).$$

Таким образом, неравенство (5.9) доказано. Далее, из (5.9) и очевидного неравенства $\Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \Phi_\varepsilon(w_{\varepsilon\delta h})$ следует оценка сверху

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \Phi_0(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega). \quad (5.19)$$

2. Докажем теперь оценку снизу

$$\Phi_0(v) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(v_\varepsilon), \quad (5.20)$$

где вектор-функция $\underline{v}(\underline{x})$ определена в (5.5). Доказательство неравенства (5.20) проведем в предположении достаточной гладкости предельной вектор-функции: $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$.

Рассмотрим разбиение плоскости Γ непересекающимися квадратами $K_h^{x_\alpha}$, ориентированными вдоль координатных осей. В каждом слое $T(K(x_\alpha, h), \delta)$ вектор-функцию $\underline{v}(\underline{x})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) = & \underline{v}(x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[\underline{v}(x^\alpha)] \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha) + \\ & + w_{np}[\underline{v}(x^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha)) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in T(K(x_\alpha, h), \delta), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $D^k \underline{g}_\alpha(\underline{x}) = O(h^{2-k})$, $k = \overline{0, 2}$. Рассмотрим теперь в этом слое вектор-функцию

$$\underline{v}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) - \text{rot}\{\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})\chi_\delta(x_3)\} - \underline{v}(x^\alpha) - \sum_{n,p=1}^3 w_{np}[\underline{v}(x^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha) - \underline{\tilde{g}}_\alpha(\underline{x}), \quad (5.22)$$

где вектор-функция $\underline{\tilde{g}}_\alpha(\underline{x})$ определена в (5.14), $\chi_\delta(x_3)$ — гладкая функция, равная нулю при $|x_3| < \frac{\delta}{2}$ и единице при $|x_3| \geq \delta$, а вектор-функция $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})$ строится по вектор-функции $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) - \underline{v}(\underline{x})$ в соответствии со следующей теоремой (см. [14]).

Теорема 3. Пусть G — область в \mathbb{R}^3 , являющаяся гомеоморфным образом шара, а $J(G)$ — подпространство в $L_2(G)$, являющееся замыканием множества гладких соленоидальных вектор-функций. Тогда для любой вектор-функции $\underline{u}(\underline{x}) \in J(G)$ имеет место представление

$$\underline{u}(\underline{x}) = \text{rot } \underline{\tilde{u}}(\underline{x}),$$

где $\tilde{\underline{u}}(\underline{x}) \in H^1(G)$, $\operatorname{div} \tilde{\underline{u}} = 0$ в G , $\langle \tilde{\underline{u}}, \underline{n} \rangle = 0$ на ∂G . Этими тремя условиями вектор-функция $\tilde{\underline{u}}(\underline{x})$ определяется однозначно.

Если $\underline{u}(\underline{x}) \in J(G) \cap H^m(G)$, то $\tilde{\underline{u}}(\underline{x}) \in H^{m+1}(G)$, причем имеет место оценка

$$\|\tilde{\underline{u}}\|_{H^{m+1}(G)} \leq C \|\underline{u}\|_{H^m(G)},$$

где константа C зависит только от области G .

Очевидно, что $\underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) \in J_\varepsilon^{\varphi, \underline{e}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]}[T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)]$. Тогда из (3.6) и (3.10) с учетом (5.22) при $T_{np} = e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]$ получаем

$$\begin{aligned} & E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] + E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\operatorname{rot}\{\underline{u}_\varepsilon^\alpha \chi_\delta\}, \operatorname{rot}\{\underline{u}_\varepsilon^\alpha \chi_\delta\}] + \\ & + I_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] + P_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}^{\varepsilon h \gamma T} \left[\underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) - \right. \\ & \left. - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \varphi^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha), \underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) - \right. \\ & \left. - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \varphi^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha) \right] + O(h^4) \geq \\ & \geq \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h) \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогично [6] можно показать, что четвертое слагаемое в левой части неравенства (5.23) имеет порядок $O(h^{4-\tau})$. Очевидно, что первое слагаемое в левой части этого неравенства стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Для оценки второго слагаемого воспользуемся равенством $\operatorname{rot}\{\underline{u}_\varepsilon^\alpha \chi_\delta\} = (\underline{v}_\varepsilon - \underline{v}) \chi_\delta + \tilde{\underline{u}}_\varepsilon \times \nabla \chi_\delta$, из которого находим

$$\begin{aligned} & E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\operatorname{rot}\{\underline{u}_\varepsilon^\alpha \chi_\delta\}, \operatorname{rot}\{\underline{u}_\varepsilon^\alpha \chi_\delta\}] \leq \\ & \leq C \left(\|\underline{v}_\varepsilon - \underline{v}\|_{H^1(T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta))}^2 + \frac{1}{\delta^2} \|\underline{v}_\varepsilon - \underline{v}\|_{L_2(T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta))}^2 \right), \end{aligned}$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$.

Просуммировав теперь неравенство (5.23) по всем квадратам разбиения, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) & \geq \int_\Omega 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] d\underline{x} + \\ & + \sum_{\alpha \in \Lambda} h^2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] + \\ & + \lambda \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon \rangle - 2 \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_\varepsilon \rangle d\underline{x} + o(1), \quad \varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Теперь, переходя к пределу в (5.24) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, с учетом условий 2.1, 2.2 и гладкости вектор-функции $\underline{v}(\underline{x}) \in C^2(\Omega)$ получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^2 a_{npqr}(\underline{x}) \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x})] d\underline{x} + \lambda \langle \rho \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2 \langle \rho \underline{v}_0, \underline{v} \rangle \right\} dx = \Phi_0(\underline{v}).$$

Таким образом, требуемое неравенство (5.20) получено в предположении гладкости предельной вектор-функции $\underline{v}(\underline{x})$. Доказательство этого неравенства без предположения гладкости для $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ немного сложнее, хотя его схема остается той же: необходимо ввести гладкие аппроксимации $\underline{v}_\sigma(\underline{x})$ предельной вектор-функции, затем получить неравенство для этих аппроксимаций, аналогичное неравенству (5.20), и перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ (см. [5]).

Неравенство (5.8) следует из (5.19) и (5.20).

Теорема 2 доказана.

Заметим, что сходимость в теореме 2 доказана только для $\lambda > 0$. Кроме того, коэффициенты $a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)$ были определены только для $\lambda > 0$. Следующая лемма (см. [6]) позволяет аналитически продолжить эти функции в комплексную плоскость и установить поведение продолженных функций при $\lambda \rightarrow \infty$.

Лемма 2. *Функции $a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)$, определенные при $\lambda > 0$, могут быть аналитически продолжены в комплексную плоскость с разрезом вдоль полуоси $\lambda \leq 0$. Более того, для любого $\delta > 0$ в области $\Phi_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda - \pi| \geq \delta > 0\}$ имеет место следующая оценка:*

$$|a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)| < \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (5.25)$$

где константа $C > 0$ не зависит от λ .

Аналогично [7] можно доказать, что семейство решений $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ задачи (4.1)–(4.5) является аналитическим в области $G_\varepsilon = \{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \cup \{\Phi_\delta \cap \{|\lambda| > \lambda_1(\varepsilon)\}\}$, и в этой области имеют место следующие оценки:

$$\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (5.26)$$

$$\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C_{1\varepsilon}}{|\lambda|}, \quad (5.27)$$

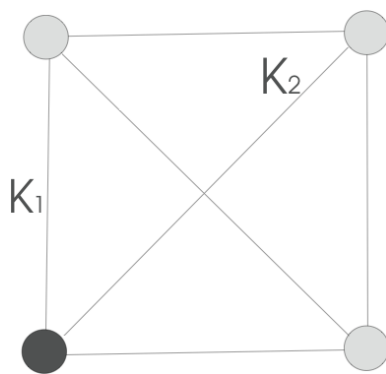
где константа C не зависит от ε .

Подобное утверждение справедливо и для решения задачи (4.10)–(4.15). А именно, это решение является аналитическим в области $G = \{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \cup \{\Phi_{\pi/3} \cap \{|\lambda| > \lambda_2\}\}$, и в этой области

$$\|\underline{v}(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \quad (5.28)$$

Теперь, учитывая равномерную по ε оценку (5.26), можно применить теорему Витали (см. [15]) и доказать, что последовательность вектор-функций $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$ равномерно внутри области $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Используя этот факт и оценки (5.25), (5.27) и (5.28), можно применить обратное преобразование Лапласа и доказать теорему 1 (подробнее см. [5, 7]).

6. Периодическое расположение частиц. Покажем существование пределов в условии 2.2 для частного примера плоской квадратной решетки. А именно, рассмотрим периодическое расположение частиц Q_ε^i одинакового радиуса $r_\varepsilon^i = r\varepsilon^\alpha$, $r < 1/4$, при котором центры частиц $\underline{x}_\varepsilon^i$ образуют квадратную решетку периода ε , где каждая вершина ячейки периодичности соединена пружиной со всеми остальными вершинами этой ячейки. Таким образом, каждая вершина соединена с $3^2 - 1 = 8$ вершинами в решетке. Упругие константы k^{ij} (см. (3.4)) этих пружин в направлениях ребер и диагоналей ячейки периодичности равны k_1 и k_2 соответственно (см. рисунок).



Периодическая ячейка

На рисунке фиксированной частице Q_ε^i с центром в точке $\underline{x}_\varepsilon^i$ соответствует темный шар, а всем ее соседям — светлый.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Для квадратной решетки, описанной выше (см. также рисунок), коэффициенты $a_{nprq}(\underline{x}, \lambda)$ в условии 2.2 являются константами относительно \underline{x} :

$$a_{nnnn}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{5}{9}k_1 + \frac{\sqrt{2}}{18}k_2 \right),$$

$$a_{nnpp}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{-4}{9}k_1 + \frac{\sqrt{2}}{18}k_2 \right),$$

$$a_{nppn}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda}k_2, \quad n, p = \overline{1, 2},$$

$a_{nprq}(\lambda) = 0$ во всех остальных случаях.

Доказательство. Рассмотрим частицу Q_ε^i , проекция которой на плоскость Γ расположена внутри квадрата K_ε^i со стороной длины ε , а центром как частицы, так и квадрата, является точка $\underline{x}_\varepsilon^i \in \Gamma$. Тогда $D_\varepsilon^i = T\left(K_\varepsilon^i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus Q_\varepsilon^i$ — ячейка периодичности в слое $T\left(\Gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, заполненная жидкостью. Для получения стандартной единичной ячейки необходимо растянуть D_ε^i в ε^{-1} раз и перенести ее центр в начало координат. Тогда область $D_\varepsilon = T\left(K, \frac{1}{2}\right) \setminus Q_\varepsilon$ является единичной ячейкой

периодичности в слое $T\left(\Gamma, \frac{1}{2}\right)$, где $T\left(K, \frac{1}{2}\right)$ — куб со стороной длины 1 и центром в начале координат, а Q_ε — шар в $T\left(K, \frac{1}{2}\right)$ радиуса $r\varepsilon^\alpha$, $r < \frac{1}{4}$.

Рассмотрим в $T\left(K, \frac{1}{2}\right)$ вектор-функцию

$$\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \text{rot}(\phi_\varepsilon(\underline{x})\underline{u}^{np}(\underline{x})), \quad (6.1)$$

где

$$\phi_\varepsilon(\underline{x}) = \phi\left(\frac{\underline{x}}{r\varepsilon^\alpha}\right), \quad \phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |\underline{x}| \leq 1, \\ 0, & |\underline{x}| > 2, \end{cases}$$

а $\underline{u}^{np}(\underline{x})$ — гладкая вектор-функция такая, что

$$\text{rot} \underline{u}^{np}(\underline{x}) = -\psi^{np}(\underline{x}), \quad |\underline{u}^{np}(\underline{x})| \leq C|\underline{x}|^2.$$

Поскольку вектор-функция $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$ равна нулю на границе ∂K , ее можно продолжить периодическим образом в слое $T\left(\Gamma, \frac{1}{2}\right)$ и нулем вне этого слоя.

Пусть K_h^y — квадрат со стороной длины h , $h \gg \delta \gg \varepsilon$, и центром в точке $\underline{y} \in \Gamma$ (для простоты полагаем, что точка \underline{y} совпадает с центром одной из частиц $\underline{x}_\varepsilon^i$). Будем искать вектор-функцию $\underline{w}^{np}(\underline{x}, \lambda)$, минимизирующую функционал (3.6) при $T = T^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$, в виде

$$\underline{w}^{np}(\underline{x}, \lambda) = \underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) + \underline{v}_\varepsilon^{np}(\underline{x}, \lambda), \quad (6.2)$$

где

$$\underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}) + \varepsilon \tilde{\underline{u}}_\varepsilon^{np}\left(\frac{\underline{x} - \underline{y}}{\varepsilon}\right). \quad (6.3)$$

Здесь $\tilde{\underline{u}}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$ — периодическое в слое $T\left(\Gamma, \frac{1}{2}\right)$ и нулевое вне этого слоя продолжение вектор-функции $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$. Используя свойства функций $\underline{\psi}^{np}(\underline{x})$ и $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$, имеем

$$\underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j - \underline{y}), \quad \underline{x} \in Q_\varepsilon^j, \quad (6.4)$$

$$\underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \quad \underline{x} \in \partial T(K_h^y, \delta),$$

$$\text{div} \underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in T(K_h^y, \delta). \quad (6.5)$$

Для корректора $\underline{v}_\varepsilon^{np}(\underline{x}, \lambda)$ легко получить соответствующую вариационную задачу. Анализируя эту задачу, а затем подставляя (6.2)–(6.4) в (3.11) и учитывая периодичность структуры, получаем

$$\frac{1}{h^2} a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) = \frac{1}{h^2 \lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon [\underline{\psi}_\varepsilon^{np}, \underline{\psi}_\varepsilon^{qr}] + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1,$$

откуда следует утверждение теоремы 4.

Как уже отмечалось, в случае частиц критического размера (с радиусом порядка ε^2) усредненная модель становится качественно иной. А именно, аналогично [7] можно доказать такую теорему.

Теорема 5. При описанном выше (см. рисунок) периодическом расположении частиц радиуса $r\varepsilon^2$ последовательность вектор-функций $\tilde{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$, определенная в (3.12), сходится слабо в $L_2(\Omega \times [0, T])$ (для любого $T > 0$) к вектор-функции $v(\underline{x}, t)$ такой, что пара $\{v(\underline{x}, t), \underline{x} \in \Omega; w(\underline{x}, t), \underline{x} \in \Gamma\}$ является решением задачи (2.15)–(2.20), где $b_{nnnn} = k_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}k_2$, $b_{nnpp} = b_{pppp} = \frac{\sqrt{2}}{2}k_2$, $b_{nppr} = 0$ во всех остальных случаях, а $C(\underline{x}) = 6\pi\mu r$.

Автор благодарит Е. Я. Хруслова за постановку задачи и плодотворные обсуждения результатов статьи.

1. Галицин Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикл. гидромеханика. – 2000. – № 1. – С. 20–27.
2. Троценко В. А. О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде // Доп. НАН України. – 2005. – № 6. – С. 50–56.
3. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Борисов Д. И. Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2006. – № 749. – С. 86–95.
5. Berlyand L. V., Khruslov E. Ya. Homogenized non-Newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interacting particles in a viscous Newtonian fluid // SIAM J. Appl. Math. – 2004. – 64, № 3. – P. 1002–1034.
6. Berezhnyi M. A. The asymptotic behaviour of viscous incompressible fluid small oscillations with solid interacting particles // J. Math. Phys., Anal., Geometry. – 2007. – 3, № 2. – P. 135–156.
7. Berezhnyi M., Berlyand L., Khruslov E. The homogenized model of complex fluids // NHM, Networks and Heterogeneous Media. – 2008. – 3, № 4.
8. Larson R. G. The structure and the rheology of complex fluids. – New York; Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. – 688 p.
9. Pernin J. N., Jacquet E. Elasticity and viscoelasticity in highly heterogeneous composite medium: threshold phenomenon and homogenization // Int. J. Eng. Sci. – 2001. – 39. – P. 1655–1689.
10. Russel W. B., Saville D. A., Schowalter W. R. Colloidal dispersions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 525 p.
11. Sanchez-Hubert J. Asymptotic study of the macroscopic behaviour of solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. – 1980. – 2. – P. 1–11.
12. Oleinic O. A., Shamaev A. S., Iosif'yan G. A. Mathematical problems in elasticity and homogenization // Stud. Math. and Appl. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1982. – 26. – 398 p.
13. Berezhnyy M., Berlyand L. Continuum limit for three-dimensional mass-spring networks and discrete Korn's inequality // J. Mech. and Phys. Solids. – 2006. – 54, № 3. – P. 635–669.
14. Bendali A., Dominguez J. M., Gallic S. A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier–Stokes problems in three dimensional domains // J. Math. Anal. and Appl. – 1985. – 107. – P. 537–560.
15. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.

Получено 17.04.08,
после доработки – 23.12.08