УДК 519.21

В. Л. Гирко, Т. С. Кокобинадзе, О. Г. Чайка

Распределение собственных чисел гауссовских случайных матриц

В настоящей статье найдено распределение собственных чисел случа ной несимметричной вещественной матрицы Ξ_n, элементы которой незав симы и распределены по стандартному нормальному закону. Плотность ра пределения элементов такой матрицы равна:

$$p(X) = (2\pi)^{-n^2/2} \exp\{-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,XX'\}.$$

Пусть $\Lambda_n = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_s & \mu_s \\ -\mu_s & \lambda_s \end{pmatrix}, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-2s}\right\}$, $(\lambda_k$: $\pm i\mu_k)$, λ_r — собственные числа матрицы Ξ_n, K — множество веществе ных неслучайных матриц Якоби n-го порядка. Собственные числа λ_k $+ i\mu_k$, $\lambda_k - i\mu_k$, $k = \overline{1, s}$, упорядочены по модулю в возрастающем поря ке, причем среди сопряженных собственных чисел на первое место стави ся то, у которого $\mu_k \geqslant 0$, величины λ_l, $l = \overline{s+1, n-2s}$, упорядочены ı возрастанию [1 — 3]. Введем обозначение

$$Y_s = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ -y_s & x_s \end{pmatrix}, \quad x_{s+1}, \ldots, x_{n-2s}\right\}.$$

Пусть $\varphi(Y_s) = 1$, если величины $x_k \pm iy_k$, $k = \overline{1, s}$, x_l, $l = \overline{k+1, n-2}$ упорядочены приведенным выше способом, и $\varphi(Y_s) = 0$ в противном случа

Теорема. *Если элементы матрицы Ξ_n независимы и распределеı по стандартному нормальному закону, то при $n \geqslant 2$*

$$\mathbf{P}\{\Lambda_n \in B\} = \Sigma_{s=0}^{[n/2]} c_s \int\limits_{Y_s \in B} \exp\{-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,Y_s Y_s'\} [J_s(Y_s)]^{1/2} \varphi(Y_s)\,\psi(Y_s)\,dY_s, \qquad ($$

где B — любое измеримое подмножество матриц множества K_n, ко станты c_s удовлетворяют системе уравнений

$$\Sigma_{s=0}^{[n/2]} c_s \int \det Y_s^{2k} \exp\{-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,Y_s Y_s'\} |J_s(Y_s)|^{1/2} \varphi(Y_s)\,\psi(Y_s)\,dY_s =$$

$$= 2^k \Pi_{i=1}^k \Gamma((n + 2k + 1 - i)/2) [\Pi_{i=1}^n \Gamma((n + 1 - i)/2)]^{-1}, \quad k = \overline{0, [n/2]};$$

$$\psi(Y_s) = \Pi_{p=1}^s \int\limits_{-1}^{1} \exp\{-2y_p^2((1 - x^2)^{-1} - 1)\}(1 - x^2)^{1/2} dx\,|y_p|, \quad \psi(Y_0) = 1;$$

$$\psi(Y_1)_{n=2} = \int\limits_{-1}^{1} \exp\{-2y_1^2((1 - x^2)^{-1} - 1\}(1 - x^2)^{-1} dx\,|y_1|,$$

$$J_s(Y_s) = |\Pi_{p \neq l}(q_p - q_l)|, \qquad ($$

q_p, $p = \overline{1, n}$, — *собственные числа матрицы Y_s.*

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 3.3 [3, с. 74], выберем замену переменных $Z = XY_kX^{-1}$. Здесь элементы ма рицы X удовлетворяют следующим условиям: матрица X представима в виде $X = H(X)S(X)$, где $H(X)$ — ортогональная действительная матрица, $S(X)$ — верхняя треугольная матрица, диагональные элементы которой равны 1,

$$s_{11} = (1 - s_{21}^2)^{1/2}, \quad s_{22} = 1, \quad s_{33} = (1 - s_{43}^2)^{1/2}, \ldots, \quad s_{kk} = 1,$$
$$s_{k+1\,k+1} = 1, \ldots, \quad s_{nn} = 1, \quad |s_{21}| < 1, \quad |s_{43}| < 1, \ldots, \quad |s_{kk-1}| < 1. \tag{3}$$

Покажем, что такой выбор матрицы X возможен. Вместо преобразования $Z = HSY_kS^{-1}H'$ рассмотрим следующее:

$$Z = H\tilde{S}\tilde{Y}_k\tilde{S}^{-1}H', \tag{4}$$

где

$$\tilde{Y}_k = \mathrm{diag}(\lambda_1 + i\mu_1, \lambda_1 - i\mu_1, \ldots, \lambda_k + i\mu_k, \lambda_k - i\mu_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-2k}),$$
$$\tilde{S} = \{(\vec{s}_1 + i\vec{s}_2), (\vec{s}_1 - i\vec{s}_2), \ldots, (\vec{s}_{2k-1} - i\vec{s}_{2k}), \vec{s}_{2k+1}, \ldots, \vec{s}_n\},$$

$\vec{s}_i$ — векторы-столбцы матрицы S.

В равенстве (4) над матрицей $\tilde{S}$ можно сделать следующее преобразование: $Z = H(\tilde{S}\Lambda)\tilde{Y}(\tilde{S}\Lambda^{-1})H'$, где Λ — произвольная диагональная комплексная матрица. Пусть первые два диагональных элемента матрицы Λ соответственно равны $d_1 + id_2$, $d_1 - id_2$, где d_1 и d_2 — произвольные постоянные. Первые две компоненты векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ матрицы S после такого преобразования примут вид

$$\begin{bmatrix} s_{11}d_1 & s_{11}d_2 \\ s_{21}d_1 - s_{22}d_2 & s_{22}d_1 + s_{21}d_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \tilde{s}_{11} & \tilde{s}_{12} \\ \tilde{s}_{21} & \tilde{s}_{22} \end{bmatrix}$$

(символ «:=» означает равенство по определению). Выберем d_1 и d_2 такими, чтобы векторы-столбцы этой матрицы имели единичную длину. После простых вычислений, учитывая (3), получим, что это возможно, когда

$$d_1 = d_2\{2s_{21}s_{22} \pm [4s_{21}^2s_{22}^2 + (s_{11}^2 - s_{22}^2 + s_{21}^2)]^{1/2}\}(s_{11}^2 - s_{22}^2 + s_{21}^2)^{-1},$$

$$d_2 = \pm[2^{-1}(s_{22}^2 + s_{11}^2 + s_{21}^2)(1 + \{2s_{21}s_{22} \pm [4s_{21}^2s_{22}^2 + (s_{11}^2 - s_{22}^2 + s_{21}^2)^2]^{1/2}\} \times$$
$$\times (s_{11}^2 - s_{22}^2 + s_{21}^2)^{-1})^2)]^{-1/2}.$$

Следовательно, почти для всех s_{ij}

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_{11} & \tilde{s}_{12} \\ \tilde{s}_{21} & \tilde{s}_{22} \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} (1 - u^2)^{1/2} & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix},$$

где H — ортогональная матрица второго порядка, $|u| < 1$.

Итак, матрицу S с вероятностью 1 можно выбрать указанным выше способом.

Покажем, что при таком выборе матрицы X система уравнений $Z = XY_kX^{-1}$, $q_i \neq q_j$, $i \neq j$, однозначно определяет матрицы X и Y_k.

Предположим, что это не так и что кроме матрицы X этой системе уравнений удовлетворяет также матрица XC, где C — диагональная невырожденная вещественная матрица. Тогда $XC = HSC$. Матрица SC определяется по матрице XC однозначно, но тогда $c_i = 1$, так как диагональные элементы матрицы C должны быть равны 1.

Из теоремы 3.3.1 [3, с. 74], для любой непрерывной и ограниченной функции $f(\Lambda_n)$ с помощью преобразования $Z = XY_kX^{-1}$ получаем

$$\mathbf{M}f(\Lambda_n) = \Sigma_{k=0}^{[n/2]} c_k \int f(Y_k) \exp\{-0{,}5\,\mathrm{Sp}(X_nY_kX_n^{-1})(X_nY_kX_n^{-1})'\} \times$$

$$\times J_k(Y_k)\,\varphi\,(Y_k)\,dY_k\,|\det X_n|^{-n}\Pi_{i=1}^{k}\delta\,(s_{2i,2i}(x)-1)\,\delta\,(s_{2i-1,2i-1}(x)-$$

$$-[1-s^2_{2i,2i-1}(x)]^{1/2}\Pi_{i=k+1}^{n}\delta\,(s_{ii}-1), \tag{5}$$

где $s_{ii}(x)$ определены системой уравнений $X=H(X)\,S(X)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, c_k — некоторые постоянные, область интегрирования — $|s_{ll-1}|<1$, $l=\overline{2,k}$.

В интеграле (5) проделаем замену переменных $X=HS_k$, где H — ортогональная матрица, S_k — верхняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали. Якобиан такой замены переменных равен $\varkappa(\theta_i)\,\Pi_{i=1}^{n}s_{ii}^{i-1}$ [3, с. 18], где θ_i — углы Эйлера матрицы H, $\varkappa$ — некоторая борелевская функция. Тогда (5) примет вид

$$\mathbf{M}f(\Lambda_n)=\Sigma_{k=0}^{[n/2]}\widetilde{c}_k\int f(Y_k)\exp\{-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,(\widetilde{S}_kY_k\widetilde{S}_k^{-1})\times$$

$$\times(\widetilde{S}_kY_k\widetilde{S}_k^{-1})'\}\,J_k(Y_k)\,\varphi\,(Y_k)\,\Pi_{i=1}^{n}(\bar{s}_{ii})^{-n+i-1}dY_kd\widetilde{S}_k, \tag{6}$$

где диагональные элементы матрицы S_k равны 1.

Рассмотрим в интеграле (6) замену переменных $\widetilde{S}_kY_k\widetilde{S}_k^{-1}=Q_k$, где матрица Q_k построена следующим образом;

$$Q_k=\begin{bmatrix} L_1 & & & & & & 0\\ & L_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & x_{2k+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ q_{ij} & & & & & & x_{n-2k}\end{bmatrix};$$

здесь

$$L_p=\begin{bmatrix} x_p-y_ps_{2p,2p-1} & (1-s^2_{2p,2p-1})^{1/2}y_p\\ (-y_p-s^2_{2p,2p-1}y_p)\,(1-s^2_{2p,2p-1})^{1/2} & s_{2p,2p-1}y_p+x_p\end{bmatrix},$$

а элементы q_{ij} не зависят от переменных $s_{2p,2p-1}$, $p=\overline{1,k}$, x_p, y_p, $p==1,2,\ldots$.

Очевидно, что

$$L_p=\begin{bmatrix}(1-s^2_{2p,2p-1})^{1/2} & 0\\ s_{2p,2p-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p & y_p\\ -y_p & x_p\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}(1-s^2_{2p,2p-1})^{-1/2} & 0\\ -s_{2p,2p-1}(1-s^2_{2p,2p-1})^{-1/2} & 1\end{bmatrix}.$$

Используя это равенство, легко удостовериться в том, что преобразование $\widetilde{S}_kY_k\widetilde{S}_k^{-1}=Q_k$ почти для всех матриц Q_k взаимно однозначно.

Вычислим якобиан преобразования $Q_k=\widetilde{S}_kY_k\widetilde{S}_k^{-1}$. Для этого нужно вычислить якобиан преобразования

$$Q_k=P_k\widetilde{Y}_kP_k^{-1}, \tag{7}$$

где

$$P_k=\widetilde{S}_kH_k,\quad H_k=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix},1,\ldots,1\right\},$$

$$\widetilde{Y}_k=\mathrm{diag}\,\{x_1+iy_1,\;x_1-iy_1,\;\ldots,\;x_k-iy_k,\;x_{2k+1},\;\ldots,\;x_{n-2k}\};$$

количество матриц второго порядка $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ в матрице H_k равно k. Преобразование (7) эквивалентно замене переменных

$$q_{lj} = \Sigma_{m=1}^{n} p_{lm} z_m p_{mj}^{(-1)}, \quad l < j, \quad l \neq j+1, \quad j = 1, 3, \ldots, 2k-1, \quad x_p = x_p',$$
$$p = \overline{1, n-2k}, \quad y_p = y_p', \quad p = \overline{1, k}, \quad s_{2p,2p-1} = s'_{2p,2p-1}, \quad p = \overline{1, k},$$

где z_m — m-й диагональный элемент матрицы $\widetilde{Y}_k$, $p_{mj}^{(-1)}$ — элементы матрицы P_k^{-1}.

Так же, как и в [3, с. 75], убеждаемся, что якобиан преобразования (7) имеет вид

$$\operatorname{mod} \det \left[\frac{\delta q_{lj}}{\delta s_{pm}} \right]_{p<m,\ p\neq m+1,\ m=1,3,\ldots,2k-1}^{l<j,\ l\neq j+1,\ j=1,3,\ldots,2k-1}.$$

Очевидно, что

$$\Sigma_{t<l,\ t\neq l+1,\ l=1,3,\ldots,2k-1} p_{it}^{(-1)} (\delta q_{tl}/\delta s_{pm})\, p_{lj} = \theta_{ij}^{(p,m)} (z_i - z_j),$$
$$i < j, \quad i \neq j+1, \quad j = 1, 3, \ldots, 2k-1,$$

где $\theta_{ij}^{(p,m)}$ — элементы матрицы $P_k^{-1} (\delta p_k/\delta s_{pm})$, $s_{ip}^{(-1)}$ —элемент матрицы P^{-1}.

Далее,

$$\operatorname{mod} \det \left[\frac{\delta q_{lj}}{\delta s_{pm}} \right] \det [p_{it} p_{lj}] = \operatorname{mod} \det [\theta_{ij}^{(p,m)} (z_i - z_j)] =$$
$$= \Pi_{p>l} | z_p - z_l | \{ \Pi_{p=1,3,\ldots,2k-1} | z_p - z_{p+1} |^{-1} \} \gamma (\widetilde{S}_k),$$

где $\gamma(\widetilde{S}_k)$ — некоторая борелевская функция элементов матрицы $\widetilde{S}_k$. Найдем функцию γ. Введем матрицу $\widetilde{Q}_k = (\widetilde{q}_{pl})$, где $\widetilde{q}_{pl} = q_{pl}$, если $p < l$, $p \neq l+1$, $l = 1, 3, \ldots, 2k-1$, $p = \overline{1, 2k}$, и $\widetilde{q}_{pl} = q_{pl}$, если $p \leqslant l$, $\widetilde{q}_{pl} = 0$ в противном случае; q_{pl} — элементы матрицы Q_k. Для любой ограниченной и интегрируемой функци• $f(\widetilde{Q}_k)$ рассмотрим интеграл $I := \int f(\widetilde{Q}_k)\, d\widetilde{Q}_k$. В этом интеграле сделаем замену переменных $Q_k = A Q_k' A^{-1}$, где $A = (a_{pl})$ — вещественная квадратная матрица n-го порядка, у которой $a_{l,l} > 0$, $a_{pl} = 0$, если $p > l$. Якобиан такой замены переменных имеет вид

$$\Theta_1(A) := \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}^{i} \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}^{-(n-i+1)} \Pi_{i=1}^{2k-1} a_{ii} a_{i+1\ i+1}^{-1}. \tag{8}$$

Первый и второй сомножители — соответственно левая и правая мера Хаара на группе матриц A. После этой замены переменных введем замену $Q_k = \widetilde{S}_k Y_k \widetilde{S}_k^{-1}$, где матрицы $\widetilde{S}_k$ и Y_k описаны выше. Тогда, используя (7) и (8), получим

$$I = \int f(A S_k Y_k S_k^{-1} A^{-1}) \Pi_{p>l} | z_p - z_l | \{ \Pi_{p=1,3,\ldots,2k-1} | z_p -$$
$$- z_{p+1} |^{-1} \} \gamma (\widetilde{S}_k)\, \Pi_{i=1}^{k} | \delta (s_{2i,2i} - 1)\, \delta (s_{2i-1,\,2i-1} -$$
$$- (1 - s_{2i,2i-1}^{2})^{1/2}]\, \Pi_{i=k+1}^{n} \delta (s_{ii} - 1)\, dS_k \theta_1 (A), \tag{9}$$

где $S_k = (s_{ij})$ — треугольная нижняя матрица, $dS_k = \Pi_{i\leqslant j} ds_{ij}$. Используя (7) и замену переменных $S_k = A S_k'$, находим:

$$I = \int f (A S_k Y_k S_k^{-1} A^{-1}) \Pi_{p>l} | z_p - z_l | \{ \Pi_{p=1,3,\ldots,2k-1} | z_p - z_{p+1} |^{-1} \gamma (A S_k) \Pi_{i=1}^{k} \times$$
$$\times | \delta (\widetilde{s}_{2i,2i-1})\, \delta (\widetilde{s}_{2i-1,2i-1}) - (1 - \widetilde{s}_{2i,2i-1}^{2})^{1/2}]\, \Pi_{i=k+1}^{n} \delta (\widetilde{s}_{ii} - 1)\, dS_k \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}^{i}, \tag{10}$$

где $\widetilde{s}_{ij}$ — элементы матрицы AS_k.

Из (9) и (10) в силу того, что функцию f можно выбрать любой, получаем

$$\gamma(\widetilde{S}_k) = c\Pi_{i=1}^{n}\bar{s}_{ii}^{-(n-i+1)}\Pi_{i=1}^{2k-1}\bar{s}_{ii}\bar{s}_{i+1\,i+1}^{-1},$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $\bar{s}_{ii}$ — элементы матрицы $\widetilde{S}_k$.

Очевидно, что

$$\operatorname{Sp} Q_k Q_k' = 2\Sigma_{p=1}^{k}(x_p^2 + y_p^2) + 4\Sigma_{p=1}^{k} y_p^2((1 - s_{2p,2p-1}^2)^{-1} - \\ - 1) + \Sigma_{p<l,\ p\neq l+1,\ l=1,3,\ldots,2k-1} q_{pl}^2.$$

Используя это равенство, выражение для $\gamma(\widetilde{S}_k)$ и вводя замену переменных $\widetilde{S}_k Y_k \widetilde{S}_k^{-1} = Q_k$, интеграл (6) запишем в виде

$$\mathbf{M} f(\Lambda_n) = \Sigma_{s=0}^{[n/2]} c_s' \int f(Y_s) \exp\{-0{,}5 \operatorname{Sp} Y_s Y_s'\} [J_s(Y_s)]^{1/2} \varphi(Y_s) \psi(Y_s)\, dY_s.$$

Из этого равенства получаем (1). Систему уравнений (2) находим с помощью результата из [3, с. 31]:

$$\mathbf{M} \det \Xi^{2k} = 2^k \Pi_{i=1}^{n} \Gamma((n + 2k + 1 - i)/2) [\Pi_{i=1}^{n} \Gamma((n + 1 - i)/2)]^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Условная плотность распределения собственных чисел матрицы Ξ_n при условии, что среди собственных чисел ровно s пар сопряженных, а остальные вещественные, равна*

$$c_s \exp\{-0{,}5 \operatorname{Sp} Y_s Y_s'\} [J_s(Y_s)]^{1/2} \varphi(Y_s) \psi(Y_s).$$

1. *Гирко В. Л.* Распределение собственных чисел и собственных векторов эрмитовых случайных матриц.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 5, с. 533—537.
2. *Гирко В. Л.* Распределение собственных чисел и векторов унитарных случайных матриц.— Теор. вероятностей и математическая статистика, 1981, вып. 25, с. 14—17.
3. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов.— К. : Вища школа, 1980.— 368 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию
22.06.82