УДК 517.5

$\boxed{\text{В. И. Рукасов}}$, С. О. Чайченко (Слов'ян. держ. пед. ун-т)

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ, ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ*

For least upper bounds of deviations of the Vallée Poussin operators on the classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, which are defined by functions ψ rapidly decreasing to zero, in metric of spaces $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, we establish estimates from above that are exact on some subsets of functions from $\widehat{L}_p$.

Для точных верхних граней отклонений операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, определяемых быстро убывающими к нулю функциями ψ, в метрике пространств $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, установлены оценки сверху, которые на некоторых подмножествах функций из $\widehat{L}_p$ являются точными.

Нехай $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, — множина функцій φ, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_{a}^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай, далі, $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \ge 0$ функція, для якої майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \, dv, \tag{1}$$

в якому β — фіксоване дійсне число.

Тоді, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 168], через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ будемо позначати множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ задаються згорткою

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) \widehat{\psi}_{\beta}(t) \, dt, \tag{2}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (2) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і для неї використовують позначення $\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Водночас функцію $f(\cdot)$ називають (ψ,β)-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi;\cdot)$.

У роботі [1, с. 169] встановлено зв'язок між множинами $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і відповідними множинами 2π-періодичних функцій L^{ψ}_{β}, раніше введеними О. І. Степанцем (див.,

*Виконано за часткової підтримки Німецького фонду наукових досліджень (DFG) у рамках проекту 436 UKR 113/103/0-1.

наприклад, [2, с. 131]). Зокрема, показано, що якщо функція $\psi(v)$ неперервна при всіх $v \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ і перетворення $\widehat{\psi}_\beta(t)$ вигляду (1) є сумовним на всій дійсній осі, то

$$\widehat{L}^\psi_\beta L^0_1 = L^\psi_\beta, \qquad \widehat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N} = L^\psi_\beta \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L^0_1.$$

Тут L^0_1 — множина 2π-періодичних сумовних на періоді функцій φ, для яких $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0$.

Функції $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$ будемо наближати за допомогою агрегатів, які були введені О. І. Степанцем [1, с.176] таким чином:

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x-t)(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c})_\beta(t)\, dt, \tag{3}$$

де $(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c})_\beta(t)$ — перетворення вигляду (1) добутку $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$, в якому

$$\lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq c, \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c < v < \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v. \end{cases} \tag{4}$$

Тут і в подальшому c — деяке число з проміжку $[0;\sigma)$.

Відомо (див., наприклад, твердження IX.3.3 з монографії [1]), що якщо $f \in C^\psi_\beta \mathfrak{N}$, де $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$ — підмножина неперервних 2π-періодичних функцій з класу $\widehat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$, а $\psi(v)$ — функція, неперервна при всіх $v \geq 0$, і її перетворення $\widehat{\psi}_\beta(t)$ є сумовним на $\mathbb{R}$, то для довільних $c < \sigma$

$$V_{\sigma,c}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k<\sigma} \lambda_{\sigma,c}(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{5}$$

Тут $a_0,\ a_k$ і $b_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(\cdot)$.

Оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ ми називаємо операторами Валле Пуссена функції $f(x)$, оскільки зі співвідношень (4) і (5) випливає, що в періодичному випадку при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $c = n - m,\ m \in \mathbb{N},\ m < n$, ці оператори збігаються з відомими сумами Валле Пуссена

$$V_{n,m}(f;x) = \frac{1}{m} \sum_{k=n-m}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_k(f;x),\ k = 0, 1, \ldots,$ — частинні суми порядку k ряду Фур'є функції $f(x)$.

У цій роботі викладено результати щодо оцінок норм величин

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x), \quad f \in \widehat{L}^\psi_\beta, \tag{6}$$

у просторах $\widehat{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, у випадку, коли функції ψ належать до множини $\mathcal{D}_\alpha$, яка означається таким чином [3].

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 193]), позначимо через $\mathfrak{M}$ множину неперервних опуклих донизу при всіх $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких

$\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v)=0$. Кожну функцію $\psi\in\mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0;1)$ так, щоб отримана функція $\big($яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)\big)$ була неперервною при всіх $v\geq 0$, $\psi(0)=0$ і її похідна $\psi'(v)=\psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0;\infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Нехай, далі, $\mathfrak{A}^*$ — підмножина функцій $\psi\in\mathfrak{A}$, у яких, починаючи з деякого v_0, існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$. Тоді покладемо

$$\mathcal{D}_\alpha=\left\{\psi\in\mathfrak{A}^*:\ \lim_{v\to\infty}\frac{\psi''(v)}{\psi'(v)}=-\alpha,\ \alpha>0\right\}.$$

Зазначимо, що якщо $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, то за правилом Лопіталя

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\psi'(v)}{\psi(v)}=\lim_{v\to\infty}\frac{\psi''(v)}{\psi'(v)}=-\alpha,\ \alpha>0. \tag{7}$$

Крім того, якщо $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, то послідовність $\psi(k),\ k=1,2,\ldots$, є елементом множини D_q з роботи [4]:

$$D_q=\left\{\psi(k):\ \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q,\quad q=e^{-\alpha},\ \alpha>0\right\}.$$

Дійсно, використовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла і враховуючи співвідношення (7), знаходимо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=\lim_{k\to\infty}e^{\ln\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}}=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\frac{\psi'(v)}{\psi(v)}dv}=$$

$$=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^{1}\frac{\psi'(v+k)}{\psi(v+k)}dv}=e^{-\alpha}=q.$$

Дослідження апроксимаційних властивостей класів періодичних функцій та класів функцій, заданих і локально інтегровних на дійсній осі, мають багату історію, з основними віхами якої та останніми результатами у цьому напрямі можна ознайомитись, наприклад, у книгах [1, 2, 5]. Зокрема, в монографіях [1, 5] викладено результати щодо наближень операторами вигляду (3) класів $\widehat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$ і $\widehat{C}^\psi_\beta\mathfrak{N}$. Щодо досліджень, пов'язаних з випадком, який розглядається у цій роботі, зазначимо наступне.

У роботі [4] досліджувалась асимптотична поведінка при $n\to\infty$ точних верхніх меж

$$\mathcal{E}(L^\psi_\beta\mathfrak{N};S_n)_p=\sup_{f\in L^\psi_\beta\mathfrak{N}}\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_p,\quad 1\leq p\leq\infty, \tag{8}$$

$$\|\varphi\|_p=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & 1\leq p<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[0;2\pi]}|\varphi(t)|, & p=\infty,\end{cases}$$

відхилень сум Фур'є на класах функцій $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$, $\psi\in D_q$. Зауважимо, що у цьому випадку елементами множин $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ є 2π-періодичні функції, які можна регулярно продовжити у смугу комплексної площини $|\mathrm{Im}\ z|\leq\ln 1/q$ (див., наприклад, [2, с. 351], а також роботу [6], в якій у термінах $(\psi;\beta)$-похідних встановлено нові критерії аналітичності періодичних функцій). У роботі [4], зокрема, показано, що задачі про отримання асимптотичних рівностей для величин (8) можна звести до аналогічних задач для точних верхніх меж $\mathcal{E}(L^q_\beta\mathfrak{N}; S_n)_p$ відхилень сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона (означення яких наведене, наприклад, у книзі [2, с. 301]). Це дало можливість скористатись відомими результатами для величин точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона [7, 8] і в низці важливих випадків для величини (8) знайти асимптотичні рівності. У подальшому результати роботи [4] було поширено на випадок наближення сумами Валле Пуссена на класах аналітичних функцій [9], а також на випадок наближення у просторах функцій, локально інтегровних на дійсній осі (і не обов'язково періодичних), за допомогою операторів Фур'є [3].

У цій роботі ми встановимо результат, аналогічний до результату роботи [9], у випадку наближення операторами $V_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^\psi_\beta$. Доведення проводиться за схемою, запропонованою у роботі [4]. При цьому для отримання основних тверджень використаємо відповідні результати роботи [10], де вивчались апроксимаційні властивості операторів $V_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^\psi_\beta$ у випадку, коли

$$\psi(v)=\begin{cases}\psi_1(v), & v\in[0;1),\\ e^{-\alpha v}, & v\geq 1.\end{cases}$$

Тут $\alpha>0$ — довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi_1'(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$ і така, що $\psi_1(0)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}=$ $=0$ і $\psi_1(1)=e^{-\alpha}$. В цьому випадку множини $\widehat{L}^\psi_\beta$ позначають через $\widehat{L}^\alpha_\beta$, а $(\psi;\beta)$-похідну і $(\psi;\beta)$-інтеграл — через f^α_β і $\mathcal{J}^\alpha_\beta$ відповідно.

Нехай

$$E_\sigma(\varphi)_{\widehat{p}}=\inf_{u\in W^2_\sigma}\|\varphi(\cdot)-u(\cdot)\|_{\widehat{p}},\qquad W^2_\sigma=\left\{u\in\mathcal{E}_\sigma:\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2(t)}{1+t^2}\,dt<\infty\right\},$$

де $\mathcal{E}_\sigma$ — множина цілих функцій експоненціального типу, що не перевищує σ.

Основним результатом роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$ і $\beta\in\mathbb{R}$, то для довільної функції $f\in\widehat{L}^\psi_\beta\widehat{L}_p$, $1\leq p\leq\infty$, при $c\to\infty$*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\hat{p}}=\psi(c)\left[e^{\alpha c}\|\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}^\alpha_\beta(f^\psi_\beta);\cdot)\|_{\hat{p}}+O(1)\frac{(\alpha^2+1)\varepsilon_c}{\alpha^3(\sigma-c)}E_c(f^\psi_\beta)_{\hat{p}}\right],\quad (9)$$

де

$$\varepsilon_c=\max\left\{\varepsilon^{(1)}_c,\varepsilon^{(2)}_c\right\},\qquad \varepsilon^{(1)}_c=\sup_{t\geq c}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}+\alpha\right|,\qquad \varepsilon^{(2)}_c=\sup_{t\geq c}\left|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}-\alpha^2\right|,\quad (10)$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів σ, c, p, α, ψ, β і f.

Теорема 1 встановлює зв'язок між нормами у просторах $\widehat{L}_p$ величин $\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)$, $f\in\widehat{L}^\psi_\beta\widehat{L}_p$, $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, означених у співвідношенні (6), та величин $\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}^\alpha_\beta(f^\psi_\beta);\cdot)$ і є неперіодичним аналогом теореми 1 з роботи [9]. Дійсно, якщо $f\in C^\psi_\beta$, $\sigma=n\in\mathbb{N}$,

$c = n - m \in \mathbb{N}$ і $p = \infty$, то теорема 1 міститься у твердженні теореми 1 роботи [9]. Якщо до того ж $m = 1$, то теорема 1 випливає з теореми 1 роботи [4]. При цьому слід зазначити, що форма залишкового члена формули (9) відрізняється від форми залишкових членів відповідних співвідношень із робіт [4, 9]. Зазначимо також, що на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\widehat{L}_p$ аналогічні дослідження проводились у роботі [3], але там роль наближаючих агрегатів відігравали оператори іншого вигляду.

Доведення теореми 1 суттєво базується на наступній лемі, яка є неперервним аналогом леми 1 з роботи [9].

Лема 1. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\lambda_{\sigma,c}(v)$ — *функція, визначена у співвідношенні* (4). *Тоді для довільних чисел* $\sigma > 0$ *і* $c \in [0;\sigma)$ *виконується рівність*

$$\int\limits_{c}^{\infty}(1-\lambda_{\sigma,c}(v))\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv =$$

$$= \psi(c)\left[e^{\alpha c}\int\limits_{c}^{\infty}(1-\lambda_{\sigma,c}(v))e^{-\alpha v}\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv + r_{\sigma,c}(t)\right], \tag{11}$$

до того ж для величини $r_{\sigma,c}(t) = r_{\sigma,c}(\psi;\alpha;\beta;t)$, *починаючи з деякого* c_0, *справджуються оцінки*

$$|r_{\sigma,c}(t)| \le \frac{2\varepsilon_c}{\alpha(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$|r_{\sigma,c}(t)| \le \frac{1}{t^2}\frac{(6\alpha+1)\varepsilon_c}{(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)}, \quad |t|>0, \tag{13}$$

де величина ε_c *означена у співвідношеннях* (10).

Доведення. Маємо

$$\int\limits_{c}^{\infty}[1-\lambda_{\sigma,c}(v)]\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}[1-\lambda_{\sigma,c}(v+c)]\psi(v+c)\cos\left((v+c)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv =$$

$$= \psi(c)\left(\int\limits_{0}^{\infty}[1-\lambda_{\sigma,c}(v+c)]e^{-\alpha v}\cos\left((v+c)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv + r_{\sigma,c}(t)\right),$$

де

$$r_{\sigma,c}(t) = \int\limits_{0}^{\infty}[1-\lambda_{\sigma,c}(v+c)]\left(\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\right)\cos\left((v+c)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{14}$$

Покажемо тепер, що має місце оцінка (12). Оскільки для довільного $v \ge 0$ виконується нерівність

$$0 \le \big[1-\lambda_{\sigma,c}(v+c)\big] \le \frac{v}{\sigma-c}, \quad 0<c<\sigma, \tag{15}$$

то

$$|r_{\sigma,c}(t)| \leq \frac{1}{\sigma - c} \int\limits_0^{\infty} v \left| \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \right| dv. \tag{16}$$

Якщо $\dfrac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \geq 0$, то

$$\left| \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \right| = \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} = e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx} - e^{-\alpha v} \leq e^{(-\alpha + \varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\dfrac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} < 0$, то, зважаючи на опуклість функції $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\left| \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \right| = e^{-\alpha v} - \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} = e^{-\alpha v} - e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx} \leq$$

$$\leq e^{-\alpha v} - e^{(-\alpha - \varepsilon_c^{(1)})v} \leq e^{(-\alpha + \varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Отже,

$$\left| \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \right| \leq e^{(-\alpha + \varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}, \quad v \geq 0. \tag{17}$$

Внаслідок співвідношень (7) і (10) величина $\varepsilon_c^{(1)} > 0$ монотонно прямує до нуля при $c \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого c_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_c^{(1)} < 0$. Тому, враховуючи оцінки (16) і (17), знаходимо

$$|r_{\sigma,c}(t)| \leq \frac{1}{\sigma - c} \int\limits_0^{\infty} v (e^{(-\alpha + \varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}) dv =$$

$$= \frac{1}{\sigma - c} \left(\frac{1}{(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \leq \frac{2\varepsilon_c^{(1)}}{\alpha(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})^2 (\sigma - c)},$$

і, оскільки $\varepsilon_c^{(1)} < \varepsilon_c$, то нерівність (12) виконується.

Переконаємося нарешті у виконанні нерівності (13). Двічі інтегруючи частинами і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$r_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{(\sigma - c)t^2} \left[\left(\frac{\psi(\sigma)}{\psi(c)} - e^{-\alpha(\sigma - c)} \right) \cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2} \right) - \right.$$

$$\left. -2 \int\limits_0^{\sigma - c} \left(\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right) \cos\left((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv \right] -$$

$$-\frac{1}{t^2} \int\limits_0^{\infty} [1 - \lambda(v+c)] \left(\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \right) \cos\left((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv. \tag{18}$$

Беручи до уваги нерівність (15) і співвідношення

$$\left| \left(\frac{\psi(\sigma)}{\psi(c)} - e^{-\alpha(\sigma - c)} \right) \cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| =$$

$$= \left| -\cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) \int\limits_{\sigma-c}^{\infty} \left(\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right) dv \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\sigma-c}^{\infty} \left| \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right| dv,$$

з (18) отримуємо

$$|r_{\sigma,c}(t)| \leq \frac{2}{(\sigma-c)t^2} \int\limits_0^{\infty} \left| \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right| dv +$$

$$+ \frac{1}{(\sigma-c)t^2} \int\limits_0^{\infty} v \left| \frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \right| dv. \tag{19}$$

Встановимо оцінки для інтегралів з правої частини співвідношення (19). Якщо $\dfrac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \geq 0$, то, враховуючи (10) і опуклість функції $e^{\lambda t}$, одержуємо

$$\left| \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right| = \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} =$$

$$= \alpha e^{-\alpha v} + \frac{\psi'(v+c)}{\psi(v+c)} \, e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \, dx} \leq \alpha e^{-\alpha v} - (\alpha - \varepsilon_c^{(1)}) e^{-(\alpha + \varepsilon_c^{(1)})v} \leq$$

$$\leq (\alpha + \varepsilon_c^{(1)}) e^{-(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\dfrac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} < 0$, то, міркуючи аналогічно, маємо

$$\left| \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right| = -\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} - \alpha e^{-\alpha v} =$$

$$= -\frac{\psi'(v+c)}{\psi(v+c)} \, e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \, dx} - \alpha e^{-\alpha v} \leq (\alpha + \varepsilon_c^{(1)}) e^{-(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}.$$

Як вже зазначалося раніше, починаючи з деякого c_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_c^{(1)} < 0$. Отже,

$$\int\limits_0^{\infty} \left| \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \right| dv \leq \int\limits_0^{\infty} [(\alpha + \varepsilon_c^{(1)}) e^{-(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}] dv = \frac{2\varepsilon_c^{(1)}}{\alpha - \varepsilon_c^{(1)}}, \tag{20}$$

і необхідну оцінку для першого доданка з правої частини співвідношення (19) встановлено.

Розглянемо тепер другий доданок із правої частини співвідношення (19). Оскільки $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \alpha^2$. Дійсно, враховуючи (7), знаходимо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \alpha^2. \tag{21}$$

Тепер якщо $\dfrac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \geq 0$, то, зважаючи на (10), одержуємо

$$\left|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\right| = \frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} =$$

$$= \frac{\psi''(v+c)}{\psi(v+c)} e^{\int_c^{v+c} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\, dx} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \leq (\alpha^2 + \varepsilon_c^{(2)}) e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \leq$$

$$\leq (\alpha^2 + \varepsilon_c) e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\dfrac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} < 0$, то з огляду на опуклість функції $e^{\lambda t}$ отримуємо

$$\left|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\right| = \alpha^2 e^{-\alpha v} - \frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} =$$

$$= \alpha^2 e^{-\alpha v} - \frac{\psi''(v+c)}{\psi(v+c)} e^{\int_\sigma^{v+c} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\, dx} \leq \alpha^2 e^{-\alpha v} - (\alpha^2 - \varepsilon_c^{(2)}) e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} =$$

$$= \alpha^2 (e^{-\alpha v} - e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v}) + \varepsilon_c^{(2)} e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} \leq (\alpha^2 + \varepsilon_c) e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}.$$

Отже,

$$\left|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\right| \leq (\alpha^2 + \varepsilon_c) e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}, \quad v \geq 0. \tag{22}$$

Внаслідок співвідношень (7), (10) і (21) величина $\varepsilon_c > 0$ монотонно прямує до нуля при $c \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого c_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_c < 0$. Беручи до уваги співвідношення (22), знаходимо

$$\int_0^\infty v \left|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\right| dv \leq \int_0^\infty v \big[(\alpha^2 + \varepsilon_c) e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\big] dv =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \varepsilon_c}{(\alpha - \varepsilon_c)^2} - 1 = \frac{(2\alpha+1)\varepsilon_c - \varepsilon_c^2}{(\alpha - \varepsilon_c)^2}. \tag{23}$$

Зіставляючи співвідношення (19), (20) і (23), переконуємося, що, починаючи з деякого c_0, виконується оцінка (13).

Лему доведено.

Перейдемо тепер до ***доведення теореми*** **1**. Нехай $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Зі співвідношень (2) і (3) випливає, що майже скрізь

$$\rho_\sigma(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x-t) \widehat{d}_{\sigma,c}(t)\, dt, \tag{24}$$

де

$$\widehat{d}_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d_{\sigma,c}(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv,$$

$$d_{\sigma,c}(v) = (1-\lambda_{\sigma,c}(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c, \\ \dfrac{v-c}{\sigma-c}\psi(v), & c < v < \sigma, \\ \psi(v), & \sigma \le v. \end{cases}$$

Оскільки для довільної функції $\varphi \in W^2_\tau,\ \tau \le c$, виконується співвідношення (див. [1, с. 186])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t) \equiv 0,$$

то, покладаючи $h(x-t) = f^\psi_\beta(x-t) - \varphi(x-t)\ \forall\varphi \in W^2_\tau,\ \tau \le c$, зображення (24) записуємо у вигляді

$$\rho_{\sigma,c}(f;\cdot) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t)\ dt. \tag{25}$$

Нехай тепер

$$\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty q_{\alpha,\sigma,c}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv,$$

$$q_{\alpha,\sigma,c}(v) = (1-\lambda_{\sigma,c}(v))\ e^{-\alpha v} = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c, \\ \dfrac{v-c}{\sigma-c}\ e^{-\alpha v}, & c < v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \le v. \end{cases}$$

На підставі співвідношень (11) і (25) отримуємо, що майже для всіх x

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(c)\left[e^{\alpha c}\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t) + \frac{1}{\pi}r_{\sigma,c}(t)\right] h(x-t)\ dt =$$

$$= \psi(c)\left(e^{\alpha c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t)\ dt + R_{\sigma,c}(f;x)\right) =$$

$$= \psi(c)\big(e^{\alpha c}\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}^\alpha_\beta;x) + R_{\sigma,c}(f;x)\big), \tag{26}$$

де

$$R_{\sigma,c}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_{\sigma,c}(t)\ dt,$$

а функція $r_{\sigma,c}(t)$ визначається формулою (14).

Застосовуючи нерівність Мінковського, отримуємо

$$\|R_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_a^{a+2\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_{\sigma,c}(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|r_{\sigma,c}(t)\right|\sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|h(x+a-t)|^{p}dx\right)^{1/p}dt=\frac{1}{\pi}\|h\|_{\hat{p}}\|r_{\sigma,c}\|_{1}.$$

Тут

$$\|h\|_{\hat{p}}=\|f_{\beta}^{\psi}-\varphi\|_{\hat{p}},\qquad \|r_{\sigma,c}\|_{1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|r_{\sigma,c}(t)|\,dt.$$

Розглядаючи тепер нижню межу при $\varphi\in W_{c}^{2}$, одержуємо

$$\left\|R_{\sigma,c}(f;x)\right\|_{\hat{p}}\leq\frac{1}{\pi}E_{c}(f_{\beta}^{\psi})_{\hat{p}}\|r_{\sigma,c}\|_{1}. \tag{27}$$

Використовуючи співвідношення (12) і (13), знаходимо

$$\|r_{\sigma,c}\|_{1}=\int\limits_{|t|\leq 1}|r_{\sigma,c}(t)|\,dt+\int\limits_{|t|\geq 1}|r_{\sigma,c}(t)|\,dt\leq$$

$$\leq\frac{4\varepsilon_{c}}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{c})^{2}(\sigma-c)}+\frac{(12\alpha+2)\varepsilon_{c}}{(\alpha-\varepsilon_{c})^{2}(\sigma-c)}=\frac{12\alpha^{2}+2\alpha+4}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{c})^{2}(\sigma-c)}\varepsilon_{c}, \tag{28}$$

де величина ε_{c} визначається в (10).

Зі співвідношень (26) – (28) з урахуванням очевидної рівності

$$\frac{1}{\alpha-\varepsilon_{c}}=O(1)\frac{1}{\alpha},\quad c\to\infty,$$

отримуємо формулу (9).

Теорему доведено.

Нехай $1\leq p\leq\infty$ і

$$\widehat{S}_{p}=\left\{f\in\widehat{L}_{p}\colon\ \|f\|_{\hat{p}}\leq 1\right\},\qquad \widehat{L}_{\beta}^{\psi}\widehat{S}_{p}=\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}.$$

Розглядаючи точні верхні межі обох частин формули (9) по класах $\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}$ і враховуючи, що

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi};V_{\sigma,c})_{\hat{p}}\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sup_{f\in\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}}\|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\hat{p}}=\sup_{\|\varphi\|_{\hat{p}}\leq 1}\|\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}_{\beta}^{\psi}(\varphi);\cdot)\|_{\hat{p}},$$

одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Якщо $\psi\in\mathcal{D}_{\alpha}$, $1\leq p\leq\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$, то при $c\to\infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi};V_{\sigma,c})_{\hat{p}}=\psi(c)\left(e^{\alpha c}\mathcal{E}(\widehat{L}_{\beta,p}^{\alpha};V_{\sigma,c})_{\hat{p}}+O(1)\frac{\alpha^{2}+1}{\alpha^{3}(\sigma-c)}\varepsilon_{c}\right),$$

де величина ε_{c} означена у співвідношеннях (10), *а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів σ, c, p, α, ψ і β.*

У періодичному випадку аналог теореми 2 встановлено у роботі [9].

Одержимо деякі наслідки з встановлених у цій роботі результатів. Використовуючи теорему 1 з роботи [10], з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *За виконання умов теореми* 1 *для довільної функції* $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, *при* $c \to \infty$

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{\psi(c)}{\sigma-c}\left[\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\,c}+\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\right)\right]E_c(f^{\psi}_{\beta})_{\widehat{p}},$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* σ, c, p, α, ψ, β *і* f.

Використовуючи наслідок 1 із роботи [10], з теореми 2 одержуємо таке твердження.

Наслідок 2. *За виконання умов теореми* 2 *при* $c \to \infty$ *виконується співвідношення*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} \le \frac{\psi(c)}{\sigma-c}\left[\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\,c}+\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\right)\right],$$

яке при $p=\infty$ *перетворюється у рівність. Символ* $O(1)$ *означає величину, яка є рівномірно обмеженою відносно параметрів* σ, c, p, α, ψ *і* β.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.
3. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 297 – 308.
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
5. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена: — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 386 с.
6. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686 – 1708.
7. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
8. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. — **145**. – С. 126 – 151.
9. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
10. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 284 – 301.

Одержано 27.04.09,
після доопрацювання — 06.04.10