УДК 517.54

О. А. Бусовская

Интегральные средние производных звездных функций

Пусть S— класс всех регулярных и однолистных в $E = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Функция Кебе $k(z) = z/(1-z)^2$ принадлежит классу S и является в этом классе экстремалью во многих задачах геометрической теории функций, в частности, в задачах об оценке интегральных средних

$$M_p(r, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta, \quad p > 0.$$

Наиболее ранний результат в этом направлении получен в [1], где показано, что неравенство $M_p(r, f) \leqslant M_p(r, k)$ выполняется в классе S с некоторой аддитивной постоянной для $p = 1, 2$. Точный результат для всех вещественных p был получен в [2].

Вопрос, является ли k экстремалью в задаче об оценке интегральных средних производных в классе S, остается открытым. В [3] показано, что неравенство

$$M_p(r, f') \leqslant M_p(r, k') \tag{1}$$

для $0 < p < 1/3$, вообще говоря, неверно. Тем не менее, (1) выполняется в некоторых подклассах класса S (см. [4—6]). В частности, как впервые показано в [4], неравенство (1) справедливо в подклассе S^* класса S, который состоит из функций, отображающих E на области, звездные относительно начала координат. Известно, что функция f из S принадлежит классу S^* в том и только том случае, если $\operatorname{Re} zf'(z)/f(z) > 0$ при $z \in E$. Налагая дополнительные ограничения на область значений $zf'(z)/f/(z)$ в E, можно выделять различные подклассы класса S^*, не содержащие функцию Кебе.

Основная цель настоящей работы — доказать, что экстремалью в задаче об оценке интегральных средних производных в таких классах является выделенный в [7] аналог функции Кебе. Все исследования проводятся методом Бернстайна [2], основанном на свойствах функций действительного переменного.

Пусть $L[a, b]$ — пространство измеримых, интегрируемых на $[a, b]$ функций. Определим преобразование $\varphi \to \varphi^*$ пространства $L[-\pi, \pi]$ в пространство $L[0, \pi]$ по формуле

$$\varphi^*(\theta) = \sup_{|A|=2\theta} \int_A \varphi(x)\, dx,$$

где $|A|$ — мера Лебега множества A, содержащегося в $[-\pi, \pi]$. Симметрическим невозрастающим преобразованием $\varphi \to \varphi^{(*)}$ пространства $L[-\pi, \pi]$ в себя будем называть такое преобразование, что для любого $t \in (-\infty, \infty)$ $|\{x : \varphi(x) > t\}| = |\{x : \varphi^{(*)}(x) > t\}|$, и для любого $t \in (-\infty, \infty)$ множество $\{x : \varphi^{(*)}(x) > t\}$ связно и симметрично относительно нуля.

Для $\varphi \in L[-\pi, \pi]$ определим

$$J(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx.$$

Очевидно, $J(\varphi) = J(\varphi^{(*)})$.

Приведем некоторые свойства преобразования $\varphi \to \varphi^*$. Как отмечалось в [6], это преобразование полуаддитивно, т. е. если $\varphi, \psi \in L[-\pi, \pi]$, то $(\varphi+\psi)^* \leqslant \varphi^*(\theta) + \psi^*(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и равенство достигается только лишь при $\varphi = \varphi^{(*)}$, $\psi = \psi^{(*)}$.

Пусть теперь $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — субгармонические функции в E. Обозначим $u(\varphi, r, \theta) = \varphi(re^{i\theta})$.

Будем говорить, что φ подчинена ψ, если существует функция $\omega(z)$, аналитическая в круге E, $|\omega(z)| \leqslant |z|$ в E, и такая, что $\varphi(z) = \psi(\omega(z))$.

Если φ подчинена ψ, то согласно [6] для любого $r \in (0, 1)$ $u^*(\varphi, r, \theta) \leqslant u^*(\psi, r, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Вещественнозначную функцию Φ, определенную на $(-\infty, \infty)$, будем называть выпуклой, если для любых вещественных x_1, x_2 выполняется неравенство

$$\Phi((x_1 + x_2)/2) \leqslant 1/2\,(\Phi(x_1) + \Phi(x_2)). \tag{2}$$

Если для всех $x_1 \neq x_2$ в (2) имеет место строгое неравенство, то функцию Φ будем называть строго выпуклой. Основным средством исследования интегральных средних в [2], а также в других работах, является предложение 3 из [2], описывающее свойства интегральных средних неубывающих выпуклых функций. Нам потребуется предложение 3 в следующей измененной редакции:

Лемма 1. *Пусть* $\varphi, \psi \in L[-\pi, \pi]$, $J(\varphi) = J(\psi)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:* а) *для любой выпуклой функции* Φ *на* $(-\infty, \infty)$ $J(\Phi(\varphi)) \leqslant J(\Phi(\psi))$; б) *для любого* $t \in (-\infty, \infty)$ $J([\varphi - t]^+) \leqslant J([\psi - t]^+)$; в) $\varphi^*(\theta) \leqslant \psi^*(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Доказательство леммы 1 целиком основано на результатах [2], но условие $J(\varphi) = J(\psi)$, которое выполняется при исследовании интегральных средних аналитических функций, позволяет опустить требование монотонности Φ в теореме 1 из [2] и теореме 1 из [6].

Пусть D — область расширенной плоскости, D^* — область, полученная из области D с помощью круговой симметризации (определение круговой симметризации см. в [8]). Через G обозначим выпуклую область, расположенную в правой полуплоскости, содержащую точку $W = 1$ и такую, что $G = G^*$. Обозначим $h_f(z) = zf'(z)/f(z)$ и рассмотрим класс S_G^* регулярных в E функций $f \in S^*$ таких, что $h_f(E) \leqslant G$. Отметим, что функция Кебе k не принадлежит классу S_G^*, если область G не совпадает с правой полуплоскостью.

Через g обозначим функцию, конформно отображающую круг E на область G с нормировкой $g(0) = 1$, $g'(0) > 0$.

Функция

$$k_G(z) = z \exp\left\{\int_0^z ((g(\zeta) - 1)/\zeta)\, d\zeta\right\}$$

принадлежит классу S_G^* и является в нем аналогом функции Кебе k в классе S^*.

Теорема 1. *Пусть* Φ — *выпуклая функция на* $(-\infty, \infty)$ *и* $0<r<1$. *Тогда в классе* S_G^* *имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|f'(re^{i\theta})|)\, d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|k_G'(re^{i\theta})|)\, d\theta.$$

При этом, если для некоторой строго выпуклой функции Φ *и некоторых* r *достигается равенство, то* $f(z) = e^{-i\alpha} k_G(e^{i\alpha} z)$, α — *вещественное.*

Доказательство. Из равенства $h_f(z) = zf'(z)/f(z)$ и полуаддитивности преобразования $\varphi \to \varphi^*$ следует, что для $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ $u^*(\log|f'|, r, \theta) \leqslant u^*(\log|h_f|, r, \theta) + u^*(\log|f|, r, \theta) - c\log r$, $c = 2\theta$.

В силу того, что h_f подчинена g, $u^*(\log|h_f|, r, \theta) \leqslant u^*(\log|g|, r, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Ввиду оценок интегральных средних функций класса S_G^*, полученных в [7], и леммы 1 $u^*(\log|f|, r, \theta) \leqslant u^*(\log|k_G|, r, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Поэтому $u^*(\log|f'|, r, \theta) \leqslant u^*(\log|g|, r, \theta) + u^*(\log|k_G|, r, \theta) - c\log r$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Для завершения доказательства первого утверждения теоремы остается показать, что при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ $u^*(\log|g|, r, \theta) + u^*(\log|k_G|, r, \theta) - c\log r = u^*(\log|k_G'|, r, \theta)$.

В силу свойств преобразования $\varphi \to \varphi^*$ это равенство имеет место только в том случае, если $u(\log|g|, r, \theta)$, $u(\log|k_G|, r, \theta)$ функции, симметричные относительно оси ординат на $[-\pi, \pi]$ и не возрастающие на $[0, \pi]$.

Симметричность обеих функций следует из симметричности области G относительно вещественной оси. Поскольку на $[0, \pi]$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log|k_G(re^{i\theta})| = -\operatorname{Im}\frac{re^{i\theta}k_G'(re^{i\theta})}{k_G(re^{i\theta})} = -\operatorname{Im} g(re^{i\theta}) < 0,$$

то $u(\log|k_G|, r, \theta)$ не возрастает на этом интервале. Для доказательства монотонности функции $u(\log|g|, r, \theta)$ достаточно показать, что

$$(\operatorname{Im} z)\cdot\left(\operatorname{Im}\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) \geqslant 0 \text{ при } z \in E.$$

Если область G ограничена достаточно гладкой кривой, то условие $G = G^*$ равносильно тому, что касательный вектор в точке $f(e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, направлен внутрь круга $w < |f(e^{\theta i})|$ и выражается неравенством

$$(\operatorname{Im} z)\cdot\left(\operatorname{Im}\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) \geqslant 0, \quad z = e^{i\theta}.$$

В силу принципа открытости для аналитических функций это неравенство сохраняется и в круге. В случае произвольной области нужно использовать ее аппроксимацию областями с гладкими границами.

Таким образом $u^*(\log|f'|, r, \theta) \leqslant u^*(\log|k_G'|, r, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, откуда по лемме 1 следует первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $f \in S_G^*$ и $f(z) \neq e^{-i\alpha}k_G(e^{i\alpha}z)$ ни при каком вещественном α. Тогда, как следует из [7], имеет место строгое неравенство $k_G'(-r) < |f'(re^{i\theta})| < k_G'(r)$ при всех вещественных θ. Поскольку $u(|k_G'|, r, \theta) = u^{(*)}(|k_G'|, r, \theta)$, найдется такое $\theta_0 \in [0, \pi]$, что $u^{(*)}(|f'|, r, \theta) < u(|k_G'|, r, \theta)$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ и $u^{(*)}(|f'|, r, \theta_0) = u(|k_G'|, r, \theta_0)$. Обозначим $I = (t_1, t_2)$, где $t_1 = \log|k_G'(re^{i\theta_0})|$, $t_2 = \log k_G'(r)$. Тогда для $t \in I$ имеет место строгое неравенство

$$J([\log|f'| - t]^+) < J([\log|k_G'| - t]^+) \tag{3}$$

Из доказанного выше и леммы 1 следует, что для остальных $t \in (-\infty, \infty)$

$$J([\log|f'| - t]^+) \leqslant J([\log|k_G''| - t]^+). \tag{4}$$

Рассуждая далее как при доказательстве теоремы 1 из [2], получаем второе утверждение теоремы для строго выпуклой неубывающей функции Φ. Используя соотношения $f = f^+ + f^-$ и $J(\log|f'|) = J(\log|k_G'|)$, нетрудно показать, что неравенства (3) и (4) имеют место и для функций $-\log|f'|$, $-\log|k_G'|$, что согласно [2] влечет за собой второе утверждение теоремы для строго выпуклой невозрастающей функции Φ, а следовательно, и для произвольной строго выпуклой функции Φ.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 1 следует, в частности, неравенство $M_1(r, f') \leqslant M_1(r, k_G')$ в классе S_G^*, когда $G = \{w : \operatorname{Re} w > \alpha\}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ полученное в [5].

Обозначим через S_p подкласс функций из S, отображающих единичный круг на области с p-кратной симметрией вращения. Каждой функции f из

S можно поставить в соответствие функцию F из S_p по формуле

$$F(z) = [f(z^p)]^{1/p}, \quad p \geqslant 2. \tag{5}$$

Естественно ожидать, что функция k_p, полученная из функции k по формуле (5) и являющаяся аналогом функции Кебе в классе S_p, будет экстремальной в задаче об оценке интегральных средних в этом классе.

Рассмотрим функцию $\varphi \in L[-\pi, \pi]$. Если $\psi(x) = \varphi(px)$ на $[-\pi/p, \pi/p]$ и периодична на $[-\pi, \pi]$ с периодом $2\pi/p$ то, как нетрудно видеть, $\varphi^*(\theta) \equiv \psi^*(\theta)$. Ввиду оценок интегральных средних функций класса S, полученных в [2], из этого свойства преобразования $\varphi \to \varphi^*$ вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Φ — выпуклая функция на $(-\infty, \infty)$ и $0 < r < 1$. Тогда в классе S_p имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|f(re^{i\theta})|)\, d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|k_p(re^{i\theta})|)\, d\theta.$$

При этом, если для некоторой строго выпуклой функции Φ и некоторых r достигается равенство, то $f(z) = e^{-i\alpha} k_p(e^{i\alpha} z)$, α — вещественное.

Рассмотрим подкласс функций из S_G^*, отображающих круг E на области с p-кратной симметрией вращения. Обозначим этот класс через $S_{G_p}^*$. Функция k_{G_p}, полученная из функции k_G по формуле (5), является аналогом функции Кебе в этом классе. Используя оценки интегральных средних функций класса S_G^* [7] и полученные выше результаты, можно показать, что функция k_{G_p} является экстремальной в задачах об оценке интегральных средних функций и их производных в классе $S_{G_p}^*$.

1. *Базилевич И. Е.* О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций.— Мат. сб., 1951, № 1, с. 147—164.
2. *Baernstain A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization.— Acta Math., 1974, 133, № 3/4, p. 139—169.
3. *Lohwater A. J., Piranian G., Rudin W.* The derivative of a schlicht functions.— Math. Scand., 1955, N 3, p. 103—106.
4. *Marx A.* Untersuchungen über schlichte Abbildungen.— Math. Ann., 1932, 107, S. 40—67.
5. *Демаховская Р. И.* Об одной экстремальной задаче теории специальных классов однолистных функций.— В кн.: Вопросы математической физики и теории функций, Киев : Наук. думка, 1964, с. 22—31.
6. *Leung Y. J.* Integral means of the derivatives of some univalent functions. — Bull. London Math. Soc., 1979, 11, p. 289—294.
7. *Бусовская О. А., Горяйнов В. В.* К теории звездных функций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 6—8.
8. *Хейман В. К.* Многолистные функции.— М. : Изд-во. иностр. лит., 1960.— 179 с.

Главный вычислительный центр
Министерства угольной промышленности УССР

Поступила в редакцию 07.07.81.
после переработки — 28.10.81