АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР • ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

**Том 35, № 1**
**1983**

Научный журнал
основан в 1949 г.
Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 517,9

*Я. С. Барис, О. Б. Лыкова*

## К вопросу о существовании интегральных многообразий

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x, y), \quad dy/dt = A(t)\, y + h(t, x, y), \tag{1}$$

правые части которой определены и непрерывны на множестве

$$I \times E^m \times V, \tag{2}$$

где $I$ — некоторый интервал изменения $t$; $V$ — ограниченная область $n$-мерного евклидового пространства $E^n$, содержащая замкнутый шар $V_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в нуле.

В работах [1—4] исследовались интегральные многообразия систем вида (1) в предположении, что вектор-функции $f(t, x, y)$ и $h(t, x, y)$ удовлетворяют условию Липшица по $x$ и $y$, а уравнение

$$dy/dt = A(t)\, y \tag{3}$$

является экспоненциально-дихотомичным (в частности, может иметь место экспоненциальное убывание или возрастание решений при $t \to \infty$). Представляет интерес исследование интегральных многообразий системы (1) при более общих предположениях.

I. Введем в рассмотрение пространство $C_\rho$ непрерывных на $I \times E^m$ со значениями в $V_\rho$ вектор-функций $\varphi(t, x)$ с топологией почти равномерной сходимости [5]. Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *система уравнений (1) удовлетворяет на множестве (2) условиям единственности решений;*

2) *для каждой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho$ и точки $(t_0, x_0) \in I \times E^m$ задача Коши*

$$dx/dt = f(t, x, \varphi(t, x)), \quad x|_{t=t_0} = x_0 \tag{4}$$

*имеет на $I$ единственное решение $x(t) = \Psi(t, t_0, x_0/\varphi)$;*

3) *существует такая функция Грина $G(t, s)$ уравнения (3), что имеет место оценка*

$$\int_I \| G(t, s) \| \sup_x \| h(s, x, \varphi(s, x)) \| \, ds \leqslant \rho,$$

*причем, интеграл в левой части сходится почти равномерно относительно $t$.*

*Тогда система уравнений (1) имеет интегральное многообразие*

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y), \quad y = \varphi(t, x), \quad t \in I, \quad x \in E^m\}, \tag{5}$$

*где вектор-функция* $\varphi(t, x)$ *принадлежит пространству* $C_\rho$.

Вспомогательные утверждения. Наряду с решением $x(t) = \Psi(t, t_0, x_0 \mid \varphi)$ задачи Коши (4) будем рассматривать решение $\bar{x}(t) = \bar{\Psi}(t, t_0, x_0 \mid \bar{\varphi})$ задачи Коши, полученной из (4) заменой $\varphi(t, x)$ на $\bar{\varphi}(t, x)$,

$$dx/dt = f(t, x, \bar{\varphi}(t, x)), \quad x|_{t=t_0} = x_0. \tag{6}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 1. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого фиксированного компактного интервала* $T \subset I$ *существует такое* $\delta > 0$, *что если для* $\varphi, \bar{\varphi} \in C_\rho$ *выполняется неравенство*

$$\| \bar{\varphi}(t, x) - \varphi(t, x) \| \leqslant \delta, \tag{7}$$

то

$$\| \Psi(t, t_0, x_0 \mid \bar{\varphi}) - \Psi(t, t_0, x_0 \mid \varphi) \| \leqslant \varepsilon \tag{8}$$

*для всех* $t \in T$.

Доказательство. Рассмотрим две задачи Коши

$$dx/dt = F_1(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \tag{9}$$

$$dx/dt = F_2(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

где $F_1$, $F_2$ — непрерывные на некотором компакте $T \times D$ вектор-функции (компактный интервал $T \subset I$, а компактная область $D \subset E^m$).

Пусть решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ задач Коши (9) и (10) соответственно существуют на $T$ и единственны. Тогда из теоремы 2.4 [6, с. 15] вытекает следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что если

$$\| F_1(t, x) - F_2(t, x) \| \leqslant \eta, \tag{11}$$

то

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant \varepsilon, \quad t \in T. \tag{12}$$

Полагая $F_1(t, x) = f(t, x, \varphi(t, x))$, $F_2(t, x) = f(t, x, \bar{\varphi}(t, x))$, вместо задач Коши (9) и (10) получим задачи Коши (4) и (6). Из условия 2) теоремы 1 следует, что решение каждой из этих задач существует на любом компактном интервале $T \subset I$. Обозначим через $D$ некоторую компактную область пространства $E^m$ такую, что объединение образов этих решений содержится в $D$. Очевидно, что вектор-функции, стоящие в правой части задач Коши (4) и (6), являются непрерывными на $T \times D$. Согласно условию 2) теоремы 1 решения этих задач Коши единственны на компактном интервале $T$. Следовательно, к решениям задач Коши (4) и (6) можно применить указанное выше утверждение. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что если выполняется неравенство

$$\| f(t, x, \bar{\varphi}(t, x)) - f(t, x, \varphi(t, x)) \| \leqslant \eta, \tag{13}$$

то будет выполняться и неравенство (8).

Далее, так как вектор-функция $f(t, x, y)$ является равномерно-непрерывной на $T \times D \times V_\rho$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства (7) следует неравенство (13). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенства (7) будет вытекать неравенство (8). Лемма 1 доказана.

Возвратимся к системе уравнений (1). Предположим, что относительно этой системы выполняются условия 1)—3) теоремы 1. Для некоторой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho$ возьмем решение $x(t)$ задачи Коши (4) и рассмотрим линейное уравнение

$$dy/dt = A(t)\, y + h(t, x(t), \varphi(t, x(t))).$$

В силу условия 3) теоремы 1 это уравнение имеет на $I$ ограниченное решение

$$y(t)=\int_I G(t, s)\, h(s, x(s), \varphi(s, x(s)))\, ds.$$

Заменим в нем $x(s)$ на $\Psi=\Psi(s, t, x \mid \varphi)$, а $y(t)$ на $\varphi(t, x)$. В результате получим уравнение

$$\varphi(t, x)=\int_I G(t, s)\, h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds. \tag{14}$$

Определим теперь в пространстве $C_\rho$ оператор $S_I$ с помощью правой части уравнения (14)

$$S_I\, \varphi(t, x)=\int_I G(t, s)\, h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds. \tag{15}$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия 1)—3) теоремы 1. Тогда оператор $S_I$ отображает пространство $C_\rho$ в себя и является непрерывным.*

Доказательство. Согласно условию 3) теоремы 1 имеет место оценка $\| S_I\varphi(t, x)\| \leqslant \rho$. Учитывая непрерывность вектор-функции $S_I\varphi(t, x)$, приходим к выводу, что оператор $S_I$ отображает пространство $C_\rho$ в себя.

Установим непрерывность оператора $S_I$ в $C_\rho$. Возьмем произвольный компактный интервал $T_0 \subset I$ и запишем соотношение

$$S_I\, \overline{\varphi}-S_I\varphi=[S_{I\setminus T_0}\, \overline{\varphi}-S_{I\setminus T_0}\, \varphi]+[S_T\, \overline{\varphi}-S_{T_0}\varphi]. \tag{16}$$

Согласно условию 3) теоремы 1 для любого $\varepsilon>0$ существует такой достаточно большой компактный интервал $T_0 \subset I$, что

$$\| S_{I\setminus T_0}\, \overline{\varphi}-S_{I\setminus T_0}\, \varphi\| \leqslant 2 \int\limits_{I\setminus T_0} \| G(t, s)\| \sup_x \| h(s, x, \varphi(s, x))\|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

В силу равномерной непрерывности вектор-функции $\varphi(t, x)$ на компакте $T_0 \times D$ и леммы 1 для любого $\mu_1>0$ существует такое $\delta>0$, что

$$\| \overline{\varphi}(s, \Psi(s, t, x \mid \overline{\varphi})-\varphi(s, \Psi(s, t, x \mid \varphi))\| \leqslant \mu_1, \tag{18}$$

если только $\| \overline{\varphi}-\varphi\| \leqslant \delta$. Так как вектор-функция $h(t, x, y)$ равномерно-непрерывна на компакте $T_0 \times D \times V_\rho$, то в силу неравенства (18) для любого $\mu_0>0$ можно указать такое $\delta>0$, что имеет место неравенство

$$\| h(s, \overline{\Psi}, \overline{\varphi}(s, \overline{\Psi}))-h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\| \leqslant \mu_0, \quad s \in T_0,\ t \in T,\ x \in D,\ \varphi \in C_\rho.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что

$$\| S_{T_0}\, \overline{\varphi}-S_{T_0}\varphi\| \leqslant \mu_0 \sup_{t\in T} \int_{T_0} \| G(t, s)\|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Из оценок (17) и (19) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\| S\overline{\varphi}-S\varphi\| \leqslant \varepsilon$, если только $\| \overline{\varphi}-\varphi\| \leqslant \delta$, $t \in T$, $x \in D$, что означает непрерывность оператора $S$ в $C_\rho$.

Доказательство теоремы 1. Покажем вначале, что множество вектор-функций $S\varphi(t, x)$, $\varphi \in C_\rho$ равностепенно-непрерывно на каждом компакте $T \times D$, т. е. покажем, что для любых $t, t' \in T$, $x, x' \in D$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что

$$\| S\varphi(t', x')-S\varphi(t, x)\| \leqslant \varepsilon, \tag{20}$$

если только $|t'-t|+\| x'-x\| \leqslant \delta$.

Имеем $S_I\, \varphi(t', x')-S_I\, \varphi(t, x)=S_I\, \varphi(t', x')-S_I'\varphi(t, x)+S_I''\varphi(t, x)$, где $S_I'\varphi(t, x)=\int_I G(t', s)\, h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds$, $\quad S_I''\varphi(t, x)=\int_I [G(t', s)-G(t, s)]\, h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds$.

Исходя из тех же соображений, что и при получении оценки (17), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой достаточно большой компактный интервал $T_0 \subset I$, что будет справедливо неравенство

$$\| S_{I \setminus T_0} \varphi(t', x') - S_{I \setminus T_0} \varphi(t, x) \| \leqslant \varepsilon/4 \tag{21}$$

для $t \in T$, $x \in D$.

Учитывая, что вектор-функция $\Psi(s, t, x/\varphi)$ принимает значения на компакте $D' \subset E^m$, если $s \in T_0$, $t \in T$, $x \in D$, $\varphi \in C_\rho$ и что вектор-функция $h(t, x, y)$ равномерно-непрерывна на любом компакте, убеждаемся, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|t' - t| + \| x' - x \| \leqslant \delta$, то $\| h(s, \Psi', \varphi(s, \Psi')) - h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi)) \| \leqslant \varepsilon_1$. Поэтому

$$\| S_{T_0} \varphi(t', x') - S_{T_0} \varphi(t, x) \| \leqslant \varepsilon_1 \sup_{t' \in T} \int_{T_0} \| G(t', s) \| ds \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{22}$$

Рассмотрим оператор $S''_I \varphi(t, x) = S''_{I \setminus T_0} \varphi(t, x) + S''_{T_0} \varphi(t, x)$. Исходя из тех же соображений, что и при получении оценки (17), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой достаточно большой интервал $T_0 \subset T$, что $\| S_{I \setminus T_0} \varphi(t, x) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.

Остается оценить оператор $S''_{T_0} \varphi(t, x)$. Предположим для определенности, что $T_0 = [\alpha, \beta]$ и $t' > t$. Тогда

$$S''_{T_0} \varphi(t, x) = S''_{[\alpha, t]} \varphi(t, x) + S''_{[t, t']} \varphi(t, x) + S''_{[t', \beta]} \varphi(t, x).$$

Рассмотрим первое и третье слагаемые. Так как $G(t', s) - G(t, s)$ равномерно-непрерывна по $t$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\| G(t', s) - G(t, s) \| \leqslant \varepsilon/2$, если только $|t' - t| \leqslant \delta$. Кроме того, непрерывная функция $\int_{T_0} \| h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi)) \| ds$ ограничена на компакте $T \times D' \times C_\rho$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\| S''_{[\alpha, t]} \varphi(t, x) \| + \| S''_{[t, \beta]} \varphi(t, x) \| \leqslant \varepsilon/4, \tag{23}$$

если только $|t' - t| \leqslant \delta$. Остается оценить оператор $S''_{[t, t']} \varphi(t, x)$.

Из определения функции Грина имеем

$$G(t', s) - G(t, s) = [Y(t') - Y(t)] PY^{-1}(s) + Y(t) Y^{-1}(s),$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (3), $P$ — проектор. Отсюда и из непрерывности матриц $Y(t)$ и $Y^{-1}(s)$ соответственно на компактах $T$ и $T_0$ вытекает справедливость оценки $\| G(t', s) - G \times \times (t, s) \| \leqslant C_0 < \infty$, где число $C_0$ зависит, вообще говоря, от $T$ и $T_0$.

Кроме того, непрерывная функция $h(t, x, y)$ ограничена на компакте $T_0 \times D' \times C_\rho$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\| S''_{[t, t']} \varphi(t, x) \| \leqslant \varepsilon/4, \tag{24}$$

если только $| t' - t | \leqslant \delta$.

Учитывая оценки (21)—(24), приходим к выводу, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что имеет место оценка (20), из которой следует, что множество вектор-функций $S\varphi(t, x)$, $\varphi \in C_\rho$ равностепенно-непрерывно на каждом компакте $T \times D$. Следовательно, согласно принципу выбора [6, с. 14] любая последовательность $S\varphi_k(t, x)$, $\varphi_k \in C_\rho$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. образ $SC_\rho$ имеет компактное замыкание.

Итак, мы показали, что оператор $S$ отображает пространство $C_\rho$ в себя, является непрерывным и множество $SC_\rho$ имеет компактное замыкание. Отсюда, согласно следствию 0.1 из [6, с. 476] вытекает, что оператор $S$ имеет неподвижную точку $\varphi = \bar{\varphi}(t, x) \in C_\rho$. Очевидно, эта точка является решением уравнения (14), принадлежащим пространству $C_\rho$.

Покажем теперь, что многообразие $\mathfrak{M}$, задаваемое вектор функцией $\tilde{\varphi}(t, x)$, является интегральным многообразием системы уравнений (1). Для этого, взяв любое решение $x(t)$ уравнения

$$dx/dt = f(t, x, \tilde{\varphi}(t, x)), \tag{25}$$

положим в (14) $x = x(t)$. В результате получим тождество

$$\tilde{\varphi}(t, x(t)) \equiv \int\limits_I G(t, s)\, h(s, x(s), \quad \tilde{\varphi}(s, x(s))\, ds.$$

Дифференцируя его, убеждаемся, что вектор-функция $y(t) = \tilde{\varphi}(t, x(t))$ является решением на $I$ уравнения

$$dy/dt = A(t)\, y + h(t, x(t), y). \tag{26}$$

Итак, мы показали, что для любого решения $x(t)$ уравнения (25) вектор-функция $y(t) = \tilde{\varphi}(t, x(t))$ является решением на $I$ уравнения (26). Учитывая условие 1) теоремы 1, можно показать, что если интегральная кривая системы (1) имеет общую точку с многообразием $\mathfrak{M}$, то она полностью лежит на этом многообразии. А это означает, что $\mathfrak{M}$ является интегральным многообразием системы (1). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим частный случай теоремы, когда выполняется условие $h(t, x, 0) = 0$. Здесь можно взять $\rho = 0$. Следовательно, пространство $C_\rho$ будет состоять из одной точки $\varphi(t, x) \equiv 0$. Тогда условие 3) теоремы 1 выполняется независимо от свойств матрицы $A(t)$ уравнения (3). Интегральным многообразием в этом случае является плоскость $y = 0$. Однако условия 1), 2) теоремы 1 могут при этом не выполняться. Отсюда вытекает, что условия теоремы 1 не являются необходимыми.

II. Установим теперь существование интегрального многообразия, представимого вектор-функцией $\varphi(t, x)$ из пространства $C_\rho(\Delta)$, которая удовлетворяет условию Липшица с некоторой непрерывной функцией $\Delta(t)$

$$\| \varphi(t, \bar{x}) - \varphi(t, x) \| \leqslant \Delta(t) \| \bar{x} - x \|. \tag{27}$$

Пространство таких вектор-функций обозначим $C_\rho(\Delta)$.

Исследование интегральных многообразий, заданных вектор-функциями из пространства $C_\rho(\Delta)$ мы будем проводить в предположении, что правые части системы (1) являются липшицевыми с некоторыми функциями $K(t)$, $L(t)$.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функции $f$ и $h$ удовлетворяют по $x$ и $y$ условию Липшица*

$$\| f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, x, y) \| \leqslant K(t) (\| \bar{x} - x \| + \| \bar{y} - y \|),$$

$$\| h(t, x, y) - h(t, x, y) \| \leqslant L(t) (\| \bar{x} - x \| + \| \bar{y} - y \|), \tag{28}$$

*где $K(t)$, $L(t)$ — некоторые непрерывные на $I$ функции;*

2) *для каждой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$ и точки $\varphi(t_0, x_0) \in I \times E^m$ задача Коши*

$$dx/dt = f(t, x, \varphi(t, x)), \quad x|_{t=t_0} = x_0 \tag{29}$$

*имеет на $I$ решение $x(t) = \Psi(t, t_0, x_0/\varphi)$**);

*) Предположение о липшицевости правых частей системы (1) с константами Липшица $K(t)$, $L(t)$ является достаточным условием единственности решений задачи Коши (29) для каждой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$.

*3) существует такая функция Грина $G(t, s)$ уравнения (3), что имеет место оценка $\int\limits_I \| G(t, s) \| \sup\limits_x \| h(s, x, \varphi)(s, x)) | ds \leqslant \rho$, причем интеграл в левой части сходится почти равномерно относительно $t$;*

*4) имеет место неравенство*

$$\int\limits_I \| G(t, s) \| \, \| L(s) [1 + \Delta(s)] \, e^{\left| \int\limits_t^s K(\tau)[1+\Delta(\tau)] d\tau \right|} ds \leqslant \Delta(t). \qquad (30)$$

*Тогда система уравнений (1) имеет интегральное многообразие*

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y), \quad y = \varphi(t, x), \quad t \in I, \ x \in E^m\}, \qquad (31)$$

*где вектор-функция $\varphi(t, x)$ принадлежит пространству $C_\rho(\Delta)$.*

Доказательство. Используем теорему 1 и леммы 1, 2. Так, при выполнении условия 1) теоремы 2 очевидно выполняется условие 1) теоремы 1. Если выполняются условия 1) и 2) теоремы 2, то выполняется условие 2 теоремы 1 для вектор-функций $\varphi(t, x)$ из пространства $C_\rho(\Delta)$, т. е. для каждой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$ и точки $(t_0, x_0) \in I \times E^m$ задача Коши (29) имеет на $I$ единственное решение $x(t) = \Psi(t, t_0, x_0 \mid \varphi)$. Тогда для вектор-функций $\varphi$, $\bar\varphi \in C_\rho(\Delta)$ будет иметь место утверждение леммы 1, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если для $\varphi$, $\bar\varphi \in C_\rho(\Delta)$ выполняется неравенство $\| \bar\varphi(t, x) - \varphi(t, x) \| \leqslant \delta$, то будет выполняться неравенство $\| \Psi(t, t_0, x_0 \mid \bar\varphi) - \Psi(t, t_0, x_0 \mid \varphi) \| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in T$.

Предположим теперь, что относительно системы (1) выполняются условия 1)—3) теоремы 2. Для некоторой вектор-функции $\varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$ возьмем решение $x(t)$ задачи Коши (29) и рассмотрим линейное уравнение

$$dy/dt = A(t) y + h(t, x(t), \quad \varphi(t, x(t)).$$

В силу условия 3) теоремы 2 это уравнение имеет на $I$ ограниченное решение

$$y(t) = \int\limits_I G(t, s) h(s, x(s), \quad \varphi(s, x(s)) ds.$$

Заменим здесь $x(s)$ на $\Psi = \Psi(s, t, x/\varphi)$, а $y(t)$ на $\varphi(t, x)$. В результате получим

$$\varphi(t, x) = \int\limits_I G(t, s) h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi)) ds. \qquad (32)$$

Определим в пространстве $C_\rho(\Delta)$ оператор $S$ с помощью соотношений

$$S\varphi(t, x) = \int\limits_I G(t, s) h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi)) ds. \qquad (33)$$

Так как условие 3) теоремы 2 гарантирует выполнение условия 3) теоремы 1, то для вектор-функций $\varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$ выполняются все условия теоремы 1. Поэтому, дословно повторяя доказательство леммы 2, убеждаемся, что оператор $S$ отображает пространство $C_\rho(\Delta)$ в $C_\rho$ и является непрерывным.

Покажем теперь, что если вектор-функция $\varphi \in C_\rho$ удовлетворяет неравенству (27), то вектор-функция $S\varphi \in C_\rho$ также будет удовлетворять аналогичному неравенству.

Имеем

$$\| S\varphi(t, \bar{x}) - S\varphi(t, x) \| \leqslant \left\| \int\limits_I G(t, s) [h(s, \bar\Psi, \varphi(s, \bar\Psi)) - h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))] ds \right\|,$$

где $\Psi = \Psi(s, t, x \mid \varphi)$, $\bar\Psi = \bar\Psi(s, t, \bar{x} \mid \varphi)$, $\varphi \in C_\rho(\Delta)$.

Принимая во внимание неравенства (27) и (28), находим

$$\| S\varphi(t, x) - S\varphi(t, x) \| \leqslant \int\limits_I \| G(t, s) \| L(s)(1 + \Delta) \| \bar\Psi - \Psi \| ds. \qquad (34)$$

С другой стороны, согласно (29)

$$\overline{\Psi}(s, t, \overline{x} \mid \varphi) - \Psi(s, t, x \mid \varphi) = \overline{x} - x + \int\limits_t [f(\tau, \overline{\Psi}, \varphi(\tau, \overline{\Psi})) -$$

$$- f(\tau, \Psi, \varphi(\tau, \Psi))]\, d\tau.$$

Отсюда, учитывая условие 1) теоремы 2, имеем

$$\| \overline{\Psi}(s, t, \overline{x} \mid \varphi) - \Psi(s, t, x \mid \varphi) \| \leqslant \| \overline{x} - x \| + \left| \int\limits_t^s K(\tau)\, [1 + \Delta(\tau)]\, \| \overline{\Psi}(\tau, t, \overline{x} \mid \varphi) - \right.$$

$$\left. - \Psi(\tau, t, x \mid \varphi) \| \, d\tau \right|.$$

Решая это неравенство, получаем

$$\| \overline{\Psi}(s, t, \overline{x} \mid \varphi) - \Psi(s, t, x \mid \varphi) \| \leqslant \| \overline{x} - x \| \, e^{\left| \int\limits_t^s K(\tau)[1+\Delta(\tau)] d\tau \right|}. \tag{35}$$

Из неравенств (34) и (35) находим

$$\| S\varphi(t, \overline{x}) - S\varphi(t, x) \| \leqslant \| \overline{x} - x \| \int\limits_I \| G(t, s) \| \, L(s)\, [1 + \Delta(s)]\, e^{\left| \int\limits_t^s K(\tau)[1+\Delta(\tau)] d\tau \right|}.$$

Учитывая условие 4) теоремы 2, убеждаемся, что вектор-функция $S\varphi(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица $\| S\varphi(t, \overline{x}) - S\varphi(t, x) \| \leqslant \leqslant \Delta(t) \| \overline{x} - x \|$. Следовательно, оператор $S$ отображает пространство $C_\rho(\Delta)$ в пространство $C_\rho(\Delta)$. По аналогии с доказательством теоремы 1 можно показать, что множество вектор-функций $S\varphi(t, x)$, $\varphi \in C_\rho(\Delta)$, равностепенно-непрерывно на каждом компакте $T \times D$.

Таким образом, к последовательности $S\varphi_k(t, x)$, $\varphi_k \in C_\rho(\Delta)$, можем применить принцип выбора, согласно которому любая последовательность $S\varphi_k(t, x)$ содержит равномерно-сходящуюся подпоследовательность, т. е. образ $SC_\rho(\Delta)$ имеет компактное замыкание.

Итак, мы показали, что оператор $S$ отображает пространство $C_\rho(\Delta)$ в себя, является непрерывным и множество $SC_\rho(\Delta)$ имеет компактное замыкание. Нетрудно показать, что если последовательность вектор-функций из $C_\rho(\Delta)$ почти равномерно сходится, то предельная функция принадлежит пространству $C_\rho(\Delta)$, т. е. пространство $C_\rho(\Delta)$ является замкнутым подмножеством в пространстве $C_\rho$. Тогда согласно теореме 4.3 из [7, с. 103] пространство $C_\rho(\Delta)$ является полным метрическим пространством.

Применяя следствие 0.1 из [6, с. 476], убеждаемся, что оператор $S$ имеет неподвижную точку $\varphi = \varphi(t, x) \in C_\rho(\Delta)$. Легко установить, что эта неподвижная точка является решением уравнения (32). Следовательно, график вектор-функции $y = \varphi(t, x)$ является ограниченным интегральным многообразием системы уравнений (1). Теорема 2 доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 2.

Пусть выполняется условие $h(t, x, 0) = 0$. Тогда можно взять $\rho = 0$. Следовательно, пространство $C_\rho(\Delta)$ будет состоять из одной точки $\varphi(t, x) =$ Тогда условие 3) теоремы 2 выполняется независимо от свойств матрицы $A(t)$ уравнения (3).

Интегральным многообразием в этом случае является плоскость $y = 0$. Однако условия 1) и 2) теоремы 2 могут при этом не выполняться. Отсюда вытекает, что условия теоремы 2 не являются необходимыми.

Предположим, что уравнение (3) экспоненциально-дихотомично и в условии 1) теоремы 2 $K(t) = K = \mathrm{const}$, $L(t) = L = \mathrm{const}$. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть относительно системы (1) выполняется условие 1 теоремы 2 с постоянными Липшица $K$ и $L$, условие 2), а функция*

*Грина уравнения* (3) *удовлетворяет оценке* $\| G(t, s) \| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}$, $t, s \in I$, *где* $N > 0$, $\nu > 0$.

*Кроме того, если* $\| h(t, x, 0) \| \leqslant M$ *и выполняются неравенства*

$$\rho(\nu - 2NL) \geqslant 2MN; \tag{36}$$

$$\nu - 2NL - K \geqslant 2\sqrt{2NL}, \tag{37}$$

*то система уравнений (1) имеет интегральное многообразие (31), при этом вектор-функция* $\varphi(t, x)$ *принадлежит пространству* $C_\rho^{\cdot}(\Delta)$, *где* $\Delta$ — *постоянная.*

Доказательство теоремы 3 можно свести к проверке выполнения условий теоремы 2. Имеем

$$\int_I \| G(t, s) \| \sup_x \| h(s, x, \varphi(s, x)) \| ds \leqslant \int_I Ne^{-\nu|t-s|} [L\rho + M] ds \leqslant \frac{2N}{\nu} [L\rho + M].$$

В силу неравенства (36) $2N/\nu (L\rho + M) \leqslant \rho$. Таким образом, условие 3) теоремы 2 выполняется.

Проверим теперь выполнение условия 4) теоремы 2.

Имеем

$$\mathfrak{I} = \int_I \| G(t, s) \| L(1 + \Delta) e^{\left|\int_t^s K(1+\Delta) d\tau\right|} ds \leqslant \int_I Ne^{-\nu|t-s|} L(1 + \Delta) e^{K(1+\Delta)|t-s|} ds \leqslant$$

$$\leqslant NL(1 + \Delta) \int_I e^{[K(1+\Delta)-\nu]|t-s|} ds.$$

Положим $\Delta = (\nu - 2NL - K)/2K$. Тогда

$$K(1 + \Delta) - \nu = K\left[1 + \frac{\nu - 2NL - K}{2K}\right] - \nu = K + \frac{\nu - 2NL - K}{2} - \nu =$$

$$= K + \frac{\nu}{2} - NL - \frac{K}{2} - \nu = \frac{K}{2} - \frac{\nu}{2} - NL = \frac{1}{2}(K - 2NL - \nu) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\nu + 2NL - K).$$

В силу (37) $K(1 + \Delta) - \nu < 0$. Поэтому $I \leqslant 2NL(1 + \Delta)/(\nu - K(1 + \Delta))$. Отсюда в силу условия (37) $I \leqslant \Delta$.

Таким образом, условие 4 теоремы 2 также выполняется. Теорема 3 доказана.


1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
3. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем нелинейных дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – 19 с.
4. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.— 31 с.
5. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Сиквенциальный подход.— М.: Мир, 1976.— 311 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 719 с.
7. *Шварц Л.* Анализ. В 2-х т.— М.: Мир, 1972.— Т. 1. 824 с.



Институт математики
АН УССР



Поступила в редакцию
25.05.81