УДК 517

Ю. М. Березанский, А. А. Калюжный

Ядерные пространства функций на базисе гиперкомплексной системы

В 1950 г. С. Г. Крейн и один из авторов, развивая теорию операторов обобщенного сдвига Дельсарта—Левитана, ввели понятие гиперкомплексной системы (г. с.) с непрерывным базисом и построили гармонический анализ в ней (см. [1, 2], где имеется библиография). В последние годы к подобным вопросам возобновился интерес в связи с введением и рассмотрением близкого к г. с. объекта — гипергруппы [3—5]; близким является также понятие сверточной алгебры [6, 7]. В § 2 этой статьи мы показываем, что на базисе г. с. (и, в частности, на гипергруппе) можно построить ядерное пространство функций, подобное пространству основных функций $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ и совпадающее с проективным пределом гильбертовых пространств типа соболевских; оно связано естественным образом с «дифференцированием» в г. с. (точнее, инвариантно относительно оператора свертки в г. с.). Это делается при помощи обобщения и уточнения конструкции работы [8] ядерных пространств функций на локально-компактной группе; другая конструкция пространств основных функций на такой группе ранее была предложена в [9]. В § 1 приводятся необходимые для построения такого пространства свойства г. с. (относительно доказательств см. [1, 10]). Отметим, что построения статьи существенны для развития гармонического анализа в г. с., в частности, для изучения представлений г. с. коммутирующими операторами (см. [11], гл. 2, § 4).

Если вектор x пространства $\mathbf{C}^d$ с зафиксированным базисом Q интерпретировать как комплекснозначную функцию на базисе Q, состоящем из d точек, то обычную d-мерную г. с. можно понимать как пространство функций $Q \ni p \mapsto x(p) \in \mathbf{C}^1$ с операциями сложения функций и умножения на скаляр и с умножением $(x * y)(r) = \sum\limits_{p,q \in Q} x(p)\, y(q)\, \gamma(p, q, r)$ $(r \in Q)$, где $\gamma(p, q, r)$ — некоторая функция («кубическая матрица структурных констант»), задающая умножение и обладающая определенными свойствами, обеспечивающими ассоциативность и (если есть необходимость) коммутативность умножения. Наше обобщение такой г. с. заключается в переходе от конечного базиса Q к некоторому локально-компактному пространству Q, сейчас γ уместно в связи с имеющимися примерами заменить на «структурную меру» $\gamma(A, B, r)$ $(A, B \subseteq Q;\ r \in Q)$, а не функцию на $Q \times Q \times Q$. Наиболее полные результаты получаются в случае г. с. с неотрицательной γ, напоминающей своими свойствами групповую алгебру локально-компактной коммутативной группы G (так называемые нормальные г. с. с базисной единицей o). Отметим, что в случае г. с., совпадающей с такой групповой алгеброй, $Q = G$, $\gamma(A, B, r) = \mu(A^{-1}r \cap B)$, где μ — мера Хаара на G, o — единица группы, инволюция в Q — переход от $p \in Q$ к $p^{-1} \in Q$.

§ 1. Понятие гиперкомплексной системы и некоторые леммы. Пусть Q — полное сепарабельное локально-компактное метрическое пространство точек $p, q, r, \ldots$; $\mathcal{B}(Q)$ — σ-алгебра его борелевских множеств, $\mathcal{B}_0(Q)$ — подкольцо $\mathcal{B}(Q)$, состоящее из множеств с компактным замыканием. Мы будем рассматривать борелевские меры, т. е. неотрицательные меры на $\mathcal{B}(Q)$, конечные на компактах. Г. с. с базисом Q задается своей структурной мерой $\gamma(A, B, r)$ $(A, B \in \mathcal{B}(Q);\ r \in Q)$. Структурная мера $\gamma(A, B, r)$ является борелевской мерой по A (B) при фиксированных B, r (A, r), удовлетворяющей следующим требованиям: (H1) для каждых $A, B \in \mathcal{B}_0(Q)$ $\gamma(A, B, r)$ — непрерывная финитная функция по r; (H2) для каждых $A, B, C \in \mathcal{B}_0(Q)$ и $s \in Q$ выполняется соотношение ассоциативности

$$\int \gamma(A, B, r)\, d_r\gamma(E_r, C, s) = \int \gamma(B, C, r)\, d_r\gamma(A, E_r, s)$$

(интегрирование здесь и позже без указания области ведется по всему Q); (H3) для каждых $A, B \in \mathcal{B}_0(Q)$ и $r \in Q$ справедливо соотношение коммутативности $\gamma(A, B, r) = \gamma(B, A, r)$.

Мультипликативной мерой называется борелевская мера, положительная на открытых множествах и такая, что

$$\int \gamma(A, B, r)\, d\mu(r) = \mu(A)\,\mu(B) \qquad (A, B \in \mathcal{B}_0(Q)).$$

В дальнейшем (H4) будем предполагать существование по крайней мере одной мультипликативной меры (можно доказать [1, 10], что если для каждого $B \in \mathcal{B}_0(Q)$ γ является непрерывной ограниченной функцией по r, причем для каждого открытого $O \in \mathcal{B}_0(Q)$ $\gamma(Q, O, r) > 0$, то (H4) заведомо выполнено). Фиксируем такую меру, и интегрирование по ней будем обозначать dp; понятия типа «почти везде» и т. п. относятся к этой мере; обозначим также $\gamma(A, B, C) = \int\limits_C \gamma(A, B, r)\, dr$ $(A, B, C \in \mathcal{B}_0(Q))$. Рассмотрим пространство $L_1(Q, dp) = L_1$ и введем для $x, y \in L_1$ операцию (обобщенной) свертки

$$(x*y)(r) = \int x(p)\, d_p\Big(\int y(q)\, d_q\gamma(E_p, E_q, r)\Big). \tag{1}$$

Нетрудно устанавливается [1, 10], что интеграл (1) существует почти для всех r, входит в L_1 и справедлива оценка $\|x*y\|_1 = \|x\|_1\|y\|_1$ $(x, y \in L_1)$. Условия (H2), (H3) обеспечивают ассоциативность и коммутативность свертки (1). Таким образом, пространство L_1 превращается сейчас в коммутативную нормированную алгебру с умножением (1). Эту алгебру будем называть г. с. с базисом Q. Отметим, что $\gamma(A, B, r) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(r)$ $(A, B \in \mathcal{B}_0(Q);$ $r \in Q)$, где $\varkappa_E(p)$ — характеристическая функция множества E.

Нормальные г. с. с базисной единицей (б. е.) определяются следующим образом: (H5) г. с. называется нормальной, если существует инволютивный гомеоморфизм $Q \ni p \mapsto p^* \in Q$ такой, что $\mu(E^*) = \mu(E)$, $\gamma(A, B, C) = \gamma(C, B^*, A)$; (H6) нормальная г. с. обладает слабой б. е., если в Q существует такая точка o, что $o^* = o$ и $\gamma(A, B, o) = \mu(A^* \cap B)$ $(A, B \in \mathcal{B}_0(Q))$. Нормальность г. с. эквивалентна существованию гомеоморфизма $Q \ni p \mapsto p^* \in Q$, для которого отображение $L_1 \ni x = x(p) \mapsto \overline{x(p^*)} = x^* \in L_1$ является инволюцией в г. с. В нормальной г. с. с дискретным базисом, как легко видеть, наличие в ней слабой б. е. o означает, что o (точнее функция $\varkappa\{0\}(p)$) является единицей г. с., «расположенной в базисе». Мы несколько усилим это свойство. (H7) слабая б. е. нормальной г. с. называется б. е., если для любого $B \in \mathcal{B}_0(Q)$ и любой его окрестности $U \supset B$ существует окрестность O точки o такая, что $\operatorname{supp}\gamma(O, B, r) \subseteq U$. Отметим, что если нормальная г. с. содержит единицу, то ее базис Q состоит из не более, чем счетного числа точек с дискретной топологией.

Ниже в статье рассматриваются только г. с., удовлетворяющие аксиомам (H1)—(H7). Приведем некоторые свойства, заведомо выполняющиеся для этого класса г. с. Обозначим $L_\alpha(Q, dp) = L_\alpha$, $\|\cdot\|_{L_\alpha} = \|\cdot\|_\alpha$, $(\cdot,\cdot)_{L_2} = (\cdot, \cdot)$, $L'_\alpha = L_{\alpha'}$, где $\alpha^{-1} + \alpha'^{-1} = 1$, $(\alpha \in [1, \infty])$.

Лемма 1. *Для $f \in L_\alpha$, $g \in L_{\alpha'}$ $(\alpha \in [1, \infty])$ существует свертка $f*g$, являющаяся ограниченной функцией, причем $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_\alpha \|g\|_{\alpha'}$. Эта функция непрерывна при $\alpha \in (1, \infty)$. При $\alpha = 1$ для непрерывности свертки $f*g$ достаточно, чтобы дополнительно $g \in L_\beta$ при некотором $\beta \in [1, \infty)$*

Лемма 2. *Для $x \in L_1$, $f \in L_2$ существует почти для всех $r \in Q$ и принадлежит L_2 свертка $(x*f)(r)$, причем $\|x*f\|_2 \leqslant \|x\|_1 \|f\|_2$.*

Из леммы 2 следует, что в пространстве L_2 можно определить оператор свертки с фиксированным $x \in L_1 : L_2 \ni f \mapsto x * f = T_x f \in L_2$. Такой оператор ограничен и $\|T_x\| \leqslant \|x\|_1$. Легко видеть, что $T_{\lambda x+\mu y} = \lambda T_x + \mu T_y$, $T_{x*y} = T_x T_y$, $T_x^* = T_{x^*}$ ($x, y \in L_1$; $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$). Помимо операторов свертки T_x ($x \in L_1$) в пространстве L_2 определяется еще одно семейство операторов, тесно связанных с г. с. Это — операторы обобщенного сдвига T_p ($p \in Q$). Оператор T_p задается в L_2 билинейной формой $(T_p f, g) = (f * g^*)(p^*)$ ($f, g \in L_2$; $p \in Q$). Из леммы 1 при $\alpha = 2$ следует, что эта форма непрерывна, поэтому задание оператора корректно и $\|T_p\| \leqslant 1$. Так как $(f, T_{p^*} g) = \overline{(g * f^*)(p)} = ((g * f^*)^*(p^*) = (f * g^*)(p^*) = (T_p f, g)$, то $T_p^* = T_{p^*}$ ($p \in Q$) (в случае, когда Q — локально-компактная коммутативная группа, а г. с. L_1 — ее групповое кольцо, это определение, очевидно, дает $(T_p f)(q) = f(q - p)$ ($p, q \in Q$)). Нетрудно понять, что справедливо равенство $T_x = \int x(p) T_p dp$ ($x \in L_1$), т. е. оператор свертки является «осредненным при помощи функции x» оператором сдвига.

Пусть $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ограниченных окрестностей б. е. о, стягивающихся к этой точке. Аппроксимативной единицей г. с. называется последовательность функций из $L_1 (e_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $e_n(p) \geqslant 0$ ($p \in Q$), $\operatorname{supp} e_n \subseteq O_n$ и $\|e_n\|_1 = 1$ (в частности, можно положить $e_n(p) = \mu^{-1}(O_n) \times \varkappa_{O_n}(p)$ ($p \in Q$; $n = 1, 2, \ldots$)).

Лемма 3. *Пусть $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — некоторая аппроксимативная единица г. с. Тогда для каждых $x \in L_1$, $f \in L_2$ при $n \to \infty$ $e_n * x \to x$ слабо в L_1 и $e_n * f \to f$ сильно в L_2.*

§ 2. Ядерное пространство основных функций на базисе г. с. Введем некоторые обозначения. Пусть $\rho(p, q)$ ($p, q \in Q$) — расстояние в Q, $B(c)$ — открытый шар в Q с центром в o радиуса $c > 0$. Согласно (H1) $\gamma(\widetilde{B}(c_1), \widetilde{B}(c_2), r)$ (волна обозначает замыкание) — непрерывная финитная функция точки $r \in Q$, обозначим через $d(c_1, c_2)$ радиус минимального открытого шара с центром o, вне которого эта функция аннулируется. Из (H7) вытекает, что для любых c_2, $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(c_1, c_2) \leqslant c_2 + \varepsilon$ при $c_1 < \delta$. Далее, пространство $L_2(B(c), dp)$ мы будем понимать как подпространство L_2, продолжая всякую функцию $f \in L_2(B(c), dp)$ нулем вне $B(c)$. Обозначим через $L_{2,0}$ линейное множество финитных функций из L_2; $L_{2,0}$ снабдим естественной сходимостью: $L_{2,0} \ni \xi_n \to \xi \in L_{2,0}$ при $n \to \infty$, если $\|\xi_n - \xi\|_2 \to 0$ и ξ_n равномерно финитны.

Лемма 4. *Пусть $\xi \in L_2$, $\operatorname{supp} \xi \subseteq B(\delta)$ и, следовательно, $\xi \in L_1$. Оператор $T_\xi \upharpoonright (L_2(B(c), dp))$ переводит пространство $L_2(B(c), dp)$ в $L_2(B(d(c, \delta)), dp)$ и является оператором Гильберта — Шмидта (δ, $c > 0$ фиксированы). В частности, $L_{2,0}$ инвариантно относительно T_ξ, где $\xi \in L_{2,0}$.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{B}_0(Q)$, $A \subseteq B(\delta)$, $B \subseteq B(c)$. Тогда $(\varkappa_A * \varkappa_B)(r) = \gamma(A, B, r)$ аннулируется вне $B(d(c, \delta))$, а значит, вне этого шара аннулируется и $(a * b)(r)$, где a, b — ступенчатые функции такие, что $\operatorname{supp} a \subseteq B(\delta)$, $\operatorname{supp} b \subseteq B(c)$.

Аппроксимируя ξ, f соответственно в метриках L_1, L_2 функциями a, b и пользуясь леммой 2, заключаем, что и $\xi * f$ аннулируется почти везде вне $B(d(c, \delta))$. Характер действия $T_\xi \upharpoonright (L_2(B(c), dp))$ установлен. Докажем второе утверждение. Пусть $f \in L_2(B(c), dp)$, $g \in L_2(B(d(c, \delta)), dp)$, при помощи равенства, определяющего T_p, получаем

$$(T_\xi f, g) = (\xi * f, g) = \int (\xi * f)(r) \overline{g(r)} dr = \int (T_{r^*} \xi, f^*) \overline{g(r)} dr =$$

$$= \int \left(\int (T_{r^*} \xi)(p) f(p^*) dp \right) \overline{g(r)} dr = \int\limits_{B(d(c,\delta))} \left(\int\limits_{B(c)} (T_{r^*} \xi)(p^*) f(p) dp \right) \overline{g(r)} dr,$$

$$\int\limits_{B(d(c,\delta))} \int\limits_{B(c)} |(T_{r^*} \xi)(p^*)|^2 dp dr \leqslant \int\limits_{B(d(c,\delta))} \|T_{r^*} \xi\|_2^2 dr \leqslant \|\xi\|_2^2 \mu(B(d(c, \delta))) < \infty.$$

Зафиксируем последовательность $\Xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ функций $\xi_n \in L_2$ таких, что $\operatorname{supp} \xi_n \subseteq B(\delta_n)$ ($\delta_n \in (0, \infty)$). Функцию $f \in L_2$ будем называть бесконечно дифференцируемой (относительно Ξ), если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ $f \in \mathcal{R}(T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n})$ ($\mathcal{R}(T)$ — область значений оператора T).

В силу леммы 1 бесконечно дифференцируемая функция обязательно непрерывна и ограничена (в случае, когда г. с.— групповая алгебра группы $\mathbb{R}^N$, это определение можно перефразировать в терминах преобразования Фурье и сравнить с обычной бесконечной дифференцируемостью). Фигурирующие сейчас числа δ_n ($n = 1, 2, \ldots$) выбираются определенным образом, зависящем от характера свертки в г. с., который описывается функцией d. Именно, возьмем $\delta_1 = 2^{-1}$, а в качестве $\delta_n > 0$ при $n > 1$ — столь малое число, чтобы $d\left(\delta_n, \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$. Последовательность $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ можно считать монотонно стремящейся к нулю. Далее, будем предполагать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_1$ сходится.

Лемма 5. *Для каждого* $f \in L_2(B(c), dp)$ ($c \in (0, \infty)$) *последовательность* $(T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n} f)_{n=1}^{\infty}$ *предкомпактна и любая ее предельная точка является бесконечно дифференцируемой финитной функцией из пространства* $L_2(B(d(c, 1)), dp)$. *Более того, эта предельная точка для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *входит в* $\mathfrak{R}((T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n}) \upharpoonright L_{2,0})$.

Доказательство. Очевидно $T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n} f = T_{\xi_1 * \ldots * \xi_n} f$. Функция $\xi_1 * \ldots * \xi_n$ финитна, причем $\operatorname{supp}(\xi_1 * \ldots * \xi_n) \subseteq B(1 - 2^{-n})$. В самом деле, $\operatorname{supp} \xi_1 \subseteq B(2^{-1})$. Далее, согласно лемме 4, $\operatorname{supp}(\xi_2 * \xi_1) \subseteq B(d(\delta_2, 2^{-1})) \subseteq B(2^{-1} + 2^{-2})$, так как $d(\delta_2, 2^{-1}) = 2^{-1} + 2^{-2}$; аналогично $\operatorname{supp}(\xi_3 * \xi_2 * \xi_1) \subseteq B(d(\delta_3, 2^{-1} + 2^{-2})) \subseteq B(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3})$ и т. д. В силу леммы 2 $\xi_1 * \ldots * \xi_n \in L_2$. Применяя лемму 4, получим требуемое включение

$$\operatorname{supp}(T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n} f) = \operatorname{supp}(T_{\xi_1 * \ldots * \xi_n} f) \subseteq B(d(c, 1 - 2^{-n})) \subseteq B(d(c, 1)) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Последовательность $(T_{\xi_2} \ldots T_{\xi_n} f)_{n=2}^{\infty}$ ограничена, так как $\|T_{\xi_2} \ldots T_{\xi_n}\| \leqslant \prod_{k=2}^{n} \|\xi_k\|_1 \leqslant c$ ($n = 2, 3, \ldots$). Согласно (2) $T_{\xi_2} \ldots T_{\xi_n} f \in L_2(B(d(c, 1)), dp)$ и поэтому в силу леммы 4, примененной к сужению на это подпространство оператора T_{ξ_1}, последовательность $(T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n} f)_{n=1}^{\infty}$ предкомпактна. Пусть f' — некоторая ее предельная точка, в силу (2) и последующего предельного перехода заключаем, что $\operatorname{supp} f' \subseteq B(d(c, 1))$, т. е. $f' \in L_2(B(d(c, 1)), dp)$.

Покажем, что f' бесконечно дифференцируема, т. е. при каждом $m = 1, 2, \ldots$ существует $g'_m \in L_2$ такое, что $f' = T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_m} g'_m$. Пусть $f' = \lim_{j \to \infty} T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_{n_j}} f$. Зафиксируем j_0 настолько большим, чтобы $n_{j_0} \geqslant m$, и рассмотрим последовательность $(T_{\xi_{n_{j_0}+1}} \ldots T_{\xi_{n_j}} f)_{j=j_0}^{\infty}$. К этой последовательности и оператору $T_{\xi_{n_{j_0}}}$ можно применить то же самое рассуждение, которое выше применялось к $(T_{\xi_2} \ldots T_{\xi_n} f)_{n=2}^{\infty}$ и T_{ξ_1}. В результате мы получим, что последовательность $(T_{\xi_{n_{j_0}}} \ldots T_{\xi_{n_j}} f)_{j=j_0}^{\infty}$ предкомпактна. Пусть $g''_m = \lim_{l \to \infty} T_{\xi_{n_{j_0}}} \ldots T_{\xi_{n_{j_l}}} f$ — некоторая ее предельная точка. Но тогда $T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_{n_{j_0}-1}} g''_m = \lim_{l \to \infty} T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_{n_{j_l}}} f = f'$; $f' = T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_m} g'_m$, $g'_m = T_{\xi_{m+1}} \ldots T_{\xi_{n_{j_0}-1}} g''_m \in L_2$.

Из доказательства следует и последнее утверждение леммы.

Обозначим через $C_0^{\infty}(Q, \Xi)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых в указанном смысле функций на Q, входящих при каждом $n = 1, 2, \ldots$ в $R((T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n}) \upharpoonright L_{2,0})$ (и поэтому финитных). Ясно, что $C_0^{\infty}(Q, \Xi)$ — линейное множество. Его важным свойством является инвариантность относительно операторов $T_\xi : T_\xi(C_0^{\infty}(Q, \Xi)) \subseteq C_0^{\infty}(Q, \Xi)$, где $\xi \in L_{2,0}$. Действительно, если $f \in R((T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n}) \upharpoonright L_{2,0})$ ($n = 1, 2, \ldots$), то благодаря коммутируемости

T_ξ и T_{ξ_k} и $T_\xi f$ будет такой. Мы сейчас покажем, что при определенном выборе Ξ и топологии $C_0^\infty(Q, \Xi)$ можно превратить в нетривиальное ядерное пространство.

Лемма 6. *Для любой окрестности U точки o существует непрерывная неотрицательная функция* ξ, $\operatorname{supp} \zeta \subseteq U$, $\|\zeta\|_1 = 1$, *такая, что* $\operatorname{Ker} T_\xi = 0$.

Доказательство. Предварительно заметим, что из (H7) легко следует: для любой окрестности V точки o существует окрестность $O \subseteq V$ этой же точки такая, что $\operatorname{supp} \gamma(O, O^*, r) \subseteq V$. Пользуясь шаг за шагом этим замечанием, построим последовательность окрестностей O_n точки o таких, чтобы $\operatorname{supp} \gamma(O_n, O_n^*, r) \subseteq O_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots; O_0 \subseteq U)$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n = o$. Положим $e_n(p) = \mu^{-1}(O_n)\varkappa_{o_n}(p)$, $(e_n * e_n^*)(p) = \mu^{-2}(O_n)\gamma(O_n, O_n^*, p)$ и определим функцию ξ равенством $\xi(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(e_n * e_n^*)(p)$, где $a_n > 0$ сейчас будут подобраны. Благодаря свойствам с. меры функции $e_n * e_n^*$ непрерывны и неотрицательны, $\operatorname{supp}(e_n * e_n^*) \subseteq O_{n-1} \subseteq U$, $\|e_n * e_n^*\|_\infty \leqslant \mu^{-1}(O_n)$, $\|e_n * e_n^*\|_1 = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Подберем $a_n > 0$ так, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mu^{-1}(O_n) < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Теперь ряд, определяющий ξ, равномерно сходится. Функция ξ непрерывна и неотрицательна, $\operatorname{supp} \xi \subseteq U$, $\|\xi\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \|e_n * e_n^*\|_1 = 1$. Покажем, что $\operatorname{Ker} T_\xi = 0$. Пусть $f \in L_2$ такова, что $T_\xi f = \xi * f = 0$. Из вида ξ и равенства $(e_n * e_n^* * f, f) = (e_n^* * f, e_n^* * f)$ следует, что $e_n^* * f = 0$, поэтому $e_n * f^* = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Согласно лемме 3 $f^* = 0$, а значит, и $f = 0$.

Завершим выбор последовательности $\Xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, определяющей понятие бесконечной дифференцируемости: в качестве ξ_n возьмем функцию ξ из леммы 6, связанную с окрестностью $U = B(\delta_n)$. Итак, в $\Xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ каждая функция ξ_n непрерывна, неотрицательна, $\operatorname{supp} \xi_n \subseteq B(\delta_n)$, $\|\xi_n\|_1 = 1$ и $\operatorname{Ker} T_{\xi_n} = 0$, числа δ_n были выбраны ранее. Ниже в качестве Ξ будет рассматриваться только так построенная последовательность.

Лемма 7. *Пространство $C_0^\infty(Q, \Xi)$ плотно в L_2.*

Доказательство. Достаточно доказать, что в $C_0^\infty(Q, \Xi)$ содержится хотя бы одна функция φ такая, что $\operatorname{Ker} T_\varphi = 0$. В самом деле, если $\xi \in L_{2,0}$, то в силу инвариантности $C_0^\infty(Q, \Xi)$ относительно T_ξ заключаем, что $T_\xi \varphi \in C_0^\infty(Q, \Xi)$. Но $T_\xi \varphi = \xi * \varphi = \varphi * \xi = T_\varphi \xi$, поэтому $C_0^\infty(Q, \Xi) \supseteq T_\varphi(L_{2,0})$. Для доказательства плотности достаточно убедиться, что $T_\varphi(L_{2,0})$ плотно в L_2. Пусть $f \in L_2$ такова, что $0 = (T_\varphi \xi, f) = (\xi, T_\varphi^* f)$ $(\xi \in L_{2,0})$. Отсюда $0 = T_\varphi^* f = T_{\varphi^*} f = \varphi^* * f$, и поэтому $\varphi * f^* = 0$. Но $\operatorname{Ker} T_\varphi = 0$, следовательно, $f^* = 0$, а значит, $f = 0$.

Для построения функции φ поступим следующим образом. Видоизменим доказательство леммы 5, заменяя в нем f на $e_{n+1}(p) = \mu^{-1}(B(\delta_{n+1}))\varkappa_{B(\delta_{n+1})}(p)$, так что рассматриваются предельные точки в L_2 последовательности $(T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_n} e_{n+1})_{n=1}^{\infty}$. Ее предкомпактность доказывается так же, как и в лемме 5. Отметим лишь, что (2) приобретает вид

$$\operatorname{supp}(T_{\xi_2} \ldots T_{\xi_n} e_{n+1}) \subseteq B\left(d\left(\delta_{n+1}, \sum_{k=2}^{n} 2^{-k}\right)\right) \subseteq B(d(\delta_3, 2^{-1})) \quad (n = 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

Пусть φ — одна из предельных точек рассматриваемой последовательности; $\varphi = \lim\limits_{j \to \infty} T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_{n_j}} e_{n_j+1}$. Разумеется, φ финитна. Ее бесконечная дифференцируемость проверяется так же, как и в лемме 5. Мы напишем лишь выражение для функции $\psi_m' \in L_2$ такой, что $\varphi = T_{\xi_1} \ldots T_{\xi_m} \psi_m'$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Аналогично доказательству леммы 5 получаем $\psi'_m = T_{\xi_{m+1}} \dots T_{\xi_{n_j-1}} \psi''_m$, где $n_j \geqslant m$, а ψ''_m — одна из предельных точек последовательности $(T_{\xi_{n_{j_0}}} \dots \dots T_{\xi_{n_j}} e_{n_j+1})_{j=j_0}^{\infty}$. Таким образом $\psi'_m = \lim_{l\to\infty} T_{\xi_{m+1}} \dots T_{\xi_{n_{j_l}}} e_{n_{j_l}+1}$, где подпоследовательность зависит от $m = 1, 2, \dots$. Ясно, что ψ'_m будет финитной (это вытекает из финитности ψ''_m, доказываемой, как и в случае φ). Таким образом, $\varphi \in C_0^\infty(Q, \Xi)$. Кроме того, ψ'_m неотрицательна. Докажем, что $\operatorname{Ker} T_\varphi = 0$. Пусть $g \in L_2$ такая, что $0 = T_\varphi g = \varphi * g = T_{\xi_1} \dots T_{\xi_m} (\psi'_m * g)$. Из соотношения $\operatorname{Ker}(T_{\xi_1} \dots T_{\xi_m}) = 0$ заключаем, что $\psi'_m * g = 0$ $(m = 1, 2, \dots)$. Достаточно доказать, что $(\psi'_m)_{m=1}^\infty$ — аппроксимативная единица (см. лемму 3). Из (3) вытекает включение $\operatorname{supp}(T_{\xi_{m+1}} \dots T_{\xi_{n_{j_l}}} e_{n_{j_l}+1}) \subseteq B(d(\delta_{m+1}, 2^{-m+1}))$, а значит, $\operatorname{supp} \psi'_m \subseteq B(d(\delta_{m+1}, 2^{-m+1}))$. В силу отмеченного в начале доказательства леммы 6 факта справедливо соотношение $\lim_{(c_1, c_2)\to 0} d(c_1, c_2) = 0$, поэтому $\operatorname{supp} \psi'_m \subseteq B(r_m)$, где $r_m \to 0$ при $m \to \infty$. Далее, ψ'_m неотрицательна. Благодаря определению мультипликативной меры

$$\int (T_{\xi_{m+1}} \dots T_{\xi_{n_{j_l}}} e_{n_{j_l}+1})(p)_{dp} = \int (\xi_{m+1} * \dots * \xi_{n_{j_l}} * e_{n_{j_l}+1})(p)\, dp =$$

$$= \prod_{k=m+1}^{n_{j_l}} \int \xi_k(p)\, dp \int e_{n_{j_l}+1}(p)\, dp = 1,$$

поэтому $\int \psi'_m(p)\, dp = 1$.

Введем аналог соболевского пространства с весом. Если $\operatorname{Ker} T_\xi = \operatorname{Ker} T_\eta = 0$, то и $\operatorname{Ker}(T_\xi T_\eta) = \operatorname{Ker} T_{\xi*\eta} = 0$ $(\eta, \xi \in L_1)$. Поэтому имеет смысл оператор «производной» $D_k = (T_{\xi_1} \dots T_{\xi_k})^{-1} = T^{-1}_{\xi_1 * \dots * \xi_k} = T^{-1}_{\xi_1} \dots T^{-1}_{\xi_k}$, определенный на $\mathscr{D}(D_k) = \mathscr{R}(T_{\xi_1} \dots T_{\xi_k})$ и, в частности, на $C_0^\infty(Q, \Xi)$. Положим $D_0 = 1$. Так как $f \in C_0^\infty(Q, \Xi)$ входит в $\mathscr{R}((T_{\xi_1} \dots T_{\xi_n}) \upharpoonright L_{2,0})$ при каждом $n = 1, 2, \dots$, то $D_k f$ $(k = 0, 1, \dots)$ финитна.

Пусть $Q \ni p \mapsto \tau_2(p) \in [1, \infty)$ — некоторый вес, являющийся непрерывной функцией, $\tau = (\tau_1, \tau_2(p))$ $(\tau_1 = 0, 1, \dots)$. Построим гильбертово «соболевское» пространство $H_\tau = W_2^{\tau_1}(Q, \Xi, \tau_2(p)\, dp)$ как пополнение $C_0^\infty(Q, \Xi)$ относительно скалярного произведения

$$(f, g)_\tau = \sum_{k=0}^{\tau_1} \int (D_k f)(p) \overline{(D_k g)(p)}\, \tau_2(p)\, dp \quad (f, g \in C_0^\infty(Q, \Xi)).$$

Построим проективный предел пространств H_τ (соответствующие определения см. в гл. I работы [11]).

Пусть T — множество всех введенных сейчас индексов τ; для $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$ будем писать $\tau'' \geqslant \tau'$, если $\tau''_1 \geqslant \tau'_1$ и $\tau''_2(p) \geqslant \tau'_2(p)$ $(p \in Q)$. Нетрудно видеть, что при $\tau'' \geqslant \tau'$ пространство $H_{\tau''} \subseteq H_{\tau'}$, причем вложение непрерывное и $H_{\tau''}$ плотно в $H_{\tau'}$ (т. е. $H_{\tau''} \subseteq H_{\tau'}$ топологически; в проверке нуждается лишь согласованность норм в $H_{\tau''}$ и $H_{\tau'}$). Обозначим $(0, 1) = 0 \in \mathrm{T}$, в силу леммы 7 $H_0 = L_2$. Ясно, что топологически $H_0 \supseteq H_\tau$ $(\tau \in \mathrm{T})$. Семейство пространств $(H_\tau)_{\tau\in\mathrm{T}}$ удовлетворяет следующему условию направленности: для $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$ существует $\tau''' \in \mathrm{T}$ такое, что топологически $H_{\tau'''} \subseteq H_{\tau'}$, $H_{\tau'''} \subseteq H_{\tau''}$ (достаточно положить $\tau_1 = \max(\tau'_1, \tau''_1)$, $\tau'''_2(p) = \max(\tau'_2(p), \tau''_2(p))$ $(p \in Q)$. Поэтому возможно определить проективный предел $\mathscr{D}(Q, \Xi) = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in\mathrm{T}} H_\tau$. Как множество $\mathscr{D}(Q, \Xi) = \bigcap_{\tau\in\mathrm{T}} H_\tau$ базис окрестностей в $\mathscr{D}(Q, \Xi)$ состоит из множеств вида

$$U(\varphi; \tau, \varepsilon) = \{\psi \in \mathscr{D}(Q, \Xi) \mid \|\psi - \varphi\|_\tau < \varepsilon\} \quad (\varphi \in \mathscr{D}(Q, \Xi),\ \tau \in \mathrm{T},\ \varepsilon \in (0, \infty)).$$

Теорема. *Пусть L_1 — нормальная г. с. с базисом Q и базисной единицей (т. е. выполнены аксиомы (H1) — (H7)). Тогда проективный* *предел* $\mathscr{D}(Q, \Xi) = \operatorname{prlim}_{\tau\in T} H_\tau$ *«соболевских» пространств* H_τ *является ядерным пространством, совпадающим как множество с совокупностью* $C_0^\infty(Q, \Xi)$ *всех бесконечно дифференцируемых финитных вместе со всеми своими «производными» функций на* Q. *Пространство* $\mathscr{D}(Q, \Xi)$ *инвариантно относительно действия операторов* T_ξ $(\xi\in L_{2,0})$; *при каждом фиксированном* $\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ *вектор-функция* $L_{2,0}\ni\xi\mapsto T_\xi\varphi = \xi*\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ *непрерывна.*

Доказательство. Функция $f\in H_\tau$ входит в $\mathscr{R}(T_{\xi_1}\dots T_{\xi_{\tau_1}}) = \mathscr{D}(D_{\tau_1})$: пусть при $n\to\infty$ $C_0^\infty(Q, \Xi)\ni f_n\to f$ в H_τ, из вида $(\cdot, \cdot)_\tau$ следует, что в L_2 $f_n\to f$ и $D_{\tau_1}f_n\to h\in L_2$; осталось воспользоваться замкнутостью D_{τ_1}. Поэтому $\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi) = \bigcap_{\tau\in T} H_\tau$ входит в $\mathscr{R}(T_{\xi_1}\dots T_{\xi_n})$ при каждом $n = 1, 2, \dots$, т. е. будет бесконечно дифференцируемой.

Покажем, что $\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ финитна. Предполагая противное, построим последовательность точек $(p_n)_{n=1}^\infty$, $p_n\in Q : \rho(p_n, o)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ $\varphi(p_n)\neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. Для каждого n найдется такая окрестность U_n точки p_n, что $|\varphi(p)|\geqslant\varepsilon_n > 0$ $(p\in U_n)$, причем окрестности U_n не пересекаются $(n = 1, 2, \dots)$. Построим непрерывную функцию $\tau_2(p)\geqslant 1$ такую, чтобы $\tau_2(p)\geqslant\varepsilon_n^{-1}\mu^{-1}(U_n)$ $(p\in U_n)$. Тогда $\int|\varphi(p)|^2\tau_2(p)\,dp = \infty$, что противоречит включению $\varphi\in H_{(0,\tau_2(p))}$.

«Производная» $D_1\varphi$ также финитна: так как $\varphi\in\mathscr{R}(T_{\xi_1}T_{\xi_2})$, то справедливо представление $\varphi = T_{\xi_1}T_{\xi_2}\psi = \xi_1*\xi_2*\psi$, где $\psi\in L_2$, поэтому $D_1\varphi = \xi_2*\psi$ непрерывна в силу леммы 1. Предполагая, что $D_1\varphi$ не финитна, как и ранее, прийдем к противоречию с включением $\varphi\in H_{(1,\tau_2(p))}$. Аналогично из включений $\varphi\in\mathscr{R}(T_{\xi_1}T_{\xi_2}T_{\xi_3})$, $\varphi\in H_{(2,\tau_2(p))}$ доказывается финитность $D_2\varphi$ и т. д. Таким образом, для $\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ функции φ, $D_1\varphi$, $D_2\varphi$, ... финитны. Иными словами, $\varphi\in L_{2,0}$, $\varphi\in\mathscr{R}((T_{\xi_1}\dots T_{\xi_n})\upharpoonright L_{2,0})$. Итак, $\mathscr{D}(Q, \Xi)\subseteq C_0^\infty(Q, \Xi)$, а значит, и $\mathscr{D}(Q, \Xi) = C_0^\infty(Q, \Xi)$.

Установим последнее утверждение теоремы. Инвариантность $\mathscr{D}(Q, \Xi) = C_0^\infty(Q, \Xi)$ относительно T_ξ $(\xi\in L_{2,0})$ уже отмечалась. Покажем, что вектор-функция $L_{2,0}\ni\xi\mapsto T_\xi\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ при каждом фиксированном $\varphi\in\mathscr{D}(Q, \Xi)$ непрерывна. Так как она линейна по ξ, то достаточно рассмотреть точку $\xi = 0$ и установить для каждых $\tau\in T$ и $\delta\in(0, \infty)$ неравенство $\|T_\xi\varphi\|_\tau\leqslant k_\delta\|\xi\|_2$ $(k_\delta > 0, \xi\in L_2(B(\delta), dp)$. Положим $\varphi_k = D_k\varphi$ и выберем $c > 0$ столь большим, чтобы $\operatorname{supp}\varphi_k\subseteq B(c)$ $(k = 1, \dots, \tau_1)$. Используя коммутируемость T_ξ и D_k, как и при доказательстве леммы 4, получим, что $(D_kT_\xi\varphi)(r) = (\xi*\varphi_k)(r)$ аннулируется вне $B(d(c, \delta))$. И поэтому

$$\|T_\xi\varphi\|_\tau^2 = \sum_{k=1}^{\tau_1}\int_{B(d(c,\delta))}\left|\int_{B(c)}(T_{r^*}\xi)(p^*)\,\varphi_k(p)\,dp\right|^2\tau_2(r)\,dr\leqslant$$

$$\leqslant k\int_{B(d(c,\delta))}\int_{B(c)}|(T_{r^*}\xi)(p^*)|^2\,dp\,\tau_2(r)\,dr\leqslant k\int_{B(d(c,\delta))}\|T_{r^*}\xi\|_2^2\tau_2(r)\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\|\xi\|_2^2\,k\int_{B(d(c,\delta))}\tau_2(r)\,dr = k_\delta^2\|\xi\|_2^2\quad(\xi\in L_2(B(\delta), dp)).$$

Доказательство ядерности основывается на следующей лемме.

Лемма 8. *Пусть* $\beta(p)\geqslant\alpha(p)\geqslant 1$ $(p\in Q)$ — *два непрерывных веса,* $\xi\in L_{2,0}$ — *одна из функций введенной последовательности* $\Xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty$. *Обозначим через* L, W *гильбертовы пространства, являющиеся пополнением* $C_0^\infty(Q, \Xi)$ *относительно соответствующих скалярных произведений*

$$(f, g)_L = \int f(p)\,\overline{g(p)}\,\alpha(p)\,dp,$$

$$(f, g)_W = \int f(p)\,\overline{g(p)}\,\beta(p)\,dp + \int(T_\xi^{-1}f)(p)\,\overline{(T_\xi^{-1}g)(p)}\,\beta(p)\,dp.$$

Утверждается, что можно так подобрать β, чтобы вложение $W \subseteq L$ оказалось квазиядерным.

Доказательство. Легко видеть, что топологически $W \subseteq L \subseteq L_2(Q, \alpha(p)\,dp)$. Отображение $C_0^\infty(Q, \Xi) \ni f \mapsto \beta^{1/2} f = \varphi$ после замыкания переводит L в пополнение H_0 совокупности Φ этих функций φ относительно скалярного произведения в $L_2(Q, \delta(p)\,dp)$, где $\delta = \alpha\beta^{-1}$ $(H_0 \subseteq L_2(Q, \delta(p)\,dp)$, а W — в их пополнение H_+ относительно

$$(\varphi, \psi)_{H_+} = \int \varphi(p)\,\psi(p)\,dp + \int (\beta^{1/2} T_\xi^{-1} \beta^{-1/2} \varphi)(p)\,\overline{(\beta^{1/2} T_\xi^{-1} \beta^{-1/2} \psi)(p)}\,dp. \quad (4)$$

Достаточно установить квазиядерность вложения $H_+ \subseteq H_0$.

Примем H_0, H_+ в качестве нулевого и позитивного пространства и построим цепочку $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Подсчитаем соответствующий этой цепочке оператор $I: H_0 \to H_+$. Для этого обозначим через $G \subseteq L_2$ пополнение Φ относительно скалярного произведения в L_2. Так как T_ξ^{-1} переводит $C_0^\infty \times (Q, \Xi)$ в себя, то оператор $\Phi \ni \varphi \mapsto \beta^{1/2} T_\xi^{-1} \beta^{-1/2} \varphi$ сохраняет Φ и поэтому может рассматриваться как плотно определенный оператор в G, для которого обратный существует и ограничен; пусть S — его замыкание. Из (4) следует, что $H_+ = D(S) \subseteq G$ и скалярное произведение в H_+ совпадает со скалярным произведением графика S. Для I имеем $(\varphi, \psi)_{H_0} = (\delta\varphi, \psi)_G = (I\varphi, \psi)_{H_+} = (I\varphi, \psi)_G + (SI\varphi, S\psi)_G$ $(\varphi \in H_0, \psi \in H_+)$. Так как $\delta\varphi \in G$, то из этого равенства замечаем, что $SI\varphi \in \mathscr{D}(S^*)$, $\delta\varphi = (1 + S^*S)\,I\varphi\,(\varphi \in H_0)$. Обозначим через R ограниченный обратный S^{-1}, получаем $RR^*\delta\varphi = (RR^* + 1)\,I\varphi$, т. е. $I\varphi = (1 + RR^*)^{-1} RR^*\delta\varphi$. Пусть $O: H_+ \to H_0$ — оператор вложения, он сопряжен к оператору I. Поэтому квазиядерность вложения $H_+ \subseteq H_0$ эквивалентна квизиядерности оператора $I: H_0 \to H_+$. Положим $(1 + RR^*)^{-1} = A: G \to G$, $B = RR^*\delta: H_0 \to G$, $\mathfrak{R}(B) = H_+$, $I = AB$. Нетрудно видеть, что квазиядерность I следует из ядерности оператора $OB: H_0 \to H_0$. В самом деле, если $\psi \in H_+$, то $A^{-1}\psi = (1 + RR^*)\,\psi \in H_+$ и $(A^{-1}\psi, \psi)_{H_+} = ((1 + RR^*)\,\psi, \psi)_G + (S(1 + RR^*)\,\psi, S\psi)_G = 2\,\|\psi\|_G^2 + \|S\psi\|_G^2 + \|R^*\psi\|_G^2 \geqslant \|\psi\|_{H_+}^2$. Поэтому для $\varphi \in H_0$ $(OB\varphi, \varphi)_{H_0} = (A^{-1} I\varphi, I\varphi)_{H_+} \geqslant \|I\varphi\|_{H_+}^2$, откуда и вытекает требуемое.

Осталось убедиться, что неотрицательный оператор OB при соответствующем выборе β будет ядерным. Оператор R — продолжение по непрерывности в G обратного оператора к $S \upharpoonright \Phi$, т. е. отображения $\Phi \ni \varphi \mapsto \beta^{1/2} T_\xi \beta^{-1/2} \in \Phi$. Оператор R^* — продолжение по непрерывности в G отображения $\Phi \ni \varphi \mapsto \beta^{-1/2} T_{\xi^*} \beta^{1/2} \in \Phi$, а OB — продолжение по непрерывности в H_0 отображения $\Phi \ni \varphi \mapsto \beta^{1/2} T_\xi \beta^{-1} T_{\xi^*} \beta^{1/2} \delta\varphi \in \Phi$. Пусть $(\varepsilon_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H_0, где $\varepsilon_j = \beta^{1/2} e_j \in \Phi$, тогда $e_j \in C_0^\infty(Q, \Xi)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L \subseteq L_2(Q, \alpha(p)\,dp)$. Отсюда и того обстоятельства, что операторы T_ξ и $T_{\xi^*} = T_\xi^*$ порождаются в пространстве L_2 ядрами $K(p, q) = (T_{p^*}\xi)(q^*)$ и $K^*(p, q) = \overline{K(q, p)}$ $(q, p \in Q)$ получаем

$$\text{Сл. }(OB) = \sum_{j=1}^\infty (OB\varepsilon_j, \varepsilon_j)_{H_0} = \sum_{j=1}^\infty \int \left| \int K(p, s)\, e_j(p)\, \alpha(p)\, dp \right|^2 \beta^{-1}(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int \left(\int |K(p, s)|^2 \alpha(p)\, dp \right) \beta^{-1}(s)\, ds. \quad (5)$$

Из определения T_p, (H1), и леммы 1 следует, что при $f, g \in L_{2,0}$ функция $Q \ni p \mapsto (T_p f, g)$ финитна и непрерывна, поэтому ядро $K(p, s)$ при s, меняющемуся по шару, равномерно по p финитно кроме того, $\int |K(p, s)|^2\, ds = \|T_{p^*}\xi\|_2^2 \leqslant \|\xi\|_2^2$. Но тогда для каждого $c > 0$ функция точки $p \in Q$

$\int\limits_{B(c)} |K(p, s)|^2\, ds$ ограничена и финитна и, следовательно, функция точки $s \in Q$ $\int |K(p, s)|^2 \alpha(p)\, dp$ локально суммируема. Отсюда и из (5) вытекает возможность выбора β. ■

Для окончания доказательства теоремы нужно убедиться, что для каждого $\tau = (\tau_1, \tau_2(p)) \in \mathrm{T}$ существует такое $\tau' = (\tau_1', \tau_2'(p)) \in \mathrm{T}$, $\tau' \geqslant \tau$, для которого вложение $H_{\tau'} \subseteq H_\tau$ квазиядерно. Положим $\tau_1' = \tau_1 + 1$, а в качестве $\tau_2'(p)$ возьмем $\max(\beta_0(p), \ldots, \beta_{\tau_1}(p))$ $(p \in Q)$, где β_k — вес β из леммы 8, построенный по $\alpha = \tau_2$ и $\xi = \xi_{k+1}$. Зафиксируем $k = 0, \ldots, \tau_1$. Согласно этой лемме $W \subseteq L$ квазиядерно, где L построено по $\alpha = \tau_2$, а W — по $\beta = \tau_2$ и $\xi = \xi_{k+1}$. Применим затем замечание 2 к лемме 3.1 из гл. I работы [11], полагая в ней $E = C_0^\infty(Q, \Xi)$, $T = D_k$, $H_1 = W_k$, $G = H$. В результате можно утверждать квазиядерность вложения $H_2 \subseteq G_2$ где H_2 и G_2 — гильбертовы пространства, полученные пополнением $C_0^\infty(Q, \Xi)$ относительно скалярных произведений

$$(f, g)_{H_2} = \int (D_k f)(p)\,\overline{(D_k g)(p)}\,\tau_2'(p)\,dp + \int (D_{k+1} f)(p)\,\overline{(D_{k+1} g)(p)}\,\tau_2'(p)\,dp =$$

$$= (f, g)_{H_{2,k}}, (f, g)_{G_2} = \int (D_k f)(p)\,\overline{(D_k g)(p)}\,\tau_2(p)\,dp = (f, g)_{G_{2,k}} \quad (f, g \in C_0^\infty(Q, \Xi)) \tag{6}$$

(заметим, что $D_k T_{\xi_{k+1}}^{-1} = D_{k+1}$). Применим теперь лемму 3.2 гл. I из работы [11], полагая в ней $E = C_0^\infty(Q, \Xi)$, $(\cdot, \cdot)_{H_k}$, $(\cdot, \cdot)_{G_k}$ — скалярные произведения (6) соответственно ($k = 0, \ldots, \tau_1$). При помощи этой леммы заключаем, что $H \subseteq G$ квазиядерно, где H, G — пополнения $C_0^\infty(Q, \Xi)$ относительно скалярных произведений, получающихся суммированием по $k = 0, \ldots, \tau_1$ соответствующих выражений из (6). Ясно, что первое из этих произведений эквивалентно $(f, g)_{\tau'}$, а второе равно $(f, g)_\tau$, поэтому квазиядерность вложения $H \subseteq G$ эквивалентна квазиядерности вложения $H_{\tau'} \subseteq H_\tau$. ■

Отметим, что аналогично можно построить и ядерные счетно-гильбертовы пространства функций на базисе г. с.

1. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом. Успехи мат. наук, 1957, 12, № 1, с. 147—152.
2. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига.— М.: Наука, 1973.— 312 с.
3. *Dunkl C. F.* The measure algebra of a locally compact hypergroup.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 179, p. 331—348.
4. *Jewett R. I.* Spaces with an abstract convolution of measures.— Adv. in Math., 1975, 18, N 1, p. 1—101.
5. *Spector R.* Apercu de la theorie des hypergroupes.— Lect. Notes. Math., 1975, 497, p. 643—673.
6. *Ionescu Tulcea C., Simon A. B.* Spectral representations and unbounded convolution operators.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1959, 45, N 12, p. 1765—1767.
7. *Maltese G.* Spectral representations for solutions of certain abstract functional equations.— Comprositio Math., 1962, 15, p. 1—22.
8. *Pytlik T.* Nuclear spaces on a locally compact group. - Studia Math., 1975, 50, N 3. p. 225—243.
9. *Кац Г. И.* Обобщенные функции на локально компактной группе и разложения унитарных представлений.— Труды Моск. мат. о-ва, 1961, 10, с. 3—41.
10. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом.— Киев: Ин-т математики, 1982.— 58 с.
11. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев: Наук. думка, 1978.— 360 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
05.05.82