УДК 517.984

М. Байрамоглы, Н. М. Асланова (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФОРМУЛА СЛЕДА ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Asymptotic distribution of eigenvalues of a problem generated by the Sturm – Liouville operator equation is studied. The formula of regularized trace of the corresponding operator is obtained.

Вивчається асимптотичний розподіл власних значень задачі, що породжена операторним рівнянням Штурма – Ліувілля. Отримано формулу регуляризованого сліду відповідного оператора.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение и $\|\cdot\|$ — норма в нем. Пусть также $\mathbf{L}_2 = L_2((0,1),H) \oplus H$. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2$ задается как

$$(Y,Z)_{\mathbf{L}_2} = \int\limits_0^1 (y(t), z(t))\,dt - \frac{1}{h}(y_1, z_1), \tag{1}$$

где

$$Y = \{y(t), y_1\}, \quad Z = \{z(t), z_1\}, \quad y(t), z(t) \in L_2((0,1),H),$$
$$y_1, z_1 \in H, \quad h = \mathrm{const} < 0.$$

В пространстве $L_2((0,1),H)$ рассмотрим задачу

$$-y''(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t), \tag{2}$$

$$y(0) = 0, \tag{3}$$

$$y(1) - hy'(1) = \lambda y(1), \tag{4}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор в H (можно считать, что $A > E$, E — единичный оператор в H), который является обратным для вполне непрерывного.

Предположим также, что операторная функция $q(t)$ слабоизмерима, $\|q(t)\|$, как функция от t, ограничена на $[0,1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на $[0,1]$, и $q^{(l)}(t)$, $l = 0,1,2$, при каждом $t \in [0,1]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H, т. е. $q^{(l)}(t) \in \sigma_1$, $\left[q^{(l)}(t)\right]^* = q^{(l)}(t)$;

2) функции $\left\|q^{(l)}(t)\right\|_1$, $l = 0,1,2$, ограничены на отрезке $[0,1]$;

3) $q'(0) = q'(1) = 0$;

4) $\displaystyle\int_0^1 (q(t)f, f)\,dt = 0$ при любом $f \in H$.

Здесь σ_1 — пространство компактных операторов, сингулярные числа которых образуют сходящийся ряд [1, с. 121] с нормой $\|\cdot\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$, где s_n — сингулярные числа оператора. Если B — самосопряженный ядерный оператор в H и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис из его собственных элементов, то [1] (теорема 8.6)

$$\|B\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(B\varphi_n, \varphi_n)| .$$

При $q(t) \equiv 0$ с задачей (2)–(4) в пространстве $\mathbf{L}_2$ можно связать самосопряженный оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = \{Y \in L_2 \, / -y''(t) + Ay(t) \in \in L_2(H,(0,1)), y(0) = 0$ и $y_1 = y(1)\}$, действующий как

$$L_0(Y) = \{-y''(t) + Ay(t), \;\; y(1) - hy'(1)\} .$$

При $q(t) \not\equiv 0$ соответствующий оператор обозначим $L = L_0 + Q$, где $Q\colon Q\{y(t), y(1)\} = \{q(t)\, y(t), 0\}$ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathbf{L}_2$.

Цель настоящей работы — установить дискретность спектра задачи (2)–(4), изучить асимптотическое распределение собственных значений и получить формулу первого регуляризованного следа оператора L.

Легко проверить, что, вводя гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным по формуле (1), получаем самосопряженный в $\mathbf{L}_2$ оператор L.

Впервые Вальтер [2], рассматривая скалярную задачу Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии, показал, что можно связать с ней самосопряженный оператор, подобрав подходящее гильбертово пространство, и доказал теорему разложения, используя самосопряженность этого оператора. Далее этот подход был использован Фултоном [3].

Дифференциально-операторные уравнения изучались в работах [4–7], в которых спектральный параметр содержался в граничных условиях.

В работе [7] для оператора, рассмотренного в [5], получена формула следа. В [5] изучено асимптотическое распределении собственных значений.

Для спектральных задач без параметра в граничном условии более точные (многочленные) асимптотические формулы найдены в [8].

Формула регуляризованного следа была впервые получена И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [9]. После этой работы появились многочисленные исследования, посвященные изучению этого вопроса как для конкретных операторов (см. например, [10–14]), так и дифференциально-операторных уравнений [7, 15, 16] и дискретных абстрактных операторов [17, 18]. Более полную библиографию можно найти в [19].

Формулы регуляризованных следов применяются для вычисления первых собственных значений [11].

В п. 1 доказано, что оператор L_0 имеет дискретный спектр. В п. 2 получена асимптотическая формула для собственных значений. В п. 3 с помощью асимптотики собственных значений доказано, что ряд, названный регуляризованным следом, сходится абсолютно (лемма 4). Для вычисления значения ряда использован метод контурного интегрирования.

1. Дискретность спектра. Сначала исследуем задачу (2)–(4) при $q(t) \equiv 0$. Условие $A > E$ влечет положительную определенность оператора L_0 в $\mathbf{L}_2$. Действительно, для любого $Y \in D(L_0)$ имеем

$$(L_0Y,Y)_{\mathbf{L}_2}=\int\limits_0^1\left(-y''(t)+Ay(t)\,,\,y(t)\right)dt-\frac{1}{h}\left(y(1)-h\left(y'(1),y(1)\right)\right)=$$

$$=\int\limits_0^1\|y'(t)\|^2\,dt+\int\limits_0^1\left(Ay(t)\,,\,y(t)\right)dt-\frac{1}{h}\|y(1)\|^2>$$

$$>\int\limits_0^1\|y(t)\|^2\,dt-\frac{1}{h}\|y(1)\|^2=\|Y\|^2_{\mathbf{L}_2},$$

т. е. оператор L_0 положительно определен.

Пусть числа $\gamma_1\le\gamma_2\le\ldots\le\gamma_k\le\ldots$ являются собственными значениями, а $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ — соответствующими им ортонормированными в H собственными векторами оператора A. Пусть $y(t)\in D(A)$ $\forall t\in[0,1]$. Положим $y_k(t)=\big(y(t),\varphi_k\big)$, тогда

$$(y,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|y_k(t)|^2\,,\qquad (Ay,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,|y_k(t)|^2\,.$$

Теорема 1. *При условии вполне непрерывности A^{-1} в H оператор L_0 имеет дискретный спектр.*

Доказательство. Поскольку L_0 положительно определен, для доказательства дискретности спектра по теореме Реллиха [20, с. 386] (теорема 11) достаточно показать компактность в L_2 множества векторов

$$\mathbf{Y}=\Bigg\{Y\in D(L_0)\,/\,(L_0Y,Y)=$$

$$=\int\limits_0^1\big[\left(y'(t)\,,y'(t)\right)dt+\left(Ay(t)\,,\,y(t)\right)\big]dt-\frac{1}{h}\left(y(1)\,,y(1)\right)\le 1\Bigg\}.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $R=R(\varepsilon)$, что*

$$\int\limits_0^1\sum_{k=R+1}^{\infty}|y_k(t)|^2\,dt-\frac{1}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty}|y_k(1)|^2<\varepsilon.$$

Доказательство. При $Y\in\mathbf{Y}$

$$\int\limits_0^1\sum_{k=R+1}^{\infty}|y_k(t)|^2\,dt=$$

$$=\frac{1}{\gamma_R}\int\limits_0^1\sum_{k=R+1}^{\infty}|y_k(t)|^2\,\gamma_R dt\le\frac{1}{\gamma_R}\int\limits_0^1\sum_{k=R+1}^{\infty}|y_k(t)|^2\,\gamma_k dt\le$$

$$\le\frac{1}{\gamma_R}\int\limits_0^1\left(Ay(t)\,,y(t)\right)dt\le\frac{1}{\gamma_R}.$$

Поскольку $\gamma_R \to \infty$ при $R \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $R(\varepsilon)$, что $\dfrac{1}{\gamma_R} < \dfrac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2}$. Тогда для выбранного R выполняется

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 \, dt < \frac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2}. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$-\frac{1}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 = -\frac{1}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 \left(y_k^2(t)\right)' dt \right| =$$

$$= -\frac{1}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 2y_k'(t)\, y_k(t)\, dt \right| \le$$

$$\le -\frac{2}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty} \left(\int_0^1 |y_k'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le -\frac{2}{h}\left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le -\frac{2}{h}\left(\frac{1}{\gamma_R} \sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \le -\frac{2}{\sqrt{\gamma_R}\,h} < -\frac{2}{h}\frac{\varepsilon}{1-2/h}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt - \frac{1}{h}\sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 <$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2} - \frac{2\varepsilon/h}{1-2/h} < \frac{\varepsilon}{1-2/h} - \frac{2\varepsilon/h}{1-2/h} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Пусть $Y \in \mathbf{Y}$. Обозначим через E_R множество векторов $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_R\}$, где $\tilde{y}_k = \{y_k(t), y_k(1)\} \in L_2(0,1) \oplus \mathbf{C}$. Из леммы 1 следует, что E_R есть ε-сеть в $\mathbf{L}_2$ для $\mathbf{Y}$.

Поскольку $|y_k(1)| \le 1$, $k = \overline{1,R}$, и к $y_k(t)$ применим критерий компактности в $L_2(0,1)$ [21, с. 291], E_R компактен в $\mathbf{L}_2$, что завершает доказательство теоремы.

2. Асимптотическое распределение собственных значений оператора L_0. Предположим, что собственные числа оператора A таковы: $\gamma_n \sim a n^{\alpha}$, $n \to \infty$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

Учитывая спектральное разложение оператора A, для коэффициентов $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$ получаем следующую задачу:

$$-y_k''(t) = (\lambda - \gamma_k)\, y_k(t), \quad t \in (0,1), \tag{7}$$

$$y_k(0) = 0, \tag{8}$$

$$y_k(1) - hy'_k(1) = \lambda y_k(1). \tag{9}$$

Решение задачи (7), (8) имеет вид

$$y_k(t) = \sin\sqrt{\lambda - \gamma_k}\, t.$$

Для того чтобы оно еще удовлетворяло (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sin\left(\sqrt{\lambda - \gamma_k}\right) - h\sqrt{\lambda - \gamma_k}\cos\left(\sqrt{\lambda - \gamma_k}\right) = \lambda\sin\left(\sqrt{\lambda - \gamma_k}\right) \tag{10}$$

хотя бы при одном γ_k $(\lambda \neq \gamma_k)$. Таким образом, спектр оператора L_0 состоит из тех вещественных $\lambda \neq \gamma_k$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют (10).

Обозначим $z = \sqrt{\lambda - \gamma_k}$. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\sin z - hz\cos z = \left(z^2 + \gamma_k\right)\sin z. \tag{11}$$

Взяв $z = iy$, запишем уравнение (11) в виде

$$\left(\gamma_k - y^2 - 1\right)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} + hiy\operatorname{ch} y = 0,$$

или

$$hy\operatorname{cth} y + \left(\gamma_k - y^2 - 1\right) = 0. \tag{12}$$

Обозначим

$$g_k(y) = \begin{cases} hy\operatorname{cth} y + \gamma_k - y^2 - 1 & \text{при} \quad y > 0, \\ h + \gamma_k - 1 & \text{при} \quad y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g'_k(y) = h\operatorname{cth} y - \frac{hy}{\operatorname{sh}^2 y} - 2y = \frac{h\operatorname{ch} y\operatorname{sh} y - hy - 2y\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}.$$

Поскольку при $y > 0$ $\operatorname{ch} y > y$, то $h\operatorname{ch} y\operatorname{sh} y - hy = -h\left(y - \operatorname{ch} y\operatorname{sh} y\right) < 0$.

Таким образом, $g'_k(y) < 0$ при $y > 0$. Учитывая, что $g_k(0) = h + \gamma_k - 1 > 0$ при $\gamma_k > 1 - h$, $g_k\left(\sqrt{\gamma_k}\right) = h\sqrt{\gamma_k}\operatorname{cth}\sqrt{\gamma_k} - 1 < 0$ и функция $g_k(y)$ монотонно убывает, заключаем, что в промежутке $\left(0, \sqrt{\gamma_k}\right)$ она, начиная с некоторого k, имеет точно один корень.

Найдем асимптотику корней уравнения (12). При больших y имеем

$$\operatorname{cth} y = 1 + \frac{2e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}} = 1 + 2e^{-2y} + O\left(e^{-4y}\right).$$

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\gamma_k - y^2 - 1 + hy\left(1 + O\left(e^{-2y}\right)\right) = 0,$$

или же $y^2 - hy - \gamma_k + 1 + o(1) = 0$. Отсюда $y = \dfrac{h}{2} + \sqrt{\gamma_k + \dfrac{h^2}{4} - 1 + o(1)}$.

Из $\sqrt{\lambda - \gamma_k} = i\left(\dfrac{h}{2} + \sqrt{\gamma_k + \dfrac{h^2}{4} - 1 + o(1)}\right)$ получаем $\lambda_k = -h\sqrt{\gamma_k} + 1 - \dfrac{h^2}{2} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right)$.

Найдем асимптотику тех решений уравнения (10), которые больше γ_k, другими словами, вещественных корней уравнения (11). Запишем это уравнение в виде $1 - z^2 + \gamma_k - hz\operatorname{ctg} z = 0$, $z \in (0, \infty)$, или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1 - z^2 + \gamma_k}{hz}. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию $\dfrac{hz \operatorname{ctg} z - 1 + z^2 - \gamma_k}{hz} = \dfrac{f_k(z)}{hz}$. Поскольку в каждом промежутке $(\pi n, \pi(n+1))$ $f_k(z)$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ и

$$f_k'(z) = \frac{h \sin z \cos z - hz + 2z \sin^2 z}{\sin^2 z} > 0, \quad h < 0,$$

в нем $f_k(z)$ имеет только один нуль. Найдем асимптотику больших нулей этой функции. Из (13) имеем

$$z = \operatorname{arctg} \frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k} + \pi n = \frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k} + o\left(\frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k}\right) + \pi n =$$

$$= -\frac{h}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) + \pi n = \pi n - \frac{h}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) =$$

$$= \pi n - \frac{h}{\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{nz}\right)\right) = \pi n - \frac{h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Соответствующие этим корням собственные значения оператора L_0 имеют вид $\lambda_{k,n} = \gamma_k + (\pi n)^2 - 2h + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Собственные значения оператора L_0 распадаются на две серии*:

$$\lambda_k = -h\sqrt{\gamma_k} + 1 - \frac{h^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right), \quad \lambda_{k,n} = \gamma_k + (\pi n)^2 - 2h + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Используя лемму 2, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3. *Пусть $A = A^* > E$ в H, A^{-1} вполне непрерывен и $\gamma_n \sim an^\alpha$ $\big(0 < a, \alpha = \mathrm{const} > 0\big)$. Тогда*

$$\lambda_n(L_0) \sim \mu_n(L) \sim dn^\delta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2} & \alpha > 2, \\ \dfrac{\alpha}{2}, & \alpha < 2, \\ 1, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Доказательство леммы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2 в [22] (§ 3).

3. Регуляризованный след оператора *L*. Используя лемму 3 и схему доказательства леммы 1 из [15], можно показать, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которой выполняется неравенство

$$\lambda_k - \lambda_{n_m} \geq d\left(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \quad k = n_m, n_m + 1, \ldots. \tag{14}$$

Обозначим ортонормированные собственные векторы оператора L_0 через $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$. Учитывая лемму 3 и неравенство (14), таким же образом, как и в [15] (лемма 2, теорема 1), можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть* $\|q(t)\|$ *ограничена на отрезке* $[0,1]$ *и выполняется условие леммы* 3. *Тогда*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n)_{\mathbf{L}_2}\,, \tag{15}$$

где $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— подпоследовательность, которая удовлетворяет неравенству* (14).

Назовем $\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)$ регуляризованным следом оператора L. Значение этого предела, как будет доказано ниже, не зависит от того, каким образом выбрана последовательность $\{n_m\}$, при котором выполняется (14).

Ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{k,n}h}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}}\,\{\sin(x_{k,n}t)\varphi_k,\sin(x_{k,n})\varphi_k\}\,,$$

$$n=\overline{0,\infty},\quad k=\overline{N,\infty},$$

$$k=\overline{1,\infty},\quad k=\overline{1,N},$$

где $x_{n,k}$ — корни уравнения (11) ($x_{k,0}$ — мнимый корень).

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если операторная функция* $q\,(t)$ *удовлетворяет условиям* $1-3$ *и* $\alpha>0$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1\frac{-x_{k,n}h\cos 2x_{k,n}tf_k\,(t)\,dt}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}\right|+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\int_0^1\frac{2x_{k,0}h\cos\left(2x_{k,0}t\right)f_k\,(t)\,dt}{2x_{k,0}h-h\sin 2x_{k,0}-2x_{k,0}+2x_{k,0}\cos 2x_{k,0}}\right|<\infty, \tag{16}$$

где $f_k(t)=\big(q(t)\varphi_k,\varphi_k\big)$.

Доказательство. Интегрируя дважды по частям и используя условие 3 $\big(q_k'\,(0)==q_k'\,(1)=0\big)$, имеем

$$\int_0^1\cos 2x_{k,n}tf_k\,(t)\,dt=\frac{1}{2x_{k,n}}\sin 2x_{k,n}f_k\,(1)-\frac{1}{(2x_{k,n})^2}\int_0^1\cos\left(2x_{k,n}t\right)f_k''\,(t)\,dt.$$

С учетом асимптотики $x_{k,n}=\pi n-\dfrac{h}{\pi n}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ и условий 1, 2 из последнего соотношения следует абсолютная сходимость двойного ряда в (15).

Также учитывая, что $x_{k,0}=\sqrt{\gamma_k}+\dfrac{h}{2}+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right)$, где $\gamma_k\sim ak^{\alpha}$, $\alpha>0$, из условий 1, 2 получаем абсолютную сходимость второго ряда в (16).

Предположим, что выполняется условие

$$\int_{1-\delta}^1\frac{|f_k\,(t)\,|}{t-1}<\infty, \tag{17}$$

где $\delta>0$ — достаточно малое число.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие леммы* 2. *Если операторная функция* $q(t)$ *удовлетворяет условиям* 1 – 4, *а также* (17), *то справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=-\frac{\operatorname{tr} q(1)+\operatorname{tr} q(0)}{4}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{-2x_{k,n}h\cos(2x_{k,n}t)\,f_k(t)\,dt}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{-2x_{k,n}h\cos(2x_{k,n}t)\,f_k(t)\,dt}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}\equiv\sigma_1+\sigma_2. \qquad (18)$$

Для вычисления значения суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{-2x_{k,n}h\cos(2x_{k,n}t)\,f_k(t)\,dt}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}$$

при каждом фиксированном k исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\frac{-2x_{k,n}h\cos(x_{k,n}t)}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}$$

при $N\to\infty$.

Чтобы вывести формулу для $T_N(t)$, представим n-й член суммы $T_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{k,n}$ некоторой функции комплексной переменной z, имеющей полюсы в точках $x_{k,0},x_{k,1},\ldots,x_{k,N}$. Рассмотрим комплексную функцию

$$G(z)=\frac{zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z+1-z^2-\gamma_k)\sin^2 z}.$$

Эта функция имеет простые полюсы в точках $x_{k,n}$ и πn. Вычет в точке $x_{k,n}$ будет равен

$$\operatorname*{res}_{z=x_{k,n}}G(z)=\frac{-2x_{k,n}h\cos 2x_{k,n}t}{-h\sin 2x_{k,n}+2hx_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}},$$

а в точке πn

$$\operatorname*{res}_{z=\pi n}G(z)=\frac{-\pi nh\cos 2\pi nt}{-h\pi n\cos^2\pi n}=\cos 2\pi nt.$$

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник с вершинами в $\pm iB$, $A_N\pm iB$, который обходит точку $ix_{k,0}$ слева, а точки $-ix_{k,0}$ и 0 справа. При каждом фиксированном k $B>x_{k,0}$. Впоследствии B стремится в бесконечность, а $A_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$. При таком выборе A_N имеем $x_{k,N}<A_N<x_{k,N+1}$.

Функция $G(z)$ является нечетной функцией от z, поэтому интеграл вдоль части контура, находящейся на мнимой оси, а также по полуокружностям с центрами в $\pm ix_{k,0}$ обращается в нуль.

Если $z = u + iv$, то при больших v и при $u \geq 0$ функция $G(z)$ будет иметь порядок $O\left(\frac{1}{|v|e^{2|v|(1-t)}}\right)$, и для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон контура, стремятся к нулю при $B \to \infty$.

Таким образом, получаем формулу

$$T_N(t) = -S_N(t) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N-iB}^{A_N+iB}\frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k)\sin^2 z}dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\substack{|z|=r\\ -\pi/2<\varphi<\pi/2}}\frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k)\sin^2 z}dz, \quad z = re^{e^{i\varphi}},$$

где

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N}\cos 2\pi nt.$$

При $N \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N-iB}^{A_N+iB}\frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z}dz \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi i}\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{\cos 2zt}{\sin 2z\pi + \dfrac{2}{h}z\sin^2 z\pi}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2N+1)t\operatorname{ch}(2tv) - i\sin(2N+1)t}{-i\operatorname{sh}(2v\pi) + \dfrac{2}{h}(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch}(2v\pi))}dv \equiv I. \tag{19}$$

Легко показать, что

$$|I| < \frac{\text{const}}{A_N\cos\dfrac{\pi t}{2}}, \tag{20}$$

$$\int\limits_0^1 T_N(t) f_k(t)\,dt = -\int\limits_0^1 S_N(t) f_k(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 f_k(t)\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k)\sin^2 z}dzdt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_0^1 f_k(t)\int\limits_{\substack{|z|=r\\ -\pi/2<\varphi<\pi/2}}\frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k)\sin^2 z}dzdt. \tag{21}$$

При $r \to 0$, используя условие 4, имеем

$$\int\limits_0^1 f_k(t) \int\limits_{\substack{|z|=r \\ -\pi/2<\varphi<\pi/2}} \frac{-zh\cos 2zt}{(-hz\operatorname{ctg} z+1-z^2-\gamma_k)\sin^2 z}dzdt =$$

$$= \int\limits_0^1 f_k(t) \int\limits_{\substack{|z|=r \\ -\pi/2<\varphi<\pi/2}} \frac{2zh\sin^2 zt}{(-hz\operatorname{ctg} z+1-z^2-\gamma_k)\sin^2 z}dzdt \sim$$

$$\sim \int\limits_0^1 f_k(t) \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2re^{i\varphi}h(re^{i\varphi}t)^2 d\varphi dt}{(1-\gamma_k)(re^{i\varphi})^2 - h(re^{i\varphi})^2}. \tag{22}$$

Правая часть (22) при $r \to o$ сходится к 0.

При $N \to \infty$ из (19) и (20) с учетом условия (17) получаем, что третий член в правой части (21) тоже стремится к нулю. Итак,

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^1 T_N(t)\, f_k(t)\, dt = -\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^1 S_N(t)\, f_k(t)\, dt = -\frac{f_k(1)+f_k(0)}{4}. \tag{23}$$

Учитывая (23), из (18) находим

$$\sigma_1 = -\sum_{k=N}^{\infty} \frac{f_k(0)+f_k(1)}{4}.$$

Проводя аналогичные вычисления для σ_2, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(0)+f_k(1)}{4} = -\frac{\operatorname{tr} q(0) + \operatorname{tr} q(1)}{4},$$

что доказывает справедливость теоремы 2.

Авторы выражают благодарность В. И. Горбачук и М. Л. Горбачуку за их внимание к настоящей работе.

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
2. *Walter J.* Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. – 1973. – **133**. – S. 301 – 312.
3. *Fulton Ch. T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1977. – **77**. – P. 293 – 308.
4. *Горбачук В. И., Рыбак М. А.* О граничных задачах для операторного уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничным условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. – Киев, 1981. – С. 3 – 13.
5. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 248 – 252.
6. *Алиев Б. А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Там же. – 2006. – **58**, № 8. – С. 46 – 52.

7. *Асланова Н. М.* Формула следа одной граничной задачи для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Сиб. мат. журн. – 2008. – **49**, № 6. – С. 1207 – 1215.
8. *Михайлец В. А.* Распределение собственных значений операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 3. – С. 607 – 619.
9. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 4. – С. 593 – 596.
10. *Дикий Л. А.* Новый метод вычисления собственных значений оператора Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 1.
11. *Дикий Л. А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля // Успехи мат. наук. – 1958. – 13, вып. 3 (81). – С. 111 – 143.
12. *Hilbert R. C., Kramer V. A.* Trace formulas for powers of a Sturm – Liouville operator // Can. J. Math. – 1964. – **16**, № 4. – P. 412 – 422.
13. *Гасымов М. Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 6. – С. 1202 – 1204.
14. *Садовничий В. А.* О следе разности двух дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1966. – № 12. – С. 1611 – 1624.
15. *Максудов Ф. Г., Байрамоглы М., Адыгезолов А. А.* О регуляризованном следе оператора Штурма – Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. – 1984. – **277**, № 4. – С. 795 – 799.
16. *Гашимов И. Ф.* Вычисление регуляризованного следа операторного уравнения Штурма – Лиувилля с особенностью на конечном отрезке. – Алма-Ата, 1989. – 37 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 7340.
17. *Содовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 2. – С. 129 – 152.
18. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2164 – 2166.
19. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. – 2006. – **61**, № 5. – С. 89 – 156.
20. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
21. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М., 1959. – Т. 5. – 655 с.
22. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма – Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 291 – 305.

Получено 20.11.09