УДК 517.957

Б. А. Искендеров, Э. С. Гусейнова (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОРРЕКТНОГО ПО ПЕТРОВСКОМУ УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

We study the existence and uniqueness of a solution of a mixed problem for the Petrovskii well-posed equation in a cylindrical domain and the behavior of this solution for large values of time.

Вивчено існування, єдиність розв'язку мішаної задачі для коректного за Петровським рівняння у циліндричній області та його поведінку при великих значеннях часу.

1. Введение. При изучении распространения возмущений в вязком газе возникает уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 - a^2\Delta_3\right)u(t,x) = 0,$$
$$x = \bigl(x_1, x_2, x_3\bigr) \in R_3, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\omega = \dfrac{4}{3}\nu$, ν — кинематический коэффициент вязкости, a — скорость звука в газе, Δ_3 — оператор Лапласа по (x_1, x_2, x_3) [1]. В работе [2], как результат исследования решения задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения, приведено достаточное условие стабилизации при больших значениях времени решения задачи Коши для уравнения (1) с периодическими начальными данными. В работе [3] изучена смешанная задача для уравнения (1) в ограниченной области многомерного пространства, а в работе [4] — поведение решения задачи Коши для уравнения типа (1) в многомерном пространстве при больших значениях времени.

В настоящей работе изучаются существование, единственность решения смешанной задачи для корректного по Петровскому уравнения в цилиндрической области и асимптотика решения смешанной задачи при больших значениях времени.

2. Определения, обозначения и теорема о единственности решения смешанной задачи. Обозначим через $R_{n+m}(x,y)$ $(n+m)$-мерное евклидово пространство с элементами $(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, через $\mathrm{E} = R_n(x) \times \Omega$ — цилиндрическую область в R_{n+m}, где Ω — ограниченная область в $R_m(y)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $Q = (0,\infty) \times \mathrm{E}$ рассмотрим смешанную задачу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{n,m} - a^2\Delta_{n,m}\right)u(t,x,y) = f(t,x,y) \tag{2.1}$$

с начальными функциями

$$u(0,x,y) = \varphi_0(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(0,x,y) = \varphi_1(x,y) \tag{2.2}$$

и краевым условием

$$u(t,x,y)|_{\partial\mathrm{E}} = 0, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

где $\varphi_j(x,y)$, $f(t,x,y)$, $j = 0,1,$ — заданные функции, а

$$\Delta_{n,m} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2}.$$

Условия на данные задачи будут сформулированы ниже. Отметим, что уравнение (2.1) является корректным по Петровскому.

Введем пространство функций $H^{(\alpha,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)$, элементы которого имеют производные в смысле Соболева – Слободецкого по x до порядка α, а по y до порядка β, для которых

$$\int\limits_{\mathrm{E}} \rho(x) \sum_{|\theta|=0}^{\alpha} \sum_{|j|=0}^{\beta} \left(D_x^{(\theta)} D_y^{(j)} v(x,y)\right)^2 d\mathrm{E} \leq C,$$

где $\rho(x) \geq 0$ — измеримая и растущая на бесконечности функция, $\alpha,\ \beta \geq 0$ — целые числа, $C > 0$ — некоторая постоянная. Это пространство является банаховым пространством, норма элементов которого определяется следующим образом:

$$\|v(x,y)\|_{H^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))} = \left\{ \int\limits_{\mathrm{E}} \rho(x) \sum_{|\theta|=0}^{\alpha} \sum_{|j|=0}^{\beta} \left(D_x^{(\theta)} D_y^{(j)} v(x,y)\right)^2 d\mathrm{E} \right\}^{1/2}.$$

Через $C^2\left[[0,\infty), H^{(\alpha,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)\right]$ будем обозначать пространство функций $u(t,x,y)$, непрерывно дифференцируемых по t до второго порядка включительно и при каждом $t > 0$ принадлежащих пространству $H^{(\alpha,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)$.

Через $C_\varepsilon^2\left[[0,\infty), \overset{\circ}{H}{}^{(\alpha,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)\right]$ обозначим подпространство пространства $C^2\left[[0,\infty), H^{(\alpha,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)\right]$, элементы которого при каждом $t > 0$ удовлетворяют граничному условию (2.3) и неравенству

$$\left\|u(t,x,y)\right\|_{H^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))} \leq Ce^{\varepsilon t}, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, C — некоторая постоянная.

Определение. *Под решением задачи* (2.1) – (2.3) *будем понимать функцию* $u(t,x,y) \in C_\varepsilon^2\left[[0,\infty), \overset{\circ}{H}{}^{(2,2)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)\right]$, *удовлетворяющую уравнению* (2.1) *и начальным данным* (2.2) *почти всюду.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если решение однородной задачи, соответствующей задаче* (2.1) – (2.3), *существует, то оно почти всюду равно нулю.*

Доказательство. Умножим однородное уравнение на $u(t,x,y)$ и проинтегрируем по $(0,t) \times \mathrm{E}_R$, где $\mathrm{E}_R = \Omega \times \sigma_R(x), \sigma_R(x)$ — шар радиуса R с центром в начале координат:

$$\varepsilon_R(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x,y)\right) u(t,x,y) d\mathrm{E}_R dt -$$

$$- \omega \int\limits_0^t \int\limits_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{n,m} u(t,x,y)\right) u(t,x,y) d\mathrm{E}_R dt -$$

$$-\,a^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathrm{E}_R}\left(\Delta_{n,m}u(t,x,y)\right)u(t,x,y)d\mathrm{E}_R dt\equiv$$

$$\equiv\varepsilon_{1R}(t)+\omega\varepsilon_{2R}(t)-a^2\varepsilon_{3R}(t)=0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (2.5) в отдельности. Интегрируя в $\varepsilon_{1R}(t)$ один раз по t по частям и учитывая равенство нулю начальных функций для однородной задачи, получаем

$$\varepsilon_{1R}(t)=-\int\limits_{\mathrm{E}_R}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)^2 d\mathrm{E}_R.$$

Устремляя R к бесконечности в $\varepsilon_{1R}(t)$, находим

$$\varepsilon_1(t)=-\int\limits_{\mathrm{E}_R}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)^2 d\mathrm{E}_R. \tag{2.6}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.5). По первой формуле Грина [5] имеем

$$\varepsilon_{2R}(t)=-\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\mathrm{E}_R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x,y)d\mathrm{E}_R dt\,-$$

$$-\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t\int\limits_{\mathrm{E}_R}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)\frac{\partial}{\partial y_j}u(t,x,y)d\mathrm{E}_R dt\,+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\mathrm{E}_R}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)u(t,x,y)ds_R dt\equiv\varepsilon_{2R}^{(1)}(t)+\varepsilon_{2R}^{(2)}(t)+\varepsilon_{2R}^{(3)}(t),$$

где $\partial\mathrm{E}_R=\partial\Omega\times\sigma_R(x)\cup\Omega\times\partial\sigma_R(x)$, $\sigma_R(x)$ — шар радиуса R с центром в начале координат, $\partial\Omega_R$ — поверхность шара Ω_R, ds — элемент поверхности $\partial\mathrm{E}_R$, $\partial\nu$ — внешняя нормаль к поверхности $\partial\mathrm{E}_R$.

Учитывая граничное условие (2.3), получаем

$$\varepsilon_{2R}^{(3)}(t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right)u(t,x,y)dsdt.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\cos(\nu,x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\cos(\nu,x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

применяя неравенство Коши – Буняковского к $\varepsilon_{2R}^{(3)}(t)$, имеем

$$\varepsilon_{2R}^{(3)}(t)\le\left\{\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)}u^2(t,x,y)dsdt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^t \int_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x,y) \right)^2 ds dt \right\}^{1/2}.$$

Используя теорему вложения Соболева [6], оцениваем первый интеграл в $\varepsilon_{2R}^{(3)}(t)$:

$$\int_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)} u^2(t,x,y) ds \le e^{-c_0 R} \int_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)} e^{c_0|x|} u^2(t,x,y) ds \le$$

$$\le C e^{-c_0 R} \left\| u(t,x,y) \right\|_{H^{(2,2)}} (\mathrm{E}, \rho(x)).$$

Устремляя R к бесконечности, получаем

$$\int_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)} u^2(t,x,y) ds \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty \quad \text{и любом} \quad t>0. \tag{2.7}$$

Аналогично показываем, что

$$\int_{\Omega\times\partial\sigma_R(x)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x,y) ds \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty \quad \text{и любом} \quad t>0. \tag{2.8}$$

Учитывая, что для однородной задачи $\varphi_0(x,y)\equiv 0$, $\varphi_1(x,y)\equiv 0$, имеем

$$\varepsilon_{2R}^{(1)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E}_R, \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{2R}^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E}_R. \tag{2.10}$$

Применяя первую формулу Грина [5] и учитывая нулевое граничное условие, находим

$$\varepsilon_{3R}(t) = -\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E}_R - \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \int_{\mathrm{E}_R} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E}_R. \tag{2.11}$$

Введем обозначения

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{E}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E} = \left\| \nabla_x u(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E})}^2, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\mathrm{E}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E} = \left\| \nabla_y u(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E})}^2. \tag{2.13}$$

Переходя в (2.5) – (2.10) к пределу при $R\to+\infty$ и учитывая (2.12), (2.13), получаем

$$\varepsilon(R) = -\int_{\mathrm{E}} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t,x,y) \right)^2 d\mathrm{E} - \frac{\omega}{2} \left\| \nabla_x u(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E})}^2 -$$

$$-\frac{\omega}{2}\left\|\nabla_y u(t,x,y)\right\|^2_{L_2(\mathrm{E})} - a^2\int\limits_0^t \left\|\nabla_x u(t,x,y)\right\|^2_{L_2(\mathrm{E})} dt -$$

$$- a^2\int\limits_0^t \left\|\nabla_y u(t,x,y)\right\|^2_{L_2(\mathrm{E})} dt = 0 \qquad (2.14)$$

при любом $t > 0$. Учитывая значения начальных данных для однородной задачи и граничное условие (2.3), имеем

$$u(t,x,y) \equiv 0$$

при любом $t > 0$.

Теорема 2.1 доказана.

3. Построение функции Грина стационарной задачи. Для построения решения смешанной задачи (2.1)–(2.3) изучим стационарную задачу, соответствующую задаче (2.1)–(2.3). С учетом оценки (2.4) выполним преобразование Лапласа над задачей (2.1)–(2.3). В результате получим

$$\left(k^2 - k\omega\Delta_{n,m} - a^2\Delta_{n,m}\right) V(k,x,y) = \mathcal{F}(k,x,y), \qquad (3.1)$$

$$V(k,x,y)|_{\partial\mathrm{E}} = 0, \qquad (3.2)$$

где $\operatorname{Re} k \geq \varepsilon > 0$, $V(k,x,y)$ — преобразование Лапласа по t от $u(t,x,y)$, знак $\wedge$ над функцией обозначает преобразование Лапласа по t этой функции, а

$$\mathcal{F}(k,x,y) = \widehat{f}(k,x,y) + \varphi_1(x,y) + (k - \omega\Delta_{n,m})\varphi_0(x,y).$$

Учитывая оценку (2.4), применяем к задаче (3.1), (3.2) преобразование Фурье по x. Тогда

$$\left(k^2 + \left(\omega k + a^2\right)|s|^2\right)\widetilde{V}(k,s,y) - (\omega k + a^2)\Delta_m \widetilde{V}(k,s,y) = \widetilde{\mathcal{F}}(k,s,y), \qquad (3.3)$$

$$\widetilde{V}(k,s,y)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (3.4)$$

где знак $\sim$ над функцией обозначает преобразование Фурье по x.

Рассмотрим дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением $\widetilde{L} = \Delta_m$, с областью определения

$$D(L) = \left\{u(y)\colon u(y) \in W_2^1(\Omega), \widetilde{L}u \in L_2(\Omega)\right\}.$$

Оператор L отрицательно-самосопряженный, спектр его дискретен и для собственных значений λ_l имеет место неравенство

$$0 > \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l \geq \ldots, \qquad \lim_{l\to+\infty} \lambda_l = -\infty.$$

Собственные функции $\psi_l(y)$ оператора L, соответствующие собственным значениям λ_l, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ [7]. Использовав этот факт, докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Функция Грина задачи* (3.1), (3.2) *является аналитической функцией от комплексного параметра k в полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq \varepsilon$, и для нее имеет место представление*

$$G(k,x,y,z) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|x|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)\psi_l(z), \tag{3.5}$$

где $H^{(1)}_{n/2-1}(z)$ — функция Ханкеля первого рода.

При $|x| \geq \delta > 0$ ряд в (3.5) *сходится равномерно по (k,x,y,z) в каждом компакте из $\{\operatorname{Re} k \geq \varepsilon\} \times \mathrm{E} \times \Omega$ и его можно дифференцировать по (x,y) любое число раз. Функция* (3.5) *допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} k < \varepsilon$, в которой имеет точки ветвления*

$$k^{(l)}_{1,2} = -\frac{|\lambda_l|\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{|\lambda_l|^2\omega}{4} - |\lambda_l|a^2},$$

из которых $k^{(l)}_1 \to -\dfrac{a^2}{\omega}$, $k^{(l)}_2 \to -\infty$ при $l \to +\infty$. При нечетных n точки ветвления являются алгебраическими, а при четных n — трансцендентными.

Доказательство. Используя теорему 3.6 из [7] для решения задачи (3.3), (3.4), имеем

$$\widetilde{V}(k,s,y) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{C_l(s,k)\psi_l(y)}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right) + k^2 - \left(a^2+\omega k\right)\lambda_l},$$

где

$$C_l(s,k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Omega}\widetilde{\mathcal{F}}(k,s,y)\psi_l(y)dy. \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) определяется как обратное преобразование Фурье от (3.6):

$$V(k,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_l(y)\int\limits_{R_n}\frac{C_l(s,k)e^{-i(s,x)}ds}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right) + k^2 - \left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}. \tag{3.7}$$

Здесь интегрирование законно в силу равномерной сходимости ряда в (3.6), которая будет показана ниже.

Вычислим интегралы в (3.7). Подставляя выражение $C_l(s,k)$ из (3.6) в (3.7), получаем

$$V(k,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_l(y)\int\limits_{R_n}\mathcal{F}_l(k,\xi)\left[\int\limits_{R_n}\frac{e^{i(s,x-\xi)}ds}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right) + k^2 - \left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}\right]d\xi, \tag{3.8}$$

где

$$\mathcal{F}_l(k,\xi)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(k,\xi,y)\psi_l(y)dy.$$

Теперь вычислим интеграл в (3.8). Обозначим $\tau=x-\xi$ и

$$J_l(\tau,k)=\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{|s|\le N}\frac{e^{i(s,\tau)}ds}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}. \tag{3.9}$$

Переходя в (3.9) к сферическим координатам и учитывая при этом сферическую симметричность подынтегральной функции, находим

$$J_{l,N}(\tau,k)=(2\pi)^{-(n/2+1)}|\tau|^{1-n/2}\int\limits_0^N\frac{|s|^{n/2}J_{n/2-1}\left(|\tau||s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}, \tag{3.10}$$

где $J_{n/2-1}(z)$ — функции Бесселя порядка $n/2-1$.

Далее, вычислим интеграл в (3.10). Пусть n — нечетное число. Тогда $z^{n/2}J_{n/2-1}(z)$ есть четная функция. Поэтому

$$J_{l,N}(\tau,k)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n/2+1)}|\tau|^{1-n/2}\int\limits_{-N}^N\frac{|s|^{n/2}J_{n/2-1}\left(|\tau||s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}. \tag{3.11}$$

Используем формулу

$$J_{n/2-1}(z)=\frac{1}{2}\left(H^{(1)}_{n/2-1}(z)+H^{(2)}_{n/2-1}(z)\right) \tag{3.12}$$

из [8], где $H^{(1,2)}_\nu(z)$ — функции Ханкеля I и II рода. Подставляя (3.12) в (3.11), получаем

$$\begin{gathered}J_{l,N}(\tau,k)=\\=\frac{1}{4}(2\pi)^{-(n/2+1)}|\tau|^{1-n/2}\left\{\int\limits_{-N}^N\frac{|s|^{n/2}H^{(1)}_{n/2-1}\left(|\tau||s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}+\right.\\\left.+\int\limits_{-N}^N\frac{|s|^{n/2}H^{(2)}_{n/2-1}\left(|\tau|\,|s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}\right\}\equiv\\\equiv J^{(1)}_{l,N}(\tau,k)+J^{(2)}_{l,N}(\tau,k).\end{gathered} \tag{3.13}$$

Подынтегральные функции в (3.13) имеют полюсы в точках

$$|s|^{(l)}_{1,2}=\pm i\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}.$$

При $\operatorname{Re}k>0$ корни $|s|^{(l)}_{1,2}$ расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях, симметрично относительно вещественной оси.

Учитывая асимптотику функции Ханкеля $H^{(1,2)}_\nu(z)$ [9] при больших значениях аргумента, получаем, что подынтегральная функция в $J^{(1)}_{l,N}(\tau,k)$ в полуплоскости

$\mathrm{Im}|s| > 0$, $|s| \to \infty$, экспоненциально убывает. Выходя в верхнюю полуплоскость и применяя метод вычетов, находим

$$J^{(1)}_{l,N}(\tau,k) = \frac{i}{8}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right).$$

Выходя в нижнюю полуплоскость $\mathrm{Im}|s| < 0$, аналогичным образом имеем

$$J^{(2)}_{l,N}(\tau,k) = -\frac{i}{8}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\times$$

$$\times\left(-i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} H^{(2)}_{n/2-1}\left(-i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right).$$

Учитывая формулу

$$H^{(2)}_{n/2-1}(-z) = (-1)^{n/2-1}H^{(1)}_{n/2-1}(z), \tag{3.14}$$

из [9] получаем

$$J^{(1)}_{l,N}(\tau,k) = J^{(2)}_{l,N}(\tau,k). \tag{3.15}$$

Подставляя значения $J^{(1)}_{l,N}(\tau,k)$, $J^{(2)}_{l,N}(\tau,k)$ в (3.13), учитывая (3.14) и устремляя N к бесконечности, находим

$$J_l(\tau,k) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right). \tag{3.16}$$

Пусть теперь n — четное число. Выражая функцию Бесселя через функции Ханкеля по формуле (3.12), имеем

$$J_{l,N}(\tau,k) = \frac{(2\pi)^{-(n/2+1)}}{2}|\tau|^{1-n/2}\int\limits_0^N \frac{|s|^{n/2}\Big(H^{(1)}_{n/2-1}\left(|\tau|\,|s|\right) + H^{(2)}_{n/2-1}\left(|\tau|\,|s|\right)\Big)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right) + k^2 - \left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}. \tag{3.17}$$

Поскольку при четных n

$$H^{(2)}_{n/2-1}(z) = (-1)^{n/2}H^{(2)}_{n/2-1}(z),$$

интеграл в (3.17) можно привести к виду

$$J_{l,N}(\tau,k) = \frac{(2\pi)^{-(n/2+1)}}{2}|\tau|^{1-n/2}\int\limits_{-N}^N \frac{|s|^{n/2}H^{(1)}_{n/2-1}\left(|\tau||s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right) + k^2 - \left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}.$$

При $\operatorname{Im}|s| > 0$, действуя так же, как при вычислении $J^{(1)}_{l,N}(\tau,k)$, и устремляя N к бесконечности, получаем

$$J_l(\tau,k) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right).$$

При $\operatorname{Im}|s| < 0$, используя формулу (3.14), интеграл в (3.17) можно привести к виду

$$J_{l,N}(\tau,k) = \frac{(2\pi)^{-(n/2+1)}}{2}|\tau|^{1-n/2}\int\limits_{-N}^{N}\frac{|s|^{n/2}H^{(2)}_{n/2-1}\left(|\tau|\,|s|\right)d|s|}{|s|^2\left(a^2+\omega k\right)+k^2-\left(a^2+\omega k\right)\lambda_l}.$$

Далее, применяя метод вычетов, при этом выходя в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}|s| <$ < 0, и устремляя N к бесконечности, находим

$$J_l(\tau,k) = -\frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\left(-i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(2)}_{n/2-1}\left(-i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right).$$

Учитывая четность и формулу (3.14), получаем

$$J_l(\tau,k) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|\tau|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|\tau|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right),$$

т. е. формулу (3.16).

Таким образом, для $J_l(\tau,k)$ при нечетных и четных n получили одну и ту же формулу (3.16). Подставляя (3.16) в (3.8) и выделяя $\mathcal{F}(k,\xi,z)$, имеем

$$V(k,x,y) = \int\limits_{\mathrm{E}} G(k,x-\xi,y,z)\mathcal{F}(k,\xi,z)d\mathrm{E}, \tag{3.18}$$

где

$$G(k,x,y,z) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{|x|^{1-n/2}}{a^2+\omega k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$

$$\times H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)\psi_l(z). \tag{3.19}$$

Функция $G(k,x,y,z)$ называется функцией Грина задачи (3.1), (3.2). Изучим теперь сходимость ряда в (3.19). Обозначим через $O_\delta\left(-\dfrac{a^2}{\omega}\right)$ δ-окрестность точки $k=-\dfrac{a^2}{\omega}$.

Тогда в любом компакте $K\subset\mathbb{C}\backslash O_\delta\left(-\dfrac{a^2}{\omega}\right)$ при достаточно большом l имеем

$$\operatorname{Re}\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\geq|\lambda_l|^{1/2}(1-\varepsilon),$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Используя асимптотику функции Ханкеля $H^{(1)}_{n/2-1}(z)$ при больших значениях $|z|$ [9], в компакте K получаем

$$\big|G(k,x,y,z)\big|\leq\frac{C(n,\omega,\varepsilon)}{|k|}\sum_{l=1}^{\infty}|\lambda_l|^{(n-3)/4}e^{-|x|(1-\varepsilon)|\lambda_l|^{1/2}}\left\|\psi_l(y)\right\|^2_{C(\overline{\Omega})}. \tag{3.20}$$

Здесь $C(\sigma,\varepsilon,n)$ — некоторая константа, зависящая от σ, ε, n. В [8] получена следующая оценка собственных функций оператора L:

$$\big\|\psi_l(y)\big\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}\leq C|\lambda_l|^{([m/2]+1+\nu)/2}. \tag{3.21}$$

Известно [10], что

$$C_0 l^{2/m}\leq|\lambda_l|\leq C_1 l^{2/m}, \tag{3.22}$$

где C_0, C_1 — константы, не зависящие от l. Тогда из (3.21) и (3.22) имеем

$$\big\|\psi_l(y)\big\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}\leq Cl^{([m/2]+1+\nu)/m}.$$

Из (3.20) и (3.21) при $\nu=0$ находим

$$\big|G(k,x,y,z)\big|\leq\frac{C(n,\omega,\delta)}{|k|}\sum_{l=1}^{\infty}|\lambda_l|^{((n-3)/4+[m/2]+1)/2}e^{-|x|(1-\varepsilon)|\lambda_l|^{1/2}}. \tag{3.23}$$

Пусть теперь $|x|\geq\delta>0$. Тогда в силу оценки (3.22) ряд в (3.23) сходится равномерно в каждом компакте $K_1\subset\{\operatorname{Re}k\geq\varepsilon\}\times\mathrm{E}\times\Omega$. Используя формулу дифференцирования функций Ханкеля [9] и их асимптотику при больших значениях аргумента так же, как и выше, можно показать, что ряд в (3.19) можно дифференцировать по (x,y) любое число раз. Остальные утверждения теоремы следуют из представления (3.5).

Теорема 3.1 доказана.

4. Существование решения смешанной задачи (2.1) – (2.3) и его оценка при больших значениях времени. Решение смешанной задачи (2.1) – (2.3) определяется как обратное преобразование Лапласа от $V(k,x,y)$:

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}V(k,x,y)e^{kt}dk. \tag{4.1}$$

Подставляя в (4.1) выражение $V(k,x,y)$ из (3.18), получаем

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}e^{kt}\int\limits_{\mathrm{E}}G(k,x-\xi,y,z)\times$$

$$\times\left[\widehat{f}(k,\xi,z)+\varphi_1(\xi,z)+(k-\omega\Delta_{n,m})\,\varphi_0(\xi,z)\right]d\mathrm{E}\,dk\equiv$$

$$\equiv\sum_{\nu=1}^{3}u_\nu(t,x,y). \tag{4.2}$$

Как следует из формулы (4.2), $u_\nu(t,x,y)$ являются обратным преобразованием Лапласа по t от $V_\nu(k,x,y)$, определяемых по формуле

$$\begin{gathered}V_1(k,x,y)=G(k,x,y,z)*\widehat{f}(k,x,y),\\ V_2(k,x,y)=G(k,x,y,z)*\varphi_1(x,z),\\ V_3(k,x,y)=G(k,x,y,z)*(k-\omega\Delta_{n,m})\,\varphi_0(x,z),\end{gathered} \tag{4.3}$$

где свертка совершается по цилиндру Е.

Рассмотрим каждое слагаемое в (4.2) в отдельности. Для изучения сходимости интегралов, входящих в эти слагаемые, докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *При* $|\mathrm{Im}\,k|\geq N$, $\mathrm{Re}\,k\geq 0$ *имеет место неравенство*

$$\mathrm{Re}\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\geq\alpha_1\left(|\lambda_l|+\frac{\mathrm{Re}\,k}{\omega}\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\frac{|\mathrm{Im}\,k|}{\omega}\right)^{1/2},$$

где N *— достаточно большое число,* $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{5/4}}$, $\alpha_2=\dfrac{1}{2^{5/4}}$.

Доказательство. Поскольку для достаточно больших $|k|$

$$\frac{k^2}{a^2+\omega k}\sim\frac{k}{\omega},$$

при $|\mathrm{Im}\,k|\geq N$, $\mathrm{Re}\,k\geq 0$ имеем

$$\mathrm{Re}\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\sim\mathrm{Re}\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k}{\omega}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(|\lambda_l|+\dfrac{\mathrm{Re}\,k}{\omega}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{Im}\,k}{\omega}\right)^2}+|\lambda_l|+\dfrac{\mathrm{Re}\,k}{\omega}}{2}}. \tag{4.4}$$

При любых вещественных a и b

$$\sqrt{a^2+b^2}\geq\frac{|a|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|}{\sqrt{2}}. \tag{4.5}$$

Дважды применив неравенство (4.4) к (4.3), получим

$$\mathrm{Re}\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\geq\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{5/4}}\left(|\lambda_l|+\frac{\mathrm{Re}\,k}{\omega}\right)^{1/2}+\frac{1}{2^{5/4}}\left(\frac{|\mathrm{Im}\,k|}{\omega}\right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будем полагать, что $\rho(x) = e^{C_0|x|}$, где $0 < C_0 < \sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|\lambda_1|}$, λ_1 — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω. Имеет место следующая теорема.

Будем считать $n \geq 3$ и положим

$$\beta = \begin{cases} \left[\dfrac{n-3}{2}\right], & \text{если} \quad n \quad \text{нечетное}, \\ \left[\dfrac{n-3}{2}\right] + 1, & \text{если} \quad n \quad \text{четное}. \end{cases}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{(2m+\beta)}$, $f(t,x,y) = f(x,y)e^{i\omega^* t}$, $f(x,y)$, $\Delta_{n,m}\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x,y) \in H^{(0,\beta)}\left(\mathrm{E}, \rho(x)\right)$.

Тогда для решения $u(t,x,y)$ *задачи* (2.1)–(2.3) *имеет место принцип предельной амплитуды, т. е. при* $t \to +\infty$

$$u(t,x,y) = V(i\omega^*, x, y)e^{i\omega^* t} + W(t,x,y),$$

где $V(i\omega^*, x, y)$ *— решение стационарной задачи* (3.1), (3.2) *при* $k = i\omega^*$ *с правой частью* $f(x,y)$, ω^* *— любое вещественное число,*

$$\left\|W(t,x,y)\right\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))} \leq$$
$$\leq Ce^{\delta t}\left[\|\Delta_{n,m}\varphi_0(\xi,z)\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))} + \|\varphi_1(x,y)\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))}\right],$$

C *— некоторая константа, зависящая от* ω, a, n, m; $-\dfrac{a^2}{\omega} < \delta < 0$.

Доказательство. Рассмотрим

$$V_1(k,x,y) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{1}{a^2+\omega k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathrm{E}} H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x-\xi|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)\psi_l(z)\widehat{f}(k,\xi,z),$$

в силу равномерной сходимости ряда в (3.19)

$$\widehat{f_l}(\xi,k) = \int\limits_{\Omega}\widehat{f}(k,\xi,z)\psi_l(z)dz.$$

Тогда

$$V_1(k,x,y) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\frac{1}{a^2+\omega k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1} \times$$
$$\times \int\limits_{R_n} H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x-\xi|\sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)\widehat{f_l}(\xi,k)d\xi, \tag{4.6}$$

$$u_1(t,x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}e^{kt}V_1(k,x,y)dk=$$

$$=\frac{(2\pi)^{-n/2-1}}{4}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{e^{kt}}{a^2+\omega k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1}\times$$

$$\times\int\limits_{R_n}H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x-\xi|\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)\frac{f_l(\xi)}{k-i\omega}d\xi dk.$$

Выберем число δ так, чтобы $-\dfrac{a^2}{\omega}<\delta<0$, и рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ контур

$$\Gamma=T_{-N}\cup[\delta-iN,\alpha+iN]\cup T_N,$$

где T_{-N}, T_N — лучи, выходящие из точек $k=\pm iN$ и составляющие с мнимой осью углы $\pm\dfrac{\pi}{6}$. Учитывая лемму 4.1 и то, что функция Ханкеля при $|\operatorname{Im}k|\to\infty$ экспоненциально убывает, контур интегрирования в (4.6) можно заменить на Γ, где $-\dfrac{a^2}{\omega}<\delta<0$. Меняя в (4.6) порядок интегрирования и применяя теорему Коши, получаем

$$u_1(t,x,y)=V_1(i\omega^*,x,y)e^{it\omega^*}+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}e^{kt}V_1(k,x,y)dk\equiv V_1(i\omega^*,x,y)+u_{1,\delta}(t,x,y).$$

Оценим норму $u_{1,\delta}(t,x,y)$ при больших t:

$$I_{1,\delta}(t)=\int\limits_{\mathrm{E}}e^{C_0|x|}u^2_{1,\delta}(t,x,y)d\mathrm{E}=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{E}}e^{C_0|x|}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{kt}}{(k-i\omega)\,(a^2+\omega k)}\sum_{l=1}^{\infty}\left(i\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{R_n}|x-\xi|^{1-n/2}H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x-\xi|\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)\psi_l(y)f_l(\xi)d\xi\right]dk\right\}^2d\mathrm{E}. \tag{4.7}$$

Поскольку $\psi_l(y)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega)$, то

$$I_{1,\delta}(t)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R_n}e^{C_0|x|}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{kt}}{(k-i\omega^*)(a^2+\omega k)}\left(i\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1}\times\right.$$

$$\times \left[\int\limits_{R_n} |x-\xi|^{1-n/2} H^{(1)}_{n/2-1} \left(i|x-\xi| \sqrt{|\lambda_l| + \frac{k^2}{a^2+\omega k}} \right)^{n/2-1} f_l(\xi) d\xi \right] dk \Bigg\}^2 dx. \tag{4.8}$$

Теперь оценим интегралы в (4.7). При больших $|\mathrm{Im}\, k|$

$$I_{1,\delta}(t) \le$$

$$\le C \int\limits_{R_n} e^{C_0|x|} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \int\limits_{\Gamma} e^{t \mathrm{Re}\, k} \frac{1}{|k - i\omega^*|\, |a^2+\omega k|} \times \right.$$

$$\times \left(|\lambda_l|^{(n/2-1)/2} + \left| \frac{k}{\omega} \right|^{(n/2-1)/2} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{R_n} |x-\xi|^{1/2-n/2} \frac{1}{|k-i\omega| \left| \sqrt{|\lambda_l| + \dfrac{k^2}{a^2+\omega k}} \right|} \times$$

$$\left. \times\, e^{-|x-\xi|(\alpha_1|\lambda_l|^{1/2} + \alpha_2 |\mathrm{Im}\, k/\omega|^{1/2})} \big| f_l(\xi) \big| d\xi \big| dk \big| \right\}^2 dx \equiv$$

$$\equiv C \int\limits_{R_n} e^{C_0|x|} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(I^{(1)}_{1,\delta,l}(x,t) \right)^2 + \left(I^{(2)}_{1,\delta,l}(x,t) \right)^2 \right] dx,$$

$$I^{(1)}_{1,\delta,l}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Gamma} e^{t \mathrm{Re}\, k} \frac{|\lambda_l|^{(n/2-1)/2}}{|k-i\omega||a^2+\omega k|} \times$$

$$\times \int\limits_{R_n} |x-\xi|^{(1-n)/2} \frac{1}{\left| \sqrt{|\lambda_l| + \dfrac{k^2}{a^2+\omega k}} \right|} \times$$

$$\times e^{-|x-\xi|\left(\alpha_1|\lambda_l|^{1/2} + \alpha_2 |\mathrm{Im}\, k/\omega|^{1/2}\right)} |f_l(\xi)|\, d\xi\, |dk|, \tag{4.9}$$

$$I^{(2)}_{1,\delta,l}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Gamma} e^{t \mathrm{Re}\, k} \frac{1}{|k-i\omega|\, |a^2+\omega k|} \left| \frac{k}{\omega} \right|^{(n/2-1)/2} \times$$

$$\times \int\limits_{R_n} |x-\xi|^{(1-n)/2} \frac{1}{\left| \sqrt{|\lambda_l| + \dfrac{k^2}{a^2+\omega k}} \right|} \times$$

$$\times e^{-|x-\xi|\left(\alpha_1|\lambda_l|^{1/2} + \alpha_2 |\mathrm{Im} k/\omega|^{1/2}\right)} |f_l(\xi)|\, d\xi\, |dk|. \tag{4.10}$$

Оценивая внешний интеграл в (4.10), при больших t имеем

$$I^{(1)}_{1,\delta,l}(x,t) \le Ce^{\delta t}|\lambda_l|^{n/4-1} \int\limits_{R_n} |x-\xi|^{(1-n)/2} e^{-\alpha_1|\lambda_l|^{1/2}|x-\xi|}\, |f_l(\xi)|\, d\xi.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, находим

$$I^{(1)}_{1,\delta,l}(x,t) \le Ce^{\delta t}|\lambda_l|^{n/4-1} \left\{ \int\limits_{R_n} |x-\xi|^{1-n} e^{-\alpha_1|\lambda_l|^{1/2}|x-\xi|} d\xi \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{R_n} e^{-\alpha_1|\lambda_l|^{1/2}|x-\xi|} f_l^2(\xi) d\xi \right\}^{1/2} \le$$

$$\le Ce^{\delta t}|\lambda_l|^{\beta/2} e^{-\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|x|} \left\{ \int\limits_{R_n} e^{\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|\xi|} f_l^2(\xi) d\xi \right\}^{1/2}.$$

Аналогичным образом получаем

$$I^{(2)}_{1,\delta,l}(x,t) \le Ce^{\delta t} e^{-\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|x|} \left\{ \int\limits_{R_n} e^{\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|\xi|} f_l^2(\xi) d\xi \right\}^{1/2}. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в (4.9), имеем

$$I_{1,\delta}(t) \le Ce^{2\delta t} \int\limits_{R_n} e^{\left(C_0 - 2\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}\right)|x|} \times$$

$$\times \left[\sum_{l=1}^{\infty} \left(|\lambda_l|^{\beta} + 1\right) \int\limits_{R_n} e^{\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|\xi|} f_l^2(\xi) d\xi \right] dx. \tag{4.12}$$

В силу условий на функцию $f(x,y)$, меняя порядок суммирования и интегрирования и учитывая формулу (35) из [10], находим

$$I_{1,\delta}(t) \le Ce^{2\delta t} \int\limits_{R_n} e^{\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|\xi|} \left\| f(\xi,z) \right\|^2_{H^{\beta}(\Omega)} d\xi \le$$

$$\le Ce^{2\delta t} \left\| f(\xi,z) \right\|^2_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))},$$

где $H^{\beta}(\Omega)$ — пространство Соболева – Слободецкого. Отсюда получаем

$$\left\| u_{1,\delta}(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))} \le C^{\delta t} \left\| f(\xi,z) \right\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))}, \tag{4.13}$$

$u_2(t,x,y)$ и $u_3(t,x,y)$ оцениваются точно так же, как $u_{1\delta}(t,x,y)$. Поэтому при больших $t>0$ имеем

$$\begin{gathered} \left\| u_2(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))} \le C^{\delta t} \left\| \varphi_1(\xi,z) \right\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))}, \\ \left\| u_3(t,x,y) \right\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))} \le C^{\delta t} \left\| \Delta_{n,m}\varphi_0(\xi,z) \right\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) следует доказательство теоремы 4.1.

Теперь рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) в случае, когда правая часть уравнения (2.1) $f(t,x,y)$ не является периодической функцией от времени. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если* $f(t,x,y)\in C^0\big[[0,\infty),H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))\big]$ *и выполнены остальные условия теоремы* 4.1, *то для решения смешанной задачи* (1.1)–(1.3) *при больших* t *имеет место оценка*

$$\big\|u(t,x,y)\big\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))}\le C\left\{\left[\int\limits_0^t\big\|f(t,x,y)\big\|^2_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))}dt\right]^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\,e^{\delta t}\Big[\big\|\Delta_{n,m}\varphi_0(\xi,z)\big\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))}+\|\varphi_1(x,y)\|_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))}\Big]\right\}.$$

Доказательство. Поскольку $\{\psi_l(y)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, по формуле Парсеваля имеем

$$\int\limits_\Omega u_1^2(t,x,y)dy=\sum_{l=1}^\infty\left|\int\limits_0^t\left\{\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{e^{k\tau}}{a^2+\omega k}\left(i\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)^{n/2-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{R_n}|x-\xi|^{1-n/2}H^{(1)}_{n/2-1}\left(i|x-\xi|\sqrt{|\lambda_l|+\frac{k^2}{a^2+\omega k}}\right)f_l(t-\tau,\xi)d\xi\right\}d\tau\right|^2.$$

Здесь также применена формула Эфроса. Рассуждая так же, как при оценке $I_{1,\delta}(t)$, получаем

$$\int\limits_\Omega u_1^2(t,x,y)dy\le C(\omega,\delta,n)e^{-2\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|x|}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\left[\int\limits_{R_n}e^{\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|\xi|}\left(\sum_{l=1}^\infty\big(1+|\lambda_1|^\beta\big)f_l^2(t-\tau,\xi)\right)d\xi\right]d\tau\le$$

$$\le C(\omega,\delta,n)e^{-2\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}|x|}\int\limits_0^t\big\|f(t-\tau,\xi,y)\big\|^2_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(\xi))}d\tau. \tag{4.15}$$

Умножая обе части (4.15) на $e^{C_0|x|}$ и интегрируя по R_n, находим

$$\int\limits_\mathrm{E}e^{C_0|x|}u_1^2(t,x,y)d\mathrm{E}\le$$

$$\le C(\omega,\delta,n)\int\limits_{R_n}e^{\left(C_0-2\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}\right)|x|}dx\int\limits_0^t\big\|f(t-\tau,\xi,y)\big\|^2_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))}d\tau.$$

Отсюда при $C_0 < 2\alpha_1|\lambda_1|^{1/2}$

$$\|u_1\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))} \leq C(\omega,\delta,n)\left\{\int\limits_0^t \left\|f(\tau,\xi,y)\right\|^2_{H^{(0,\beta)}(\mathrm{E},\rho(x))} d\tau\right\}^{1/2}. \qquad (4.16)$$

Из (4.2), (4.14), (4.16) следует доказательство теоремы 4.2.

Замечание. Как следует из формулы (4.15), если $f(t,x,y) \equiv 0$, то $\left\|u(t,x,y)\right\|_{L_2(\mathrm{E},\rho(x))}$ при больших t экспоненциально убывает.

1. *Войт С. С.* Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Уч. зап. МГУ им. М. В. Ломоносова. Механика. – 1954. – **5**, № 172. – С. 125 – 142.
2. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Шкляр А. Я.* О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. РАН. – 1995. – **341**, № 6. – С. 734 – 736.
3. *Iskenderov B. A., Huseynova E. S.* On a mixed problem in boundary domain for one equation correct by Petrovskii and estimate of its solution // Trans. NAS Azerbaijan. Ser. Phys.-Techn., Math. Sci. – 2005. – **25**, № 7. – P. 31 – 40.
4. *Huseynova E. S.* On a behaviour of the solution of Cauchy problem for one correct by Petrovsky equation at large time // Ibid. – 2006. – **26**, № 7. – P. 85 – 96.
5. *Владимиров В. С.* Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 5. – 655 с.
7. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.
8. *Iskenderov B. A.* Principles of radiation for elliptic equation in the cylindrical domain // Colloq. math. sic. Janos Bolyai. Szeged, Hungary. – 1988. – P. 249 – 261.
9. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. – М.: Наука, 1974. – 303 с.
10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

Получено 09.10.07