УДК 517.518

О. Н. Нестеренко, Т. Д. Тимошкевич, А. В. Чайковський
(Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОСИЛЕННЯ ОДНІЄЇ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

We prove that the inequality $\| g(\cdot/n)\|_{L_1[-1,1]} \| P_{n+k} \|_{L_1[-1,1]} \le 2 \| g P_{n+k} \|_{L_1[-1,1]}$, where $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ is a monotone odd function and P_{n+k} is an algebraic polynomial of degree not higher than $n+k$, is true for all natural n if $k=0$ and for all natural $n \ge 2$ if $k=1$. Other new pairs (n, k) are found for which this inequality is also true. Some conditions on polynomials P_{n+k} are established under which the inequality becomes an equality. Some generalizations of the considered inequality are obtained.

Доказано, что неравенство $\| g(\cdot/n)\|_{L_1[-1,1]} \| P_{n+k} \|_{L_1[-1,1]} \le 2 \| g P_{n+k} \|_{L_1[-1,1]}$, где $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ — монотонная нечетная функция, а P_{n+k} — алгебраический многочлен степени не выше $n+k$, выполняется для всех натуральных n при $k=0$ и для всех натуральных $n \ge 2$ при $k=1$, найдены другие новые пары (n, k), для которых оно имеет место. Установлены некоторые условия на многочлен P_{n+k}, при которых это неравенство превращается в равенство. Получены некоторые обобщения этого неравенства.

Вступ. Формулювання основних результатів. Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонна непарна функція та

$$g_n(x) := g(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

У роботі [1] (лема 5.1) доведено, що для кожного алгебраїчного многочлена $P = P_{n-2}$ степеня не вище $n-2$, $n \ge 2$, виконується нерівність

$$\| g \|_{L_1[-1,1]} \| P \|_{L_1[-1,1]} \le 2 \| g_n P \|_{L_1[-1,1]}. \tag{1}$$

У статті [2] отримано посилення та узагальнення цієї нерівності. Зокрема, встановлено, що при $n \ge 7$ нерівність (1) справджується для алгебраїчних многочленів P степеня не вище n. Метою даної роботи є доведення цього твердження для всіх натуральних n, знаходження нових пар (n, k), для яких нерівність (1) виконується у випадку многочлена P степеня не вище $n+k$, узагальнення її на випадок функцій багатьох змінних, а також встановлення умов на многочлени, для яких нерівність перетворюється на рівність.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Для кожного алгебраїчного многочлена P_n степеня не вище n виконується нерівність*

$$\| g \|_{L_1[-1,1]} \| P_n \|_{L_1[-1,1]} \le 2 \| g_n P_n \|_{L_1[-1,1]}. \tag{2}$$

Наслідок. *Якщо $b > 0$, то для кожного алгебраїчного многочлена P_n степеня не вище n виконується нерівність*

$$\| g \|_{L_1[-b,b]} \| P_n \|_{L_1[-b,b]} \le 2b \| g_n P_n \|_{L_1[-b,b]}.$$

Для формулювання інших результатів введемо таке означення.

Означення. *Вимірну за Лебегом функцію $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ назвемо допустимою зі сталою $1/n$, де $n \in \mathbb{N}$, якщо:*

1) $|g|$ *— парна функція на* $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$;

2) $|g|$ — *неспадна на* $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$;

3) $\operatorname*{ess\,inf}_{1/n \le |x| \le 1} |g(x)| \ge \left| g\left(\dfrac{1}{n}\right) \right|$.

Зауважимо, що монотонна непарна функція є допустимою зі сталою $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Будемо досліджувати нерівність

$$\left\| g\left(\frac{\cdot}{n}\right) \right\|_{L_1[-1,1]} \|P\|_{L_1[-1,1]} \le 2 \|gP\|_{L_1[-1,1]}, \tag{3}$$

яка для непарних монотонних функцій $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та многочлена P є рівносильною нерівності (1) або (2) в залежності від степеня многочленів.

Теорема 2. 1. *Для кожного* $k \ge -1$ *існує* $N(k) \in \mathbb{N}$ *таке, що для всіх* $n \ge N(k)$ *довільний алгебраїчний многочлен* $P = P_{n+k}$ *степеня не вище* $n + k$ *задовольняє нерівність* (3) *для будь-якої функції* g, *допустимої зі сталою* $1/n$.

2. *Для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *існує* $K(n) \in \mathbb{N}$ *таке, що при всіх* $n \ge K(n)$ *для деякого алгебраїчного многочлена* $P = P_{n+k}$ *степеня не вище* $n + k$ *і деякої функції* g, *допустимої зі сталою* $1/n$, *нерівність* (3) *є хибною.*

Зауваження. **1.** Якщо для пари (n_0, k_0) справджується твердження 1 теореми 2, то воно справджується і для інших пар (n_0, k), де $k \le k_0$.

2. З лем 2 і 3, наведених нижче, та зауважень до них випливає, що можна покласти $N(-1) = N(0) = 1$, $N(1) = 2$, $N(2) = 8$, $N(3) = 9$, $N(4) = 11$, $K(1) = 1$, $K(2) = 2$, $K(3) = 3$. З леми 2 також можна отримати явну оцінку для $N(k)$ при кожному $k \in \mathbb{N}$.

3. З доведення теореми випливає навіть більш сильне твердження, ніж твердження п. 1: для кожного $n \ge -1$ існує $\tilde{N}(k) \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \ge \tilde{N}(k)$ довільний алгебраїчний многочлен P_{n+k} степеня не вище $n + k$ задовольняє хоча б одну з нерівностей (4) – (6) для будь-якої функції g, допустимої зі сталою $1/n$.

n	k					
	-1	0	1	2	3	4
1	+	+	−	−	−	−
2	+	+	+	−	−	−
3	+	+	+	+	−	−
4	+	+	+	+	+	
5	+	+	+	+		
6	+	+	+			
7	+	+	+			
8	+	+	+	+		
9	+	+	+	+	+	
10	+	+	+	+	+	
11	+	+	+	+	+	+

n	k					
	-1	0	1	2	3	4
1	+					
2	+					
3	+					
4	+					
5	+					
6	+					
7	+	+				
8	+	+				
9	+	+				
10	+	+	+			
11	+	+	+			

Для малих значень пар (n, k) у таблиці зліва знаком „+” позначено пари, для яких (3) виконується, знаком „–” — пари, для яких нерівність (3) є хибною (порожні місця — невідомі випадки). Для порівняння у таблиці справа наведено аналогічні результати з роботи [2].

Доведення теореми 2 і зауваження 1 – 3 спираються на теореми 3, 4, які, однак, мають і самостійний інтерес.

Теорема 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $P \in L_1[-1,1]$, $L(x) := |P(x)| + |P(-x)|$, $x \in [-1,1]$.

1. *Нехай функція* $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *допустима зі сталою* $1/n$. *Нерівність* (3) *справджується тоді й лише тоді, коли виконується нерівність*

$$n \int_0^{1/n} |g(x)|\,dx \int_0^1 L(x)\,dx \le \int_0^1 L(x)|g(x)|\,dx. \tag{4}$$

2. *Нерівність* (3) *справджується для всіх функцій* $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, *допустимих зі сталою* $1/n$, *тоді й лише тоді, коли виконується нерівність*

$$\|P\|_{L_1[-u,u]} \le nu\|P\|_{L_1[-1,1]}, \quad u \in \left[0, \frac{1}{n}\right]. \tag{5}$$

3. *Для того щоб нерівність* (3) *справджувалася для всіх функцій* $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, *допустимих зі сталою* $1/n$, *достатньо, щоб виконувалась нерівність*

$$L(x) \le n\int_0^1 L(t)\,dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]. \tag{6}$$

Теорема 4. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$.

1. *Для вимірної за Лебегом функції* $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *такої, що* $\int_{-1}^1 |g(x)|\,dx \ne 0$, *величину*

$$\frac{\|P\|_{L_1[-1,1]}}{\|gP\|_{L_1[-1,1]}}$$

визначено для всіх ненульових многочленів P *степеня не вище* N. *Серед многочленів* P, *для яких ця величина набуває свого найбільшого значення, можна вибрати многочлен* P_0, *який має* (*з урахуванням кратності*) N *коренів на* $[-1,1]$.

2. *При фіксованому* $u \in (0,1]$ *величину*

$$\frac{\|P\|_{L_1[-u,u]}}{\|P\|_{L_1[-1,1]}}$$

визначено для всіх ненульових многочленів P *степеня не вище* N. *Серед многочленів* P, *для яких ця величина набуває свого найбільшого значення, можна вибрати многочлен* P_0, *який має* (*з урахуванням кратності*) N *коренів на* $[-1,1]$.

3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$. *Величину*

$$\frac{\sup\limits_{x\in[0,1/n]} L(x)}{\int_0^1 L(t)\,dt},$$

де $L(x) := |P(x)| + |P(-x)|$, $x \in [-1,1]$, *визначено для всіх ненульових многочленів* P *степеня не вище* N. *Серед многочленів* P, *для яких ця величина набуває свого найбільшого значення, можна вибрати многочлен* P_0, *що має* (*з урахуванням кратності*) N *коренів на* $[-1,1]$.

Твердження п. 3 залишається правильним, якщо вказану величину розглядати лише на множині ненульових парних многочленів степеня не вище N або на множині ненульових непарних многочленів степеня не вище N.

***Зауваження* 4.** Якщо необхідно довести, що один із дробів, вказаних у теоремі, не перевищує задану сталу для всіх відповідних многочленів, досить доводити це твердження лише для многочленів, що мають N різних коренів на $[-1,1]$. Дійсно, множина таких многочленів у рівномірній метриці є щільною у множині відповідних многочленів, які мають N коренів на $[-1,1]$.

Теорема 5. *Нехай* $m\in\mathbb{N}$, $k_j\in\mathbb{Z}$, $k_j\ge -1$, $N_j(k_j):=\tilde{N}(k_j)$, *останню величину визначено в зауваженні* 3, $n_j\ge N_j(k_j)$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, *а вимірна за Лебегом функція* $g:\ [-1,1]^m\to\mathbb{R}$ *для кожного* $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ *як функція однієї* j*-ї змінної при всіх фіксованих інших змінних є допустимою зі сталою* $1/n$. *Тоді для довільного алгебраїчного многочлена P, степінь якого по j-й змінній не перевищує* n_j+k_j *при кожному* $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, *виконується нерівність*

$$\left\|g\left(\frac{\cdot}{n_1},\frac{\cdot}{n_2},\ldots,\frac{\cdot}{n_m}\right)\right\|_{L_1\left([-1,1]^m\right)}\|P\|_{L_1\left([-1,1]^m\right)}\le 2^m\|gP\|_{L_1\left([-1,1]^m\right)}. \tag{7}$$

Теорему 4 встановив А. В. Чайковський, лему 3 — Т. Д. Тимошкевич, теорему 5 — О. Н. Нестеренко. Інші результати отримано спільно.

Доведення основних результатів. ***Доведення теореми* 3.** Якщо $Pg\notin L_1[-1,1]$, то права частина нерівності (3) дорівнює $+\infty$ і нерівність виконується, тому надалі припускаємо, що $Pg\in L_1[-1,1]$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $|g(x)|=\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|$, $|x|\in\left[\frac{1}{n},1\right]$.

Маємо

$$\|Pg\|_{L_1[-1,1]}=\int_0^1|P(x)g(x)|dx+\int_0^1|P(-x)g(-x)|dx=$$

$$=\int_0^1(|P(x)|+|P(-x)|)|g(x)|dx=\int_0^1 L(x)|g(x)|dx.$$

З іншого боку,

$$\left\|g\left(\frac{\cdot}{n}\right)\right\|_{L_1[-1,1]}\|P\|_{L_1[-1,1]}=\int_{-1}^1\left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right|dx\int_{-1}^1|P(x)|dx=2n\int_0^{1/n}|g(x)|dx\int_0^1 L(x)dx.$$

Звідси випливає, що нерівності (3) і (4) є рівносильними.

Нехай виконується співвідношення (6). Нерівність (4) рівносильна нерівності

$$\int_0^{1/n}\left(L(x)-n\int_0^1 L(t)dt\right)|g(x)|dx+\int_{1/n}^1 L(x)|g(x)|dx\ge 0. \tag{8}$$

Враховуючи співвідношення (6) і допустимість функції g, помічаємо, що ліва частина нерівності (8) буде найменшою, якщо $|g(x)|=\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\mathrm{const}$, $x\in[-1,1]$. Але для таких функцій ліва частина (8) дорівнює нулю.

Нехай виконується співвідношення (5). Без обмеження загальності вважатимемо, що $g(x)\ge 0$, $x\in[-1,1]$, $g(x)=1$, $|x|\in\left[\frac{1}{n},1\right]$, $g(0)=0$, а також що g

є абсолютно неперервною. Нехай також $\|P\|_{L_1[-1,1]} = 1$.

З одного боку, маємо

$$\left\| g\left(\frac{\cdot}{n}\right) \right\|_{L_1[-1,1]} = n \int_{-1/n}^{1/n} g(x)\,dx = 2n\left(\frac{1}{n} g\left(\frac{1}{n}\right) - \int_0^{1/n} x g'(x)\,dx \right) =$$

$$= 2 - 2n \int_0^{1/n} x g'(x)\,dx.$$

З іншого боку,

$$\|gP\|_{L_1[-1,1]} = 1 - \int_{-1}^{1} (1 - g(x)) |P(x)|\,dx =$$

$$= 1 - \int_{-1/n}^{1/n} (1 - g(x)) |P(x)|\,dx =$$

$$= 1 + \int_{-1/n}^{0} \left(\int_{-1/n}^{x} g'(u)\,du \right) |P(x)|\,dx - \int_0^{1/n} \left(\int_x^{1/n} g'(u)\,du \right) |P(x)|\,dx =$$

$$= 1 + \int_{-1/n}^{0} \left(\int_u^0 |P(x)|\,dx \right) g'(u)\,du - \int_0^{1/n} \left(\int_u^u |P(x)|\,dx \right) g'(u)\,du =$$

$$= 1 - \int_0^{1/n} \left(\int_{-u}^{0} |P(x)|\,dx \right) g'(u)\,du - \int_0^{1/n} \left(\int_0^u |P(x)|\,dx \right) g'(u)\,du =$$

$$= 1 - \int_0^{1/n} \left(\int_{-u}^{u} |P(x)|\,dx \right) g'(u)\,du.$$

Звідси з урахуванням співвідношення (5) отримуємо нерівність (3). Якщо нерівність (5) порушується при деякому u, можна вибрати функцію g так, щоб її похідна на $[0, 1]$ була відмінною від нуля лише при аргументах, близьких до u. Тоді порушиться нерівність (3).

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 4.** 1. Між многочленами вигляду $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ $\ldots + a_N x^N$ і точками $(a_0, a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ існує взаємно однозначна відповідність. Многочлен, що відповідає вектору $\vec{a} \in \mathbb{R}^{N+1}$, позначатимемо через $P_{\vec{a}}$, а точку, що відповідає многочлену P, — через $\vec{a}(P)$. Розглянемо функцію $F\colon \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$, задану формулою

$$F(\vec{a}) = \frac{\|P_{\vec{a}}\|_{L_1[-1,1]}}{\|gP_{\vec{a}}\|_{L_1[-1,1]}}.$$

Оскільки F не змінює значення при домноженні $\vec{a}$ на ненульове число, то всі значення вона набуває при $\vec{a} \in \Omega := S(\vec{0}, 1) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, де $S(\vec{0}, 1)$ — одинична сфера з центром у початку координат. На компакті Ω функція F досягає свого найбільшого значення. Отже, F досягає найбільшого значення і на $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$. Виберемо одну з точок $\vec{a}_0$, де воно досягається, так, щоб многочлен $P_{\vec{a}_0}$ мав максимально можливу кількість коренів на $[-1, 1]$ (з урахуванням кратності).

Нехай $P_{\vec{a}_0}(x) = Q^0(x)\,R^0(x)$, де $Q^0(x)$ — многочлен, всі корені якого лежать на $[-1, 1]$, R^0 — многочлен, всі корені якого лежать на $\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $R^0(x) > 0$, $x \in [-1, 1]$. Припустимо, що R^0 не є сталою. Як і на початку доведення, встановимо взаємно однозначну відповідність між многочленами R степеня не вище s і точками $\vec{b} \in \mathbb{R}^{s+1}$. Нехай $R^0(x) = R_{\vec{b}_0}(x) = b_0^0 + b_1^0 x + \ldots + b_s^0 x^s$.

Позначимо

$$\Omega_1 := \left\{\vec{b} \in \mathbb{R}^{s+1} \,|\, R_{\vec{b}}(x) > 0,\, x \in [-1, 1]\right\}.$$

Множина Ω_1 є відкритою. Дійсно, якщо припустити, що ця множина не є відкритою, то існує $\left\{\vec{b}^m : m \geq 1\right\} \subset \mathbb{R}^{s+1}\setminus\Omega_1$ така, що $\vec{b}^{(m)} \to \vec{b}' \in \Omega_1$, $m \to \infty$. Але тоді існує множина $\{x_m : m \geq 1\} \subset [-1, 1]$ така, що $R_{\vec{b}^{(m)}}(x_m) \leq 0$. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_m \to x_0 \in [-1, 1]$, $m \to \infty$. Звідси $R_{\vec{b}'}(x_0) \leq 0$. Це суперечить тому, що $\vec{b}' \in \Omega_1$.

Розглянемо функцію

$$H(\vec{b}) = \frac{\int_{-1}^{1}\left|Q^0(x)\right|\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_s x^s\right)dx}{\int_{-1}^{1}\left|Q^0(x)\,g(x)\right|\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_s x^s\right)dx}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^{s+1}\setminus\{0\}.$$

У кожній точці $\vec{b} \in \Omega_1$ значення H збігається з деяким значенням функції F, тому $\sup\limits_{\vec{b}\in\Omega_1} H(\vec{b}) \leq \sup\limits_{\vec{a}\in\Omega} F(\vec{a})$. З іншого боку, в точці $\vec{b}^0 \in \Omega_1$ $H(\vec{b}^0) = F(\vec{a}^0) = \sup\limits_{\vec{a}\in\Omega} F(\vec{a})$. Отже,

$$H(\vec{b}^0) = \sup_{\vec{b}\in\Omega_1} H(\vec{b}) = \sup_{\vec{a}\in\Omega} F(\vec{a}).$$

Звідси випливає, що в точці $\vec{b}^0$ функція H має локальний (нестрогий) максимум на Ω_1. Але для дробово-лінійної функції це можливо лише якщо H — стала. В такому випадку значення $H(\vec{b}^0)$ досягається і на межах відкритої множини Ω_1, тобто існує $\vec{b} \in \partial\Omega_1$ такий, що $H(\vec{b}) = H(\vec{b}^0)$; при цьому

$$\exists x \in [-1, 1] : \; R_{\vec{b}}(x) = 0.$$

Отже, максимум функції F досягається для многочлена $Q^0 R_{\vec{b}}$, який має на $[-1, 1]$ більше коренів, ніж $P_{\vec{a}_0}$. Суперечність.

Отже, R^0 — стала і $P_{\vec{a}_0}$ має N коренів на $[-1, 1]$.

2. Доведення повністю повторює доведення п. 1 з відповідною заміною функцій F, H.

3. Як і при доведенні п. 1, показуємо, що цей дріб досягає максимуму. Візьмемо многочлен із найбільшою кількістю коренів, для якого максимум досягається. Для нього виберемо точку $x_0 \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, в якій досягається супремум у чисельнику. Розглядаючи функцію

$$H(\vec{b}) = \frac{\left|Q^0(x_0)\right| R_{\bar{b}}(x_0) + \left|Q^0(-x_0)\right| R_{\bar{b}}(-x_0)}{\int_{-1}^{1}\left|Q^0(x)\right| R_{\bar{b}}(x)\,dx},$$

повторюємо міркування з доведення п. 1.

У випадку, коли розглядаються лише парні чи лише непарні многочлени, міркування аналогічні, лише многочлен R^0 обов'язково є парним і має вигляд $b_0^0 + b_1^0 x^2 + \ldots + b_s^0 x^{2s}$.

Теорему 4 доведено.

Доведення теореми 2 спирається на ряд лем.

Лема 1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\varepsilon_n := \arcsin\frac{1}{n}$, $\varphi_n := \frac{\pi - 2\varepsilon_n}{4}$, $F_n(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + {}$ $+ \frac{1}{\sin(2\varphi_n - \alpha)}$, $\alpha \in (0, 2\varphi)$. *Тоді*

$$\exists!\, \alpha_n \in (0, \varphi_n]: \quad F_n(\alpha_n) = \frac{\pi}{\varepsilon_n}.$$

Доведення. Зауважимо, що функція

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin(2\varphi_n - \alpha)} = \frac{2\sin\varphi_n}{\cos(\varphi_n - \alpha) - \dfrac{\cos^2\varphi_n}{\cos(\varphi_n - \alpha)}}, \quad \alpha \in (0, \varphi_n],$$

спадає. Крім того,

$$\forall n \geq 2: \quad \sin\varphi_n \geq \frac{2\varepsilon_n}{\pi},$$

тобто $F_n(\varphi_n) \leq \frac{\pi}{\varepsilon_n}$, отже,

$$\exists!\, \alpha_n \in (0, \varphi_n]: \quad F_n(\alpha_n) = \frac{\pi}{\varepsilon_n}.$$

Лема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$ *і в позначеннях попередньої леми*

$$\varepsilon_n\left(n + k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\cos(\varepsilon_n + \alpha_n)}\right) \leq \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Тоді довільний алгебраїчний многочлен $P = P_{n+k}$ *степеня не вище* $n + k$ *задовольняє нерівність* (5).

Доведення. Нехай $D_m(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos mu = \frac{\sin(m + 1/2)u}{2\sin(u/2)}$, $u \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — ядро Діріхле. Розглянемо $T_{n+k+1}(t) := \sin t\, P_{n+k}(\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, — непарний тригонометричний поліном порядку не вище $n + k + 1$. Для нього мають місце рівності

$$T_{n+k+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{n+k+1}(x - t)\, T_{n+k+1}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{n+k+1}(x + t)\, T_{n+k+1}(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

звідки

$$T_{n+k+1}(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_{n+k+1}(x-t) - D_{n+k+1}(x+t)}{2} T_{n+k+1}(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що з опуклості донизу функції arcsin на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ випливає нерівність

$$\arcsin u \;\le\; u\,\frac{\arcsin u_0}{u_0}, \quad u \in [0, u_0], \quad 0 < u_0 \le 1. \tag{10}$$

Використовуючи її та попереднє зображення для T_{n+k+1}, для $u \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ маємо

$$\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[\pi/2-\arcsin u,\, \pi/2+\arcsin u]} \;=$$

$$= \int_{\pi/2-\arcsin u}^{\pi/2+\arcsin u} \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_{n+k+1}(x-t) - D_{n+k+1}(x+t)}{2} T_{n+k+1}(t)\,dt \right| dx \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{\pi}\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[-\pi,\,\pi]} \sup_{t\in[0,\pi]} \int_{\pi/2-\arcsin u}^{\pi/2+\arcsin u} \left| \frac{D_{n+k+1}(x-t) - D_{n+k+1}(x+t)}{2} \right| dx \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{\pi}\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[-\pi,\,\pi]} \arcsin u \;\;\times$$

$$\times \sup_{t\in[0,\pi],\, |x-\pi/2| \le \arcsin u} \left| D_{n+k+1}(x-t) - D_{n+k+1}(x+t) \right| \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{\pi}\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[-\pi,\,\pi]} nu \arcsin\frac{1}{n}\, K_{n+k} \;=\; \frac{1}{\pi}\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[-\pi,\,\pi]} nu\varepsilon_n\, K_{n+k},$$

де

$$K_{n+k} \;:=\; \sup_{t\in[0,\pi],\, |x-\pi/2| \le \varepsilon_n} \left| D_{n+k+1}(x-t) - D_{n+k+1}(x+t) \right|.$$

Враховуючи цю оцінку та рівності

$$\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[-\pi,\,\pi]} \;=\; 2\left\| P_{n+k} \right\|_{L_1[-1,\,1]},$$

$$\left\| T_{n+k+1} \right\|_{L_1[\pi/2-\arcsin u,\, \pi/2+\arcsin u]} \;=\; \left\| P_{n+k} \right\|_{L_1[-u,\,u]}, \quad u \in \left[0, \frac{1}{n}\right],$$

бачимо, що для встановлення нерівності (5) досить довести, що

$$K_{n+k} \;\le\; \frac{\pi}{2\varepsilon_n}.$$

Розглянемо множину пар

$$\Omega_n \;=\; \left\{ (\alpha, \beta) \,\middle|\, \left| \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right| \le \varepsilon_n,\, 0 \le \beta - \alpha \le \pi \right\} \;=$$

$$= \left\{ (\alpha, \beta) \,\middle|\, |\alpha| \le \frac{\pi}{2} - \varphi_n,\, \beta \in [\max(\alpha, 2\varphi_n - \alpha), \min(\alpha + \pi, \pi - 2\varphi_n - \alpha)] \right\}.$$

Позначимо $\alpha := \frac{x-t}{2}$, $\beta := \frac{x+t}{2}$, де $t \in [0, \pi]$, $\left| x - \frac{\pi}{2} \right| \le \varepsilon_n$. Тоді $(\alpha, \beta) \in \Omega_n$. Розглянемо такі випадки:

1) $\alpha < 0$. Тоді за властивостями ядра Діріхле

$$\left|D_{n+k+1}(2\alpha) - D_{n+k+1}(2\beta)\right| = \left|D_{n+k+1}(-2\alpha) - D_{n+k+1}(2\pi - 2\beta)\right|,$$

причому $(-\alpha, \pi - \beta) \in \Omega_n$. Тому цей випадок зводиться до випадку $\alpha \geq 0$.

2) $\alpha \in [\alpha_n, \varphi_n]$. Тоді $\beta \in [2\varphi_n - \alpha, \pi - 2\varphi_n - \alpha]$ і

$$\left|D_{n+k+1}(2\alpha) - D_{n+k+1}(2\beta)\right| \leq \frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2\sin\beta} \leq \frac{1}{2} F_n(\alpha) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} F_n(\alpha_n) = \frac{\pi}{2\varepsilon_n}.$$

3) $\alpha \in \left(\varphi_n, \frac{\pi}{2} - \varphi_n\right]$. Тоді $\beta \in [\alpha, \pi - 2\varphi_n - \alpha]$ і

$$\left|D_{n+k+1}(2\alpha) - D_{n+k+1}(2\beta)\right| \leq \frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2\sin\beta} \leq \frac{1}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{\sin\varphi_n} \leq \frac{\pi}{2\varepsilon_n}.$$

4) $\alpha \in [0, \alpha_n)$. Тоді $\beta \in [2\varphi_n - \alpha, \pi - 2\varphi_n - \alpha]$. Позначимо $\delta := \beta - \frac{\pi}{2}$. Тоді $\delta \in [-\varepsilon_n - \alpha, \varepsilon_n - \alpha]$. Звідси

$$\left|D_{n+k+1}(2\alpha) - D_{n+k+1}(2\beta)\right| \leq \left|D_{n+k+1}(2\alpha)\right| + \left|D_{n+k+1}(2\beta)\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(2n+2k+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \cos(2(n+k+1)\alpha)\right| + \left|\frac{\cos(2(n+k+1)\delta + \delta)}{2\cos\delta}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2n+2k+1}{2} + 1 + \frac{1}{2\cos\delta} \leq n + k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\cos(\varepsilon_n + \alpha_n)}.$$

Отже, в усіх випадках $K_{n+k} \leq \dfrac{\pi}{2\varepsilon_n}$.

Лему 2 доведено.

***Доведення теореми* 2.** П. 1 випливає з леми 2, оскільки ліва частина нерівності (9) при фіксованому $k \geq -1$ прямує до 1 при $n \to \infty$.

Другий пункт цієї теореми випливає з того, що для функцій

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ 1, & |x| \in \left(\frac{1}{2n}, 1\right], \end{cases} \qquad P(x) = \begin{cases} 1 - 2nx, & |x| \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ 0, & |x| \in \left(\frac{1}{2n}, 1\right], \end{cases}$$

нерівність (3) є хибною, а функцію P можна як завгодно добре рівномірно наблизити многочленами.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження*. 5.** Ліва частина нерівності (9) є зростаючою функцією по k і спадною по n. Дійсно, $n\varepsilon_n$ спадає за нерівністю (10), дріб $\dfrac{\varepsilon_n}{\cos(\varepsilon_n + \alpha_n)}$ спадає, тому що

$$\forall n \geq 2: \quad \varphi_n < \varphi_{n+1}, \quad \forall \alpha \in (0, \varphi_n]: \quad F_n(\alpha) > F_{n+1}(\alpha),$$

отже,

$$\forall n \geq 2: \quad F_n(\alpha_{n+1}) > F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{\pi}{\varepsilon_{n+1}} > \frac{\pi}{\varepsilon_n} = F_n(\alpha_n).$$

Звідси з урахуванням монотонного спадання функції F_n маємо

$$\forall n \geq 2: \quad \alpha_{n+1} < \alpha_n.$$

Тому якщо нерівність (9) справджується для деякої пари (n_0, k_0), то вона справджується для всіх пар (n, k_0), $n \geq n_0$, та для всіх пар (n_0, k), $-1 \leq k \leq k_0$.

6. Безпосередні підрахунки лівої частини нерівності (9) показують, що можна покласти $N(-1) = 3$, $N(0) = 4$, $N(1) = 6$, $N(2) = 8$, $N(3) = 9$, $N(4) = 11$.

Лема 3. *Нерівність* (3) *справджується для довільної допустимої зі сталою* $1/n$ *функції* g *і всіх многочленів степеня не вище* $n + k$, *якщо пара* (n, k) *набуває одного зі значень* $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$. *Це твердження є хибним для пар* $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$.

Доведення. Нехай P — многочлен степеня не вище $n + k$, а $L(x) = |P(x)| + |P(-x)|$, $x \in [-1, 1]$.

1. У випадку $(n, k) = (1, 0)$ функція L є монотонно неспадною на $[0, 1]$, як і функція $|g|$. Тому L задовольняє співвідношення (4), що випливає з нерівності Чебишова [3] (теорема 236), звідки за теоремою 3 маємо нерівність (3).

2. З урахуванням тотожностей $|a + b| + |a - b| = |a| + |b| + \| a| - |b\|$, $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, отримаємо, що коли $P(x) = P^* + P^{**}$, де P^* — непарний многочлен, P^{**} — парний многочлен, то $L(x) = 2\max\left\{\left|P^*(x)\right|, \left|P^{**}(x)\right|\right\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Звідси випливає, що оскільки

$$\max\left\{\int_0^1 f(x)\,dx, \int_0^1 h(x)\,dx\right\} \leq \int_0^1 \max\{f(x), h(x)\}\,dx, \ f, h \in C([0, 1]),$$

то для доведення співвідношення (6) досить встановити нерівність

$$|P(x)| \leq n\int_0^1 |P(t)|\,dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \tag{11}$$

для всіх алгебраїчних многочленів P степеня не вище $n + k$, які є або парними, або непарними функціями. Крім того, перевіряти цю нерівність, з огляду на зауваження 4, достатньо для многочленів, що мають $n + k$ різних коренів на $[-1, 1]$.

Очевидно також, що коли нерівність (11) виконується для многочлена P при деякому $n = n_0$, то вона виконується для цього многочлена і при $n \geq n_0$.

3. Очевидно, що для $P(x) = x$ нерівність (11) виконується при $n = 2$. Для $P(x) = x^2 - b^2$, $b \in (0, 1]$, співвідношення (11) також справджується, оскільки $2\int_0^1 \left|t^2 - b^2\right| dt = \dfrac{8b^3}{3} + \dfrac{2}{3} - 2b^2 \geq \max\left\{b^2, \dfrac{1}{4} - b^2\right\} \geq \left|x^2 - b^2\right|, x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (перша нерівність доводиться методами диференціального числення, а друга є очевидною). Таким чином, враховуючи теорему 3, одержуємо нерівність (3) у випадку $(n, k) = (2, 0)$.

4. Нехай $P(x) = x^3 - b^2x, b \in (0, 1]$. Тоді нерівність (11) виконується, тому що $2\int_0^1 \left|t^3 - b^2t\right| dt = 2\int_0^b (b^2t - t^3)\,dt + 2\int_b^1 (t^3 - b^2t)\,dt = 2\left(\dfrac{b^4}{4} - \dfrac{b^4}{4} + \dfrac{b^4}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{b^2}{2}\right) = b^4 + \dfrac{1}{2} - b^2 \geq \left|x^3 - b^2x\right|, x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Остання нерівність є правильною, бо $b^4 + (x - 1)b^2 + \dfrac{1}{2} - x^3 \geq 0$ і $b^4 - (x + 1)b^2 + \dfrac{1}{2} + x^3 \geq 0, x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, що встановлюється методами аналізу.

Таким чином, враховуючи теорему 3, отримуємо нерівність (3) у випадку $(n, k) = (2, 1)$ і у випадку $(n, k) = (3, 0)$.

5. Встановимо нерівність (11) для непарних многочленів $P(t) = P_{2m+1}(t) = t^{2m+1} + a_{m-1}t^{2m-1} + \ldots + a_0 t$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо $G(s) := s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_0$, $s \in \mathbb{R}$. Далі виконуємо заміну $s = t^2$ і використовуємо нерівність Бернштейна для похідної алгебраїчного многочлена [4] (гл. V, § 2, наслідок до теореми 1):

$$n\int_0^1 |P(t)|dt = \frac{n}{2}\int_0^1 |G(s)|ds \geq \frac{n}{2}\max_{s\in[-1,1]}\left|\int_0^s |G(u)|du\right| \geq \frac{n}{2}\max_{s\in[-1,1]}\left|\int_0^s G(u)du\right| \geq$$

$$\geq \frac{n}{2}\frac{\sqrt{1-(x^2)^2}}{m+1}\left|\left(\int_0^s G(u)du\right)'(x^2)\right| = \frac{n}{2}\frac{\sqrt{1-x^4}}{m+1}\left|G(x^2)\right| \geq$$

$$\geq \frac{n^2}{2(m+1)}\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}\,x\left|G(x^2)\right| = \frac{\sqrt{n^4-1}}{2m+2}|P(x)|, \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

Якщо $n = 4$, $k = 3$, $m \leq 2$, то $\dfrac{\sqrt{n^4-1}}{2m+2} \geq \dfrac{\sqrt{80}}{2\cdot 3} \geq 1$. Якщо $n \geq 3$, $k = 2$, $2m + 1 \leq n + k$, то $\dfrac{\sqrt{n^4-1}}{2m+2} \geq \dfrac{\sqrt{n^4-1}}{n+3} \geq 1$. Тому нерівність (11) виконується для всіх непарних многочленів степеня не вище $n + k$ у випадку $(n, k) = (4, 3)$ та при $n \geq 3$ і $k = 2$.

6. Щоб довести першу частину леми, залишилось перевірити нерівність (11) для парних алгебраїчних многочленів степеня 4 при $n = 3$ і степеня 6 при $n = 4$.

Розглянемо функції

$$R_1(b, c, x) = 3\int_0^1 \left|(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)\right|dt -$$

$$- \left|(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)\right|, \quad b,\ c \in [0, 1], \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

$$R_2(a, b, c, x) = 4\int_0^1 \left|(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)\right|dt -$$

$$- \left|(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)\right|, \quad a, b,\ c \in [0, 1],\ x \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Для них з використанням комп’ютера доведемо, що вони невід’ємні на своїх множинах визначення. Для цього прирівнюємо до нуля похідну по x, з отриманого рівняння виражаємо x через інші змінні, а змінні a, b, c перебираємо з достатньо дрібним кроком. Звідси за теоремою 3 випливає перша частина леми.

7. Контрприклади для відповідних пар: якщо $(n, k) = (1, 1)$, то $g = \mathcal{X}_{[-1,-1/2]\cup[1/2,1]}$, $P(x) = 1 - x^2$; якщо $(n, k) = (2, 2)$, то $g = \mathcal{X}_{[-1,-1/5]\cup[1/5,1]}$, $P(x) = (0{,}49 - x^2)(0{,}81 - x^2)$; якщо $(n, k) = (3, 3)$, то $g = \mathcal{X}_{[-1,-1/30]\cup[1/30,1]}$, $P(x) = (0{,}25 - x^2)(0{,}64 - x^2)(0{,}81 - x^2)$.

Лему 3 доведено.

***Зауваження* 7.** На підставі зауваження 1 нерівність (3) виконується також для пар $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ і є хибною для $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$. Це разом із зауваженням 6 свідчить про правильність заповнення таблиці на початку статті.

Лема 4. *Нехай виконується умова теореми* 5. *Нехай також функція* $P \in$ $\in L_1\big([-1,1]^{m-1}\big)$ *для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *як функція однієї* j*-ї змінної при всіх фіксованих інших змінних задовольняє одну з умов* (4) – (6) *з заміною* n *на* n_j, *причому ці умови при різних* j *можуть бути різними*, *але при фіксованому* j *повинні залишатись тими самими при різному фіксуванні інших змінних*. *Тоді справджується нерівність* (7).

Доведення проводиться індукцією по m дослівним повторенням міркувань з доведення леми 5 з роботи [2], якщо врахувати, що за умов доводжуваної леми при $m \geq 2$ функція $[-1,1] \prod y \mapsto \left\| g\left(\frac{\cdot}{n_1}, \frac{\cdot}{n_2}, \ldots, \frac{\cdot}{n_{m-1}}, y\right)\right\|_{L_1([-1,1]^m)}$ є допустимою зі сталою $1/n_m$, а функція $[-1,1] \prod y \mapsto \| P(\cdot, \ldots, \cdot, y) \|_{L_1([-1,1]^{m-1})}$ задовольняє ту саму умову з (4) – (6), що й усі функції $[-1,1] \prod y \mapsto P(x_1, \ldots, x_{m-1}, y)$ при різних $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in [-1,1]^{m-1}$.

***Доведення теореми* 5** випливає з лем 2 – 4.

1. *Kopotun K. A., Levitan D., Shevchuk I. A.* Coconvex approximation in the uniform norm: the final frontier // Acta math. hung. – 2006. – **110**, № 1 – 2. – P. 117 – 151.
2. *Нестеренко О. Н., Чайковський А. В.* Про одну нерівність для алгебраїчних поліномів та цілих функцій експоненціального типу // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2004. – Вип. 11. – С. 13 – 19.
3. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: КомКнига, 2006. – 456 с.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Одержано 24.06.08,
після доопрацювання — 30.10.08