УДК 517.5

Е. С. Смоловая
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

For the so-called ring Q-homeomorphisms between domains in metric spaces with measures, the problem of their extension to a boundary is investigated. Conditions on a function $Q(x)$ and on domain boundaries are established under which every ring Q-homeomorphism admits continuous or homeomorphic extension to a boundary. These results are applicable, in particular, to Riemannian manifolds, the Loewner spaces, to the Carnot groups and Heisenberg groups.

Досліджується проблема продовження на межу так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів між областями у метричних просторах із мірами. Знайдено умови на функцію $Q(x)$ та межі області, за яких будь-який кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Результати застосовні, зокрема, до ріманових многовидів, просторів Левнера, груп Карно та Гейзенберга.

1. Введение. По истории вопроса мы отсылаем читателя к статьям [1, 2] и монографии [3], где можно также найти дальнейшие ссылки. Приведем необходимые определения.

Кривой в метрическом пространстве (X,d) называется непрерывное отображение $\gamma:\,[a,b]\to X$. Ее *длина* есть супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d\left(\gamma(t_i),\, \gamma(t_{i-1})\right)$$

над всеми разбиениями $a=t_0\leq t_1\leq \ldots \leq t_k=b$ интервала $[a,b]$. Кривая γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Борелева функция $\rho:\,X\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в X (пишут $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_{\gamma}\rho\, ds \;\geq\; 1$$

для всех $\gamma\in\Gamma$.

В дальнейшем для любых множеств E, F и G в X через $\Delta(E,F,G)$ обозначено семейство все непрерывных кривых $\gamma:\,[0,1]\to X$ с $\gamma(0)\in E$, $\gamma(1)\in F$ и $\gamma(t)\in G$ для всех $t\in(0,1)$. Для $x_0\in X$ и $r>0$ через $B(x_0,r)$ обозначен шар $\{x\in X:\, d(x_0,x)<r\}$. Далее, (X,d,μ) обозначает пространство X с метрикой d и локально конечной борелевой мерой μ. Областью в X называется открытое множество, любые две точки которого можно связать кривой.

Модуль семейства кривых Γ в области G из X конечной хаусдорфовой размерности $\alpha>1$ определяется равенством

$$M(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{G}\rho^{\alpha}(x)\,d\mu(x)\,.$$

Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α

и $\alpha' > 1$ в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') соответственно и $Q\colon G \to [0, \infty]$ — измеримая функция.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{G}$, если неравенство

$$M(\Delta(fC_0, fC_1, G')) \leq \int\limits_{A \cap G} Q(x)\eta^{\alpha}(d(x_0, x))\,d\mu(x)$$

выполняется для любого кольца

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in X\colon r_1 < d(x, x_0) < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty,$$

любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)}$ и $C_1 \subset X \setminus B(x_0, r_2)$ и любой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geq 1.$$

Пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1} r^{\alpha} \leq \mu(B_r) \leq C r^{\alpha}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [4, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq C r^{\alpha} \tag{1}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (1) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Будем говорить, что граница области G *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset G$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq \delta$$

для любого континуума F в G, пересекающего ∂U и ∂V.

Будем также говорить, что граница ∂G *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq P \tag{2}$$

для любых континуумов E и F в G, пересекающих ∂U и ∂V.

Граница ∂G называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

Напомним также, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами*. Топологическое пространство T называется *линейно связным*, если любые две точки x_1 и x_2 можно соединить кривой $\gamma: [0,1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. *Областью* в T будем называть открытое линейно связное множество. Область G называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap G$ связно. Аналогично, говорим, что область G *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap G$ линейно связно.

Пусть G — область в пространстве (X, d, μ). Следуя [2], говорим, что функция $\varphi: G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$ (сокращенно $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \left|\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon\right| d\mu(x) < \infty, \tag{3}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x)$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (3) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому множеству $G(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

2. Предварительные замечания.

Лемма 1. *Пусть* G *— область в локально компактном метрическом пространстве* (X, d). *Тогда любое компактное множество* C *в* G *может быть вложено в континуум* K *из* G.

Доказательство. Для любого $x \in C$ существует шар $B(x, r)$ с $r = \delta(x) < \operatorname{dist}(x, \partial G)$ такой, что $\overline{B(x, r)}$ — компакт (см., например, утверждение 1.9.3 в [5, с. 129]). Тогда существует конечный набор таких шаров, покрывающих C. Более того, существует конечный набор связных компонент C_i, $i = 1, 2, \ldots \ldots$, n, таких шаров, покрывающих C. Заметим, что $\overline{C_i}$ компактны и связны, т. е. являются континуумами. Возьмем произвольные точки $x_0 \in G$ и $x_i \in \overline{C_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и соединим x_0 и x_i кривыми γ_i в G. Тогда множество

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} \left(|\gamma_i| \cup \overline{C_i}\right)$$

является континуумом в G, содержащим C.

Ниже представлены вспомогательные результаты из работы [2] (см. также главу 13 в монографии [3]), которые используются нами при доказательствах.

Предложение 1. *Если граница* ∂G *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, *то* ∂G *сильно достижима из* G *в точке* x_0.

Лемма 2. *Пусть* G — *открытое линейно связное множество в* (X, d, μ). *Если граница* ∂G *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, *то* G *локально линейно связно в* x_0.

Лемма 3. *Пусть* G — *область в пространстве* (X, d, μ), α*-регулярном сверху с* $\alpha \geq 2$ *в точке* $x_0 \in \overline{G}$ *и*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \log^{\alpha-2} \frac{1}{r} \mu(G \cap B(x_0, r)) \qquad \forall r \in (0, r_0). \tag{4}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : G \to \mathbb{R}$ *класса* $FMO(x_0)$

$$\int\limits_{G \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x, x_0) \log d^{-1}(x, x_0) \right)^{\alpha}} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in G} d(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) = \{ x \in X : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0 \}.$$

***Замечание* 1.** Условие (4) слабее *условия удвоения меры*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leq \gamma\, \mu(G \cap B(x_0, r)) \quad \forall r \in (0, r_0), \tag{5}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в работе [6]. Отметим также, что условие (5) автоматически выполняется во внутренних точках области G, если X регулярно по Альфорсу.

3. О непрерывном продолжении на границу. В дальнейшем (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевскими мерами μ и μ', а G и G' — области конечной хаусдорфовой размерности α и $\alpha' \geq 1$ в (X, d) и (X', d') соответственно.

Лемма 4. *Пусть область* G *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ — *компакт, а* $f : G \to G'$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм в* x_0 *такой, что граница* $\partial G'$ *сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \left\{ y \in X' : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in G \right\},$$

$Q : G \to [0, \infty]$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{G_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon)} Q(x)\, \psi^{\alpha}_{x_0, \varepsilon}(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{6}$$

для любого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $d(x_0) = \sup\limits_{x \in G} d(x, x_0)$,

$$G_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) = \{ x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0 \},$$

и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ *— семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на* $(0,\infty)$ *таких, что*

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \quad \varepsilon_0\in(0,d(x_0)).$$

Тогда f *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E\neq\varnothing$ вследствие компактности $\overline{G'}$ (см., например, замечание 3, п. 41 в [7]). По условию леммы $\partial G'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0\in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^*\in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0<r_0<d'(y_0,y^*)$.

В силу локальной линейной связности области G в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_k точки x_0 такая, что $G_k = G\bigcap V_k$ — области и $\operatorname{diam} V_k\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда найдутся точки y_k и $y_k^*\in F_k = fG_k$, близкие к y_0 и y^* соответственно, для которых $d'(y_0,y_k) < r_0$ и $d'(y_0,y_k^*) > r_0$ и которые можно соединить непрерывными кривыми C_k в областях F_k, $k = 1, 2, \ldots$. По построению

$$C_k \bigcap \partial B(y_0, r_0) \neq \varnothing$$

вследствие связности C_k.

По условию сильной достижимости точки y_0 найдутся компакт $C_0\subset G'$ и число $\delta>0$ такие, что

$$M(\Delta(C_0, C_k, G')) \geq \delta \tag{7}$$

для достаточно больших k, поскольку $\operatorname{dist}(y_0, C_k)\to 0$ при $k\to\infty$. В силу леммы 1 можно считать, что C_0 — континуум. Заметим, что $K = f^{-1}(C_0)$ также является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = \min(d(x_0), K) > 0$ в G. Пусть

$$B_\varepsilon := \{x\in X:\ d(x,x_0)<\varepsilon\}, \qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$$

и $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, такая, что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для почти всех $t\in(0,\infty)$, которая существует по теореме Лузина (см., например, утверждение 2.3.5 в [8]).

Тогда для функции

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)\,/\,I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon), & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0),\end{cases}$$

выполнено условие $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt \geq 1$.

Пусть $A = A(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)$. Возьмем произвольный континуум $K\subset B_\varepsilon\bigcap G$. Тогда, согласно (6),

$$M(\Delta(fK_0, fK, G')) \le \int\limits_{A\bigcap G} Q(x)\,\eta_\varepsilon^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{I^\alpha_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \int\limits_{G_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} Q(x)\,\psi^\alpha_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \to 0 \tag{8}$$

при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших k имеет место включение $G_k \subset B_\varepsilon$ и, следовательно, $f^{-1}(C_k) \subset B_\varepsilon \bigcap G$. Таким образом, получили противоречие между (8) и (7), т.е. предположение о существовании второй точки y^* в $C(x_0, f)$ было неверным.

Выбирая в лемме 4 $\psi(t) \equiv t^{-1}$, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть область G локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ — компакт и граница $\partial G'$ сильно достижима. Если измеримая функция $Q: G \to [0,\infty]$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right)$$

при $\varepsilon \to 0$, где

$$G_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = \{x \in G:\ \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$$

для $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x,x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм f: $G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Комбинируя леммы 3, 4 и выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t\log t^{-1}$, $t \in (0, \delta_0)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X α-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial G$, $\alpha \ge 2$, где G локально линейно связна и удовлетворяет условию* (11), *а $\overline{G'}$ компактно и $\partial G'$ сильно достижима. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f: G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').*

4. О продолжении на границу обратных отображений.

Лемма 5. *Пусть $f: G \to G'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_\mu(G)$. Если область G локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial G$, $x_1 \ne x_2$, а G' имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1, f) \bigcap C(x_2, f) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим, что $E_1 \bigcap E_2 \ne \varnothing$. Поскольку область G локально линейно связна в точках x_1 и x_2, существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 соответственно такие, что $W_1 = G \bigcap U_1$ и $W_2 = G \bigcap U_2$ — области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1, \delta/3)$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2, \delta/3)$. Согласно неравенству треугольника $\operatorname{dist}(W_1, W_2) \ge \delta/3$, и пусть функция

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{\delta}, & x \in \left(\dfrac{\delta}{3}; \dfrac{2\delta}{3}\right), \\[2ex] 0, & x \notin \left(\dfrac{\delta}{3}; \dfrac{2\delta}{3}\right). \end{cases}$$

Тогда имеем $\int_{\delta/3}^{2\delta/3} \eta(t)\,dt = \int_{\delta/3}^{2\delta/3} \frac{3}{\delta}\,dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$

$$M(\Delta(fK_1, fK_2, G')) \le \int\limits_{A(\delta/3;\, 2\delta/3;\, x_1) \cap G} Q(x)\, \eta^{\alpha}(d(x_1, x_2))\, d\mu(x) \le$$

$$\le \frac{3^{\alpha}}{\delta^{\alpha}} \int\limits_{A(\delta/3;\, 2\delta/3;\, x_1) \cap G} Q(x)\, d\mu(x) < \infty,$$

так как $Q \in L^1_{\mu}(G)$.

Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости (2), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \ne \varnothing$, было неверно.

Согласно лемме 5 получаем, в частности, следующее заключение.

Теорема 3. *Пусть область G локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{G}$ — компакт, область G' имеет слабо плоскую границу, а $f\colon G \to G'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{\mu}(G)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon G' \to G$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{G'} \to \overline{G}$.*

***Замечание* 2.** В лемме 5 и теореме 3, как и во всех последующих теоремах, достаточно требовать вместо условия $Q \in L^1_{\mu}(G)$ интегрируемость Q в окрестности ∂G, предполагая Q продолженным нулем вне G.

5. О гомеоморфном продолжении на границу. Комбинируя леммы 2, 4 и 5, получаем следующие результаты.

Лемма 6. *Пусть область G локально линейно связна на границе, область G' имеет слабо плоскую границу и $\overline{G}$, $\overline{G'}$ — компакты. Если функция $Q\colon G \to [0, \infty]$ класса $L^1_{\mu}(G)$ удовлетворяет условию* (6) *в каждой точке $x_0 \in \partial G$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Теорема 4. *Пусть области G и G' имеют слабо плоские границы, $\overline{G}$ и $\overline{G'}$ — компакты и $Q\colon G \to [0, \infty]$ — функция класса $L^1_{\mu}(G)$ с*

$$\int\limits_{G_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right)$$

в каждой точке $x_0 \in \partial G$, *где*

$$G_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = \{x \in G:\ \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\},$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) := \sup_{x\in G} d(x,x_0).$$

Тогда любой кольцевой Q*-гомеоморфизм* $f: G \to G'$ *допускает продолжение до гомеоморфизма* $\overline{f}: \overline{G} \to \overline{G'}$.

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы* 4 *имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}}$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Как и ранее, здесь подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Теорема 5. *Пусть* G *— область в* α*-регулярном сверху пространстве* (X,d,μ), $\alpha \geq 2$, *которая локально линейно связна и удовлетворяет условию* (11) *во всех граничных точках,* G' *— область в пространстве* (X',d',μ') *со слабо плоской границей, а* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ *— компакты. Если функция* $Q: G \to [0,\infty]$ *имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках, то любой кольцевой* Q*-гомеоморфизм* $f: G \to G'$ *продолжим до гомеоморфизма* $\overline{f}: \overline{G} \to \overline{G'}$.

Следствие 2. *В частности, заключение теоремы 5 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x) < \infty$$

во всех точках $x_0 \in \partial G$, *где* $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G:\ d(x,x_0) < \varepsilon\}$.

Все приведенные результаты применимы, в частности, на римановых многообразиях, в пространствах Левнера, к группам Карно и Гейзенберга.

1. *Ломако Т. В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1329 – 1337.
2. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2007. – **4**, № 2. – P. 199 – 234.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009.
4. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.
6. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, № 3. – P. 403 – 424.
7. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
8. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

Получено 03.11.09