УДК 531.31; 519.21

М. И. Тлеубергенов, Д. Т. Ажымбаев
(Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАДАННОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ МНОГООБРАЗИЮ, НЕ ЗАВИСЯЩЕМУ ОТ СКОРОСТЕЙ

We construct the Lagrange equation, the Hamilton equation, and the Birkhoff equation on the basis of given properties of motion under random perturbations. The random disturbing forces are assumed to belong to the class of Wiener processes and the given properties of motion are assumed to be independent of velocities. The obtained results are illustrated by the example of motion of Earth's satellite under the action of gravitation and aerodynamic forces.

Побудовано рівняння Лагранжа, Гамільтона та Біркгофа за заданими властивостями руху при наявності випадкових збурень. При цьому припускають, що випадкові збурні сили належать класу вінерових процесів, а задані властивості руху не залежать від швидкостей. Отримані результати проілюстровано на прикладі руху штучного супутника Землі під дією сил тяжіння та аеродинамічних сил.

В работе [1] построено множество обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) (см., например, [2, 3]). Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [3].

Постановка задачи. По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \lambda \in R^m, \quad x \in R^m, \quad \lambda \in C_{xt}^{22}, \tag{1}$$

требуется построить стохастические уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофовой структур

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sigma'_{\nu j}(q, p, t)\dot{\xi}^j, \quad k = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \left[\frac{\partial R_i(z, t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial z_i}\right]\dot{z}_i - \left[\frac{\partial B(z, t)}{\partial z_l} + \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial t}\right] = T_{l\mu}\dot{\psi}_\mu, \\ i, l = \overline{1, 2n}, \quad \mu = \overline{1, n + r}, \end{gathered} \tag{4}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием построенных уравнений. Здесь $\left\{\xi^1(t, \omega), \ldots, \xi^k(t, \omega)\right\}$ и $\{\psi_1(t, \omega), \ldots, \psi_{n+r}(t, \omega)\}$ — системы независимых винеровских процессов [4], $B = B(z, t)$ — функция Биркгофа, а $W = (W_{il})$ — тензор Биркгофа с компонентами

$$W_{il} = \left[\frac{\partial R_i(z,t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z,t)}{\partial z_i} \right].$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Будем говорить, что множество $\Lambda(t)$ является интегральным многообразием стохастического дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}, \tag{5}$$

если из $x_0, \dot{x}_0 \in \Lambda(t_0)$ следует $P\{x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0) \in \Lambda(t)\} = 1$ при всех $t \geq t_0$.

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [5]. В работе [6] рассмотрены задачи построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка эквивалентного стохастического уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофовой структур. В статье [7] решаются стохастические задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), зависящим как от обобщенных координат, так и обобщенных от скоростей.

В отличие от [7] в данной работе рассматриваются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), не зависящим от скоростей.

Для решения поставленных задач на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [1] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [4] строится уравнение Ито (5) так, чтобы множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием построенного уравнения. И, далее, по построенному уравнению Ито второго порядка строятся эквивалентные ему стохастические уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофовой структур.

1. Построение стохастического уравнения лагранжевой структуры (2) по заданным свойствам движения (1). Предварительно по правилу стохастического дифференцирования Ито составляем уравнения возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(f + \sigma\dot{\xi}) + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Далее, следуя методу Еругина [1], вводим вектор-функцию A и матрицу-функцию B, которые обладают свойством $A(0, 0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, $B(0, 0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, такие, что имеет место равенство

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{7}$$

Сравнивая уравнения (6) и (7), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} f &= A - \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x}\sigma &= B, \end{aligned} \tag{8}$$

из которых методом квазиобращения [3, с. 12] определяем вектор-функцию f и матрицу σ:

$$f = k\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ \left(A - \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right), \tag{9}$$

$$\sigma_j = s_j\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}B_j, \quad j=\overline{1, r}, \tag{10}$$

где $\sigma_j = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \ldots, \sigma_{nj})^T$ — j-й столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$; $B_j = (B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{\mu j})^T$ — j-й столбец матрицы $B = (B_{\mu j})$, $\mu = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, r}$; s_j, k — произвольные скалярные величины, а под выражениями $\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]$ и $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}$, следуя работе [3, с. 12], понимаются соответственно $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{T}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{T}\right)^{-1}$ и

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\lambda_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_m}{\partial x_n} \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, из (9), (10) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, имеющее заданную интегральную кривую (1), имеет вид

$$\ddot{x} = k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}\left(A - \dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right) + \sigma\dot{\xi}.$$

Далее, по правилу стохастического дифференцирования Ито раскроем выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial x\ \partial x_k}$$