УДК 513.881

Ю. В. Богданский

Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения на бесконечномерной сфере

В работах [1, 2] в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве изучалась задача Коши для параболических уравнений с эллиптическими операторами, не имеющими конечномерных аналогов. Специфические свойства решений такой задачи позволяют, как было замечено Ю. Л. Далецким, осмысленно рассматривать задачу Коши для параболических уравнений с операторами такого типа на бесконечномерных многообразиях.

Пусть $S = S^\infty = S^\infty(R)$ — сфера в вещественном счетномерном гильбертовом пространстве H с центром в 0 радиуса R. Вложение S^∞ в H индуцирует на S^∞ структуру σ риманового многообразия класса C^∞, ∇ — соответствующая ей связность Леви—Чивиты, φ_p — стереографическая проекция сферы S на касательную к S в точке p гиперплоскость V_{φ_p} коразмерности 1. Вложение $i_p : V_{\varphi_p} \ni x \mapsto x - p \in H$ индуцирует на V_{φ_p} структуру гильбертова пространства. Зафиксируем изоморфизмы $\tau_p : V_{\varphi_p} \cong H$. Тогда карты $\varphi_p : D_{\varphi_p} \to V_{\varphi_p} \cong H$ согласованы со структурой σ.

Пусть $p, q \in S$. Тогда функция перехода имеет вид

$$G_{\varphi_q\varphi_p} = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1} : V_{\varphi_p} \underset{\tau_p}{\cong} H \ni x \to f(P_1 x, \|x\|^2)\, U_{qp} x + $$

$$+ P_2 F(P_1 x, \|x\|^2) \in H \underset{\tau_q}{\cong} V_{\varphi_q}, \tag{1}$$

где P_1 и P_2 — одномерные ортопроекторы, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ и $F : \mathbf{R}^2 \to H$ — отображения класса C^∞, а U_{qp} — унитарный оператор. Пусть $F'_{\psi\varphi}(p) = G'_{\psi\varphi}(\varphi(p))$. Громоздкое, но в общем несложное рассуждение показывает, что

$$F_{\varphi_q\varphi_p}(p) = \frac{4R^2 + \|\varphi_q(p)\|^2}{4R^2} U_{qp} + P_{qp}, \tag{2}$$

где P_{qp} вырожден.

Если $\varphi : D_\varphi \to V_\varphi \cong H$ — карта на S^∞, согласованная с σ, то линейной связности ∇ соответствует отображение (символы) Кристоффеля $\Gamma_\varphi : W_\varphi = \varphi(D_\varphi) \to \{H \to B_c(H)\}$, где $\{L_1 \to L_2\}$ — пространство ограниченных линейных операторов из L_1 в L_2, а $B_c(H)$ — снабженное естественной нормой пространство самосопряженных ограниченных линейных операторов в H. Для «стереографической» карты φ_p с помощью стандартной техники имеем

$$\Gamma_{\varphi_p}(y)\,\alpha : x \to \frac{2(y, \alpha)}{4R^2 + \|y\|^2} x - \frac{2}{4R^2 + \|y\|^2} \{(y, x)\,\alpha + (x, \alpha)\, y\}. \tag{3}$$

Пусть $C^k(M)$, $C^kT(M)$, $C^kB_cT(M)$ — пространства соответственно гладких функций, векторных полей и симметрических тензорных полей типа (1,1) на многообразии M. Для $u \in C^k(S)$ обозначим через $\nabla_{.}\nabla_{.} u$ гессиан функции u (см. [3]), т. е. $\nabla_{.}\nabla_{.} u \in C^{k-2}B_cT(S)$ и $\nabla_{.}\nabla_{.} u(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla u, Y\rangle$, где $X, Y \in C^kT(S)$; ∇u — градиент u, а $\langle , \rangle$ — метрический тензор.

Напомним (см. [1, 2]), что линейный положительный функционал α, определенный на замкнутом линейном подпространстве $\mathcal{D}_\alpha \subset B_c(H)$, содержащем тождественный и все вырожденные самосопряженные операторы, называется существенно бесконечномерным положительным, если все вырожденные самосопряженные операторы лежат в его ядре.

Замечание. Применяя теорему М. Г. Крейна (см. [4, с. 86]), можно было бы, не уменьшая общности, считать, что $\mathcal{D}_\alpha = B_c(H)$. Однако для всех известных конструктивных примеров таких функционалов $\mathcal{D}_\alpha \neq B_c(H)$ (см. [1, 2]).

Пусть $B_cT_p(S)$ — слой над $p \in S$ симметрического тензорного расслоения типа (1,1); $V \subset B_cT_p(S)$; $A \in V$; φ — карта в точке p и $A_\varphi = B_cT_p\varphi(A)$ — представление A в карте φ. Если ψ — другая карта в точке p, то

$$A_\psi = F^*_{\varphi\psi}(p) A_\varphi F_{\varphi\psi}(p). \tag{4}$$

Определение. *Отображение $j: V \to \mathbf{R}$ называется «существенно бесконечномерным положительным линейным функционалом в слое $B_cT_p(S)$», если для любой стереографической карты φ_p с $p \in D_{\varphi_p}$ представление отображения j в карте φ_p (т. е. $j \circ [B_cT_p\varphi]^{-1}$) является существенно бесконечномерным положительным линейным функционалом.*

Корректность этого определения следует из формул (1) и (4).

Пусть $\tilde{B}(p)$ — множество всех существенно бесконечномерных положительных линейных функционалов в слое $B_cT_p(S)$, а отображение l переводит каждую точку $p \in S$ в $l_p \in \tilde{B}(p)$. Тогда можно рассмотреть дифференциальное выражение

$$(\mathcal{L}u)(p) = 1/2 l_p (\nabla_. \nabla_. u)(p). \tag{5}$$

Определение. Линейный дифференциальный оператор второго порядка, определенный формулой (5) назовем существенно бесконечномерным эллиптическим.

Примеры таких операторов приведены в [2].

Так как локальное представление в карте φ гессиана $\nabla_. \nabla_. u$ имеет вид $(\nabla_. \nabla_. u)_\varphi(x) = (u_\varphi)''_x(x) - \Gamma_\varphi(x)(u_\varphi)'_x(x)$, где $u_\varphi = u \circ \varphi^{-1}$ — представление функции u в карте φ, то

$$(\mathcal{L}u)_\varphi(x) = 1/2 l^\varphi_x ((u_\varphi)''_x(x) - \Gamma_\varphi(x)(u_\varphi)'_x(x)), \tag{6}$$

где $l^\varphi_x = l_p \circ [B_cT_p\varphi]^{-1}$, $p = \varphi^{-1}(x)$, — локальное представление l_p в карте φ.

Если $Z = S \times (0, T)$, $0 < T \leqslant \infty$, то для функций $u: Z \ni q = (p, t) \to \mathbf{R}$ можно аналогично определить дифференциальное выражение по переменной p формулой $(\mathcal{L}_p u)(q) = 1/2 l_q (\tilde{\nabla}_. \tilde{\nabla}_. u)(q)$, где $\tilde{\nabla}_.$ — линейная связность «в направлении S», а отображение $l: Z \ni q \to l_q \in \tilde{B}(q)$ сопоставляет каждой точке $q = (p, t) \in Z$ существенно бесконечномерный положительный линейный функционал «по переменной p» в слое $B_{1c}T_q(Z)$.

Так определенный оператор назовем существенно бесконечномерным эллиптическим по переменной p.

Рассмотрим для $u \in C^2(Z)$ параболическое уравнение

$$\partial u/\partial t = \mathcal{L}_p u \tag{7}$$

и поставим для него задачу Коши

$$u(p, 0) = v(p). \tag{8}$$

В карте $\bar{\varphi} = \varphi \times \mathrm{Id} = \varphi_p \times \mathrm{Id}$, стереографической по первому и тождественной по второму аргументу, задача (7), (8) принимает вид (см. (6))

$$\frac{\partial u_{\bar{\varphi}}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} l^{\bar{\varphi}}_{(x,t)} [(u_{\bar{\varphi}})''_x(x, t) - \Gamma_\varphi(x)(u_{\bar{\varphi}})'_x(x, t)]; \tag{9}$$

$$u_{\bar{\varphi}}(x, 0) = v_\varphi(x). \tag{10}$$

В силу (3) наряду с $(u_{\overline{\varphi}})''_x(x, t) - \Gamma_\varphi(x)(u_{\overline{\varphi}})'_x(x, t)$ в область определения $l^{\overline{\varphi}}_{(x,t)}$ входит и $(u_{\overline{\varphi}})''_x(x, t)$, а потому уравнение (9) приводится к виду

$$\frac{\partial u_{\overline{\varphi}}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}\, l^{\overline{\varphi}}_{(x,t)}(u_{\overline{\varphi}})''_x(x, t) - \frac{1}{2}\, l^{\overline{\varphi}}_{(x,t)}(\Gamma_\varphi(x)(u_{\overline{\varphi}})'_x(x, t)),$$

или с учетом (3) —

$$\frac{\partial u_{\overline{\varphi}}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}\, l^{\overline{\varphi}}_{(x,t)}(u_{\overline{\varphi}})''_x(x, t) - \frac{(x, (u_{\overline{\varphi}})'_x)}{4R^2 + \|x\|^2}\, l^{\overline{\varphi}}_{(x,t)}(I), \tag{11}$$

где I — тождественный оператор в H.

Рассмотрим «линейный вариант» задачи Коши. Пусть отображение l сопоставляет каждой точке $(x, t) \in H \times (0, T)$ существенно бесконечномерный положительный линейный функционал $l_{x,t}$ с областью определения $\mathcal{D}_{l_{x,t}} \subset \subset B_e(H)$. Пусть $\Omega'_l(H \times (0, T))$ — класс непрерывных в $H \times [0, T)$, дважды непрерывно дифференцируемых по x, непрерывно дифференцируемых по t функций, ограниченных на каждом ограниченном подмножестве $H \times (0, T)$ и таких, для которых $u''_x(x, t) \in \mathcal{D}_{l_{x,t}}$ при каждом $(x, t) \in H \times (0, T)$.

Предложение 1. *Пусть* $\eta(x, t) = l_{x,t}(I) = a_1(\|x\|^2, t)$ *и* $c(x, t) = c_1(\|x\|^2, t)\, x$, *где* $a_1(s, t)$ *и* $c_1(s, t)$ *непрерывны на* $\mathbf{R}^2$, *а функция* $g(s, t) = a_1(s, t) + 2c_1(s, t)\, s$ *ограничена сверху на* $\mathbf{R}^2$ *константой* γ. $u \in \Omega'_l(H \times (0, T))$ — *решение задачи Коши*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}\, l_{x,t}(u''_x(x, t)) + (c(x, t), u'_x(x, t)); \tag{12}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{13}$$

Тогда для любых $t_0 \in (0, T)$ и $\varepsilon > 0$ *справедливы неравенства*

$$\inf_{x \in X_\varepsilon} \varphi(x) \leqslant u(0, t_0) \leqslant \sup_{x \in X_\varepsilon} \varphi(x),$$

где X_ε — *ε-окрестность шара* $\{x \mid \|x\|^2 \leqslant \gamma t_0\}$.

Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 из [2].

Пусть в условиях предложения 1 χ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}$ и $\varphi(x) = \chi(\|x\|^2)$. Будем искать решение задачи (12), (13) в виде $u(x, t) = v(\|x\|^2, t)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\, l_{x,t}(u''_x(x, t)) = \frac{\partial v}{\partial s}(s, t)\Big|_{s=\|x\|^2} \cdot l_{x,t}(I)$$

(см. [1, 2]) и уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s, t)\Big|_{s=\|x\|^2} = g(\|x\|^2, t)\, \frac{\partial v}{\partial s}(s, t)\Big|_{s=\|x\|^2}.$$

Таким образом, задача сводится к решению задачи Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) = g(s, t)\, \frac{\partial v}{\partial s}(s, t); \tag{14}$$

$$v(s, 0) = \chi(s), \tag{15}$$

которая решается методом классической теории характеристик.

Если при этом $s = \zeta(\tau, s_0, \tau_0)$ — решение задачи Коши $ds/d\tau = g(s, -\tau)$, $s(\tau_0) = s_0$, то ζ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и решение задачи (14), (15) примет вид $v(s, t) = \chi(\zeta(0, s, -t))$. Поэтому $u(x, t) = \chi(\zeta(0, \|x\|^2, -t))$ — решение задачи (12), (13) с начальным условием $\varphi(x) = \chi(\|x\|^2)$.

Пусть теперь $u(x, t)$ — решение задачи (12), (13), начальное условие которой удовлетворяет неравенству $\varphi(x) = u(x, 0) \geqslant C_0$ при всех $x \in Y_\delta = \{x \mid \zeta(0, 0, -t_0) - \delta \leqslant \|x\|^2 \leqslant \zeta(0, 0, -t_0) + \delta\}$, где $\delta > 0$. Тогда, рассматривая задачу Коши (12), (13) с начальным условием $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \chi(\|x\|^2)$ и с подходящим образом выбранной функцией χ и используя предложение 1, легко получаем неравенство $u(0, t_0) \geqslant C_0$. Аналогично из неравенства $u(x, 0) \leqslant C_0$ в Y'_δ следует, что $u(0, t_0) \leqslant C_0$.

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.1 из [2] (см. также теорему 3 в [1]), приводят в условиях предложения 1 к системе неравенств

$$\inf_{x \in Y_\varepsilon} u(x, 0) \leqslant u(0, t_0) \leqslant \sup_{x \in Y_\varepsilon} u(x, 0),$$

где Y_ε — ε-окрестность сферы $Y = \{x \mid \|x\|^2 = \zeta(0, 0, -t_0)\}$.

Пусть теперь $g(s, t) = k(t)(1 - K^2 s^2)$, где $k(t)$ — неотрицательная, ограниченная, дважды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}$, а $K > 0$. Тогда $g(s, t)$ удовлетворяет условиям предложения 1 и

$$\zeta(0, 0, -t) = \left(\exp\left(2K\int_0^t k(\tau)\,d\tau\right) - 1\right) \Big/ \left(K\left(1 + \exp\left(2K\int_0^t k(\tau)\,d\tau\right)\right)\right).$$

Предложение 2. *Пусть в условиях предложения 1* $g(s, t) = k(t) \times (1 - K^2 s^2)$, *где* $k(t)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная ограниченная функция на* $\mathbf{R}$, *а* $K > 0$. *Пусть* $u \in \Omega''_l(H \times (0, T))$ — *решение задачи* (12), (13). *Тогда для любых* $t_0 \in (0, T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы неравенства*

$$\inf_{x \in Y_\varepsilon} u(x, 0) \leqslant u(0, t_0) \leqslant \sup_{x \in Y_\varepsilon} u(x, 0),$$

где Y_ε — ε-*окрестность сферы*

$$Y = \{x \mid \|x\|^2 = r^2(k, K, t_0) = (e^{2K\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau} - 1)/(K(1 + e^{2K\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau}))\}.$$

Вернемся к изучению задачи (7), (8). Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{L}_p$ удовлетворял условию ω) существует дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная и ограниченная на $(0, \infty)$ функция $k(t)$ такая, что для любого $q = (p, t) \in S \times (0, \infty)$ выполняется равенство

$$l_q \circ [B_{1c} T_q \bar{\varphi}_p]^{-1}(I) = l^{\bar{\varphi}_p}_{(0,t)}(I) = k(t).$$

Если φ и ψ — две карты S в точке p, $\bar{\varphi} = \varphi \times \mathrm{Id}$, $\bar{\psi} = \psi \times \mathrm{Id}$ — соответствующие им карты Z, A лежит в области определения функционала l_q, а $A_{\bar{\varphi}}$ и $A_{\bar{\psi}}$ — его представления в картах $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, то $l^{\bar{\varphi}}_{\bar{\varphi}(q)}(A_{\bar{\varphi}}) = l_q(A) = l^{\bar{\psi}}_{\bar{\psi}(q)}(A_{\bar{\psi}})$, откуда, в силу (4) получаем

$$l^{\bar{\varphi}_p}_y(I) = l^{\bar{\varphi}_{p_1}}_{(0,t)}(F_{\varphi_p \varphi_{p_1}}(p_1) F^*_{\varphi_p \varphi_{p_1}}(p_1)),$$

где $y = (x, t) = (\varphi_p(p_1), t)$. Поэтому из (2) следует, что $l^{\bar{\varphi}_p}_y(I) = k(t) \times (4R^2 + \|x\|^2)^2/(16R^4)$ и уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial u_{\bar{\varphi}}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}\, l^{\bar{\varphi}}_y (u_{\bar{\varphi}})''_x(y) - k(t)\,\frac{4R^2 + \|x\|^2}{16R^4}(x, (u_{\bar{\varphi}})'_x(y)). \tag{16}$$

Пусть $\Omega_l(Z)$ — класс непрерывных и ограниченных на $S \times [0, T)$ функций u, дважды непрерывно дифференцируемых на Z, для которых $(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \cdot u)(q)$ лежат в области определения функционалов l_q при каждом $q \in Z$.

Элементарные вычисления показывают, что к уравнению (16) применимо предложение 1, из которого следует такая теорема.

Теорема 1. *Пусть оператор* $\mathscr{L}_p$ *удовлетворяет условию* ω). *Тогда:* а) *в классе* $\Omega_l(Z)$ *задача* (7), (8) *имеет не более одного решения;* б) *если* $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k \in \Omega_l(Z)$, — *последовательность решений задачи* (7), (8), *для которой* $\sup\limits_{p\in S}|u_n(p, 0) - u_0(p, 0)| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\sup\limits_{q\in Z}|u_n(q) - u_0(q)| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Более того, так как для уравнения (16) в обозначениях предложения 1 $g(s, t) = k(t)(1 - 1/16R^{-4}s^2)$, то применимо предложение 2 с $K = 1/4R^{-2}$.

Пусть $S_{p,\alpha}$ — подсфера S, образованная пересечением сферы S с гиперплоскостью в H коразмерности 1, ортогональной p и проходящей через точку $\alpha p \in H$. В этих обозначениях $S_{p,0}$ — большая подсфера сферы S. Пусть $u \in \Omega_l(Z)$ — решение задачи (7), (8). Тогда согласно предложению 2 для любых $t > 0$ и $p \in S$ $u(p, t)$ представляет собой среднее начального условия v по сколь угодно малой ε-окрестности (на сфере S) подсферы $S_{p,\alpha}$, где

$$\alpha = \frac{4R^2 - r^2(k, 1/4R^{-2}, t)}{4R^2 + r^2(k, 1/4R^{-2}, t)} = \exp\left(-\frac{1}{2}R^{-2}\int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\right).$$

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathscr{L}_p$ *удовлетворяет условию* ω) *и* $u \in \Omega_l(S \times (0, \infty))$ — *решение задачи Коши* (7), (8). *Тогда для любых* $p_0 \in S$, $t > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы неравенства*

$$\inf_{p\in Y_\varepsilon} u(p, 0) \leqslant u(p_0, t) \leqslant \sup_{p\in Y_\varepsilon} u(p, 0),$$

где Y_ε — ε-*окрестность* (*на* S) *подсферы* $S_{p_0,\alpha}$ *с* $\alpha = \exp\left(-1/2R^{-2} \times \int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\right)$. *Если при этом* $\int\limits_0^\infty k(\tau)\,d\tau$ *расходится, то подсферы* $S_{p_0,\alpha}$ *сходятся при* $t \to \infty$ *к большой подсфере* $S_{p_0,0}$ *сферы* S.

Пусть v — функция на S такая, что для некоторого $p \in S$

$$v_{\varphi_p}(x) = w_p(K_p x, \|x\|^2), \tag{17}$$

где w_p — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $H \oplus \mathbf{R}$, а K_p — вполне непрерывный линейный оператор из V_p в H. Пусть $p_1 \in S$. Тогда из (1) следует, что $v_{\varphi_{p_1}}(x) = v_{\varphi_p}(G_{\varphi_p\varphi_{p_1}} x)$ снова имеет вид (17). Поэтому можно говорить о классе Ψ ограниченных на S функций, имеющих в каждой стереографической карте φ_p вид (17).

Предложение 3. *Существует такое* $t_0 > 0$, *что задача Коши для уравнения* (16) *с начальным условием вида* (17) *разрешима при* $0 < t < t_0$, *решение ее лежит в классе* $\Omega'_{l\bar\varphi}(V_\varphi \times (0, t_0))$ *и при каждом* $t_1 \in (0, t_0)$ $u_{\bar\varphi}(x, t_1)$ *имеет вид* (17).

Использование стандартной процедуры («принцип Гюйгенса») вместе с теоремой 1 завершает доказательство следующего факта.

Теорема 3. *Пусть оператор* $\mathscr{L}_p$ *удовлетворяет условию* ω). *Тогда задача Коши* (7), (8) *с начальным условием* $v \in \Psi$ *корректно поставлена: в классе* $\Omega_l(S \times (0, \infty))$ *решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий (в смысле теоремы 1).*

1. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами. — Укр. мат. журн., 1977, 29, № 6, с. 781—784.
2. *Богданский Ю. В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами.— Киев, 1977.— 50 с. Рукопись деп. в Урк. НИИНТИ, 24.10. 77, № 4Б269-77 Деп.
3. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 344 с.
4. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
09.05.81