УДК 519.21

Б. И. Копытко

О склеивании двух неоднородных диффузионных процессов на прямой

Пусть x_0 — фиксированная точка на вещественной прямой. Обозначим $D_1 = \{x : x \in R^1,\ x < x_0\}$, $D_1 = \{x : x \in R^1,\ x > x_0\}$, а $\bar{D}_i$, $i = 1, 2,$— замыкание области D_i. Определим в областях $[0, T] \times D_1$ и $[0, T] \times D_2$ дифференциальные операторы

$$\mathscr{L}_i = \frac{1}{2} b_i(s, x) \frac{d^2}{dx^2} + a_i(s, x) \frac{d}{dx}, \quad s \in [0, T],\ x \in D_i, \quad i = 1, 2,$$

где $a_i(s, x)$, $b_i(s, x)$ — некоторые вещественные функции, заданные при $s \in [0, T]$, $x \in \bar{D}_i$. В настоящей работе при некоторых предположениях функциях $a_i(s, x)$, $b_i(s, x)$ с помощью методов теории параболических уравнений с разрывными коэффициентами [1] решается задача о склеивании двух диффузионных процессов, которые в областях D_1 и D_2 управляются операторами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно. Построенные процессы марковские с непрерывными траекториями. При фиксированных $a_i(s,x)$ и $b_i(s, x)$ они определяются значением свободного числового параметра, и для них диффузионные коэффициенты существуют в обобщенном смысле.

Заметим, что аналогичная задача для однородного случая рассматривалась в работах [2—4].

Относительно функций $a_i(s, x)$ и $b_i(s, x)$, $i = 1, 2$, будем предполагать, что для них выполняются следующие условия:

а) при всех $x \in \bar{D}_i$, $s \in [0, T]$, $i = 1, 2$, существуют положительные постоянные b и B такие, что $b \leqslant b_i(s, x) \leqslant B$;

б) функция $a_i(s, x)$ ограничена в области $[0, T] \times \bar{D}_i$ и, кроме того, для всех $x, x' \in \bar{D}_i$, $s, s' \in [0, T]$, $i = 1, 2$,

$$|a_i(s, x) - a_i(s, x')| \leqslant L |x - x'|^\alpha,$$

$$|b_i(s, x) - b_i(s', x')| \leqslant L (|x - x'|^\alpha + |s - s'|^{\alpha/2}),$$

где L и α — положительные постоянные, $\alpha \leqslant 1$.

При этих условиях, как известно, существует фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} b_i(s, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_i(s, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

т. е. функция $g_i(s, x, t, y)$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in D_i$, удовлетворяет уравнению (1) в области $s \in [0, t)$, $x \in D_i$ при фиксированных t и y, а также условию

$$\lim_{s \uparrow t} \int_{D_i} g_i(s, x, t, y) \varphi(y)\, dy = \varphi(x), \quad x \in D_i,$$

какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $\varphi(x)$.

Определим функции $\tilde{a}_i(s, x)$ и $\tilde{b}_i(s, x)$, $i = 1, 2$, с помощью соотношений

$$\tilde{b}_i(s, x) = \begin{cases} b_i(s, x), & x \in D_i, \\ b_i(s, x_0), & x \in R^1 \setminus D_i, \end{cases} \quad \tilde{a}_i(s, x) = \begin{cases} a_i(s, x), & x \in D_i, \\ a_i(s, x_0), & x \in R^1 \setminus D_i, \end{cases}$$

и обозначим через $G_i(s, x, t, y)$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^1$, $i = 1, 2$, фундаментальное решение уравнения (1), в котором вместо $a_i(s, x)$ и $b_i(s, x)$ нужно положить соответственно $\tilde{a}_i(s, x)$ и $\tilde{b}_i(s, x)$.

Заметим, что результат работы не будет зависеть от выбора продолжений $\tilde{a}_i(s, x)$, $\tilde{b}_i(s, x)$, поскольку мы будем пользоваться лишь теми свойствами функции $G_i(s, x, t, y)$, которыми обладают все фундаментальные решения [5, 6]:

1) функция $G_i(s, x, t, y)$, $i = 1, 2$, неотрицательна, непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по s, дважды непрерывно дифференцируема по x и выполнены неравенства ($0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^1$)

$$|D_s^r D_x^p G_i(s, x, t, y)| \leqslant K(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{2}$$

где r и p — целые неотрицательные числа, для которых $2r + p \leqslant 2$; D_s^r — символ производной по s порядка r; D_x^p — символ частной производной по x порядка p; h и K — положительные постоянные;

2) $G_i(s, x, t, y)$, $i = 1, 2$, представима в виде

$$G_i(s, x, t, y) = Z_i(s, y-x, t, y) + Z_i'(s, x, t, y), \tag{3}$$

где

$$Z_i(s, y-x, t, y) = [2\pi\tilde{b}_i(t, y)(t-s)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\tilde{b}_i(t, y)(t-s)}\right\},$$

а для функции $Z_i'(s, x, t, y)$ при $2r + p \leqslant 2$ справедливы неравенства

$$|D_s^r D_x^p Z_i'(s, x, t, y)| \leqslant K(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{4}$$

где $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^1$, K и h — положительные постоянные, α — постоянная, входящая в условие б).

Мы будем еще пользоваться неравенствами (см. [5], гл. IV, § 11,13)

$$|D_s^r D_u^p Z_i(s, u, t, y) - D_s^r D_u^p Z_i(s, u, t, y')| \leqslant K|y-y'|^\gamma \times$$
$$\times (t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-h\frac{u^2}{t-s}\right\}, \quad 0 < \gamma \leqslant \alpha, \tag{5}$$

$$|D_s^r D_x^p G_i(s, x, t, y) - D_{s'}^r D_x^p G_i(s', x, t, y)| \leqslant K[(s-s')(t-s)^{-\frac{3+2r+p}{2}} +$$
$$+ (s-s')^{\frac{2-2r-p+\alpha}{2}}(t-s)^{-3/2}]\exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s'}\right\}; \tag{6}$$

$$|D_s Z_i'(s, x, t, y) - D_{s'} Z_i'(s', x, t, y)| \leqslant K(s-s')^\alpha (t-s)^{-3/2}\exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s'}\right\}, \tag{7}$$

где $2r + p = 1, 2$, $0 \leqslant s' < s < t \leqslant T$, $i = 1, 2$, и соотношениями (их доказательство элементарно)

$$\int_{R^1} G_i(s, x, t, y)\, dy = 1, \tag{8}$$

$$\int_{R^1} (y-x) G_i(s, x, t, y)\, dy = \int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\tilde{a}_i(\tau, z)\, d\tau dz, \tag{9}$$

$$\int_{R^1} (y-x)^2 G_i(s, x, t, y)\, dy = \int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\tilde{b}_i(\tau, z)\, d\tau dz +$$
$$+ 2\int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\tilde{a}_i(\tau, z)(z-x)\, d\tau dz, \tag{10}$$

справедливыми при $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $i = 1, 2$.

Искомый процесс будет построен с помощью семейства операторов T_{st}, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, действующих на ограниченную измеримую функцию $\varphi(x)$, $x \in R^1$, по формуле

$$T_{st}\varphi(x) = \int_{R^1} G_i(s, x, t, y)\varphi(y)\,dy + \int_s^t G_i(s, x, \tau, x_0) V_i(\tau, t, \varphi)\,d\tau,$$
$$x \in D_i, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

где $V_i(s, t, \varphi)$, $i = 1, 2,$— неизвестные функции, подлежащие определению.

Функции V_1 и V_2 будем искать из следующих двух условий сопряжения в точке $x = x_0$:

$$T_{st}\varphi(x_0 - 0) = T_{st}\varphi(x_0 + 0), \quad 0 \leqslant s < t \leqslant T, \tag{12}$$

$$(q(s) - 1)\frac{\partial T_{st}\varphi(x_0 - 0)}{\partial x} + (q(s) + 1)\frac{\partial T_{st}\varphi(x_0 + 0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leqslant s < t \leqslant T, \tag{13}$$

где $q(s)$ — некоторая непрерывная функция в области $s \in [0, T]$.

Замечание. В теории параболических уравнений с разрывными коэффициентами (см. [1]) вместо (11), (12) фигурируют условия

$$T_{st}\varphi(x_0 - 0) - T_{st}\varphi(x_0 + 0) = h_1(s),$$

$$q_1(s)\frac{\partial T_{st}\varphi(x_0 - 0)}{\partial x} + q_2(s)\frac{\partial T_{st}\varphi(x_0 + 0)}{\partial x} = h_2(s),$$

где $q_i(s)$, $h_i(s)$, $i = 1, 2,$— некоторые непрерывные функции при $s \in [0, T]$. Сравнивая последние условия с (12), (13), заметим следующее. Равенство (12) означает, что семейство операторов T_{st} оставляет инвариантным пространство вещественных непрерывных ограниченных функций, правая часть в (13) равна нулю, так как лишь в этом случае семейство T_{st} стохастическое, и, наконец, соотношение (13) вытекает из последнего равенства (при $h_2(s) = 0$), если выразить $q_i(s)$, $i = 1, 2$, через параметр $q(s) = \dfrac{q_1(s) + q_2(s)}{q_2(s) - q_1(s)}$, $q_2(s) - q_1(s) \neq 0$.

Предполагая, что функции $V_i(s, t, \varphi)$, $i = 1,2$, непрерывны для $s \in [0, t]$ и применяя формулу скачка для потенциала простого слоя (см. [5], гл. IV, § 15) к $\dfrac{\partial T_{st}\varphi(x_0 \mp 0)}{\partial x}$, из условий (12), (13) получаем следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных V_1 и V_2:

$$\int_s^t [G_2(s, x_0, \tau, x_0) V_2(\tau, t, \varphi) - G_1(s, x_0, \tau, x_0) V_1(\tau, t, \varphi)]\,d\tau = \Phi(s, t),$$

$$\int_s^t [\overline{K}_1(s, \tau) V_1(\tau, t, \varphi) + \overline{K}_2(s, \tau) V_2(\tau, t, \varphi)]\,d\tau + \frac{q(s) + 1}{b_2(s, x_0)} V_2(s, t, \varphi) -$$
$$- \frac{q(s) - 1}{b_1(s, x_0)} V_1(s, t, \varphi) = \psi(s, t), \tag{14}$$

где

$$\Phi(s, t) = \int_{R^1} [G_1(s, x_0, t, y) - G_2(s, x_0, t, y)]\varphi(y)\,dy,$$

$$\psi(s, t) = \int_{R^1}\left[(q(s) - 1)\frac{\partial G_1(s, x_0, t, x_0)}{\partial x} + (q(s) + 1)\frac{\partial G_2(s, x_0, t, x_0)}{\partial x}\right]\varphi(y)\,dy,$$

$$\overline{K}_1(s, \tau) = -(q(s) - 1)\frac{\partial G_1(s, x_0, \tau, y)}{\partial x},$$

$$\overline{K}_2(s, \tau) = -(q(s) + 1)\frac{\partial G_2(s, x_0, \tau, y)}{\partial x}.$$

Первое уравнение в (14) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода. При помощи приема Гальмгрена [1] приведем это уравнение к уравнению Вольтерра второго рода. Для этого умножим обе части указанного уравнения на $(s-z)^{-1/2}$, $0 \leqslant z < t$, проинтегрируем по s от z до t и поменяем порядок интегрирования по s и τ:

$$\int_z^t [K_2(z, \tau) V_2(\tau, t, \varphi) - K_1(z, \tau) V_1(\tau, t, \varphi)]\, d\tau = \bar{\Phi}(z, t), \tag{15}$$

где

$$K_i(z, \tau) = \int_z^\tau (s-z)^{-1/2} G_i(s, x_0, \tau, x_0)\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2b_i(\tau, x_0)}} + (\tau - z)^{1/2} K_i^*(z, \tau),$$

$$K_i^*(z, \tau) = \int_0^1 \beta^{-1/2} Z_i'(\beta(\tau - z) + z, x_0, \tau, x_0)\, d\beta, \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{\Phi}(z, t) = \int_z^t (s-z)^{-1/2} \Phi(s, t)\, ds = (t-z)^{1/2}\, \bar{\Phi}_1(z, t),$$

$$\bar{\Phi}_1(z, t) = \int_0^1 \beta^{-1/2} \Phi(\beta(t-z) + z, t)\, d\beta.$$

Далее, используем легко проверяемые равенства $K_i(z, z) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2b_i(z, x_0)}}$, $i = 1, 2$, а также соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\Phi}_1(z, t) = \int_0^1 \beta^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\beta(t-z) + z, t)\, d\beta, \quad 0 \leqslant z < t,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K_i^*(z, \tau) = \int_0^1 \beta^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z} Z_i'(\beta(\tau - z) + z, x_0, \tau, x_0)\, d\tau, \quad 0 \leqslant z < \tau,$$

которые доказываются при помощи неравенств (2), (6) и (4), (7) точно так же как аналогичные соотношения в [4]. После дифференцирования уравнения (15) по z (и замены в окончательном результате z на s) это приводит к уравнению Вольтерра второго рода

$$\int_s^t [\tilde{K}_1(s, \tau) V_1(\tau, t, \varphi) - \tilde{K}_2(s, \tau) V_2(\tau, t, \varphi)]\, d\tau + \frac{V_2(s, t, \varphi)}{\sqrt{b_2(s, x_0)}} - \frac{V_1(s, t, \varphi)}{\sqrt{b_1(s, x_0)}} = \Phi_0(s, t), \tag{16}$$

где $\tilde{K}_i(s, \tau) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\partial}{\partial s} K_i(s, \tau)$, $\Phi_0(s, t) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\partial}{\partial s} \bar{\Phi}(s, t)$. Подставляя вместо первого уравнения в (14) уравнение (16), отметим, что при $\dfrac{q(s) - 1}{\sqrt{b_1(s, x_0)}} - \dfrac{q(s) + 1}{\sqrt{b_2(s, x_0)}} \neq 0$ система (14) может быть заменена эквивалентной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, разрешенных относительно $V_i(s, t, \varphi)$, $i = 1, 2$:

$$V_i(s, t, \varphi) = \mu_i(s, t, \varphi) + \sum_{j=1}^{2} \int_s^t N_{ij}(s, \tau) V_j(\tau, t, \varphi)\, d\tau, \quad i = 1, 2, \tag{17}$$

где

$$\mu_1(s, t, \varphi) = \frac{1}{\dfrac{q(s)-1}{\sqrt{b_1(s, x_0)}} - \dfrac{q(s)+1}{\sqrt{b_2(s, x_0)}}} \left[\sqrt{\frac{b_1(s, x_0)}{b_2(s, x_0)}} (q(s)+1) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi_0(s, t) - \sqrt{b_1(s, x_0)}\, \psi(s, t) \right],$$

$$\mu_2(s, t, \varphi) = \frac{1}{\dfrac{q(s)-1}{\sqrt{b_1(s, x_0)}} - \dfrac{q(s)+1}{\sqrt{b_2(s, x_0)}}} \left[\sqrt{\frac{b_2(s, x_0)}{b_1(s, x_0)}} (q(s)-1) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi_0(s, t) - \sqrt{b_2(s, x_0)}\, \psi(s, t) \right],$$

а ядра $N_{ij}(s, \tau)$, являясь линейными комбинациями функций $\bar{K}_j(s, \tau)$ и $\tilde{K}_j(s, \tau)$, $i, j = 1, 2$, имеют слабую особенность вида (это следует из неравенства (4))

$$|N_{ij}(s, \tau)| \leqslant K(\tau - s)^{-1+\alpha/2}, \quad i, j = 1, 2.$$

Аналогично [4] можно доказать, что если $\varphi(x)$ — произвольная ограниченная измеримая функция на R^1 с вещественными значениями, то система (17) имеет единственное непрерывное решение в области $s \in [0, t)$, представимое в виде

$$V_i(s, t, \varphi) = \mu_i(s, t, \varphi) + \sum_{j=1}^{2} \int_s^t R_{ij}(s, \tau)\, \mu_j(\tau, t, \varphi)\, d\tau, \quad i = 1, 2, \qquad (18)$$

причем имеют место оценки

$$|R_{ij}(s, \tau)| \leqslant K(\tau - s)^{-1+\alpha/2}, \; |V_i(s, t, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\| (t-s)^{-1/2},$$

где $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in R^1} |\varphi(x)|$. Из последнего неравенства, а также из (2) (при $r = 0$, $p = 0$) вытекает существование потенциалов простого слоя в правой части (11).

В случае, когда $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими производными, решение системы (17) представляет собой непрерывную функцию в области $s \in [0, t]$. При этом $|V_i(s, t, \varphi)| \leqslant K$, $i = 1, 2$.

Отметим еще одно очевидное свойство решения системы (17). Если $\varphi_n(x)$ — последовательность ограниченных измеримых функций на R^1 с вещественными значениями такова, что $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при каждом $x \in R^1$, когда $n \to \infty$ и $\sup\limits_{n,x} |\varphi_n(x)| < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} V_i(s, t, \varphi_n) = V_i(s, t, \varphi)$, $i = 1, 2$, для всех $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_{st}\varphi_n(x) = T_{st}\varphi(x)$, если только $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ при каждом $x \in R^1$ и $\sup\limits_{n,x} |\varphi_n(x)| < \infty$.

Выясним, при каких дополнительных условиях построенное семейство операторов T_{st} неотрицательные функции переводит в неотрицательные.

Лемма. *Семейство операторов T_{st}, $s \in [0, t)$, оставляет инвариантным конус неотрицательных функций тогда и только тогда, когда $|q(s)| \leqslant 1$.*

Доказательство данной леммы с очевидными изменениями проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующих лемм в работах [2—4].

Далее, замечая, что для функции $\varphi_0(y) \equiv 1$ $V_i(s, t, \varphi_0) \equiv 0$, $i = 1, 2$, и, стало быть, $T_{st}\varphi_0(x) \equiv 1$, а также учитывая, что семейство T_{st} является мультипликативной функцией интервала ($T_{st} = T_{su}T_{ut}$, $0 \leqslant\ < u < t \leqslant T$), приходим к заключению, что семейство операторов T_{st} в условиях леммы определяет некоторый неоднородный необрывающийся марковский процесс. Обозначим его вероятность перехода $P(s, x, t, dy)$ так, что

$$T_{st}\varphi(x) = \int_{R^1} P(s, x, t, dy)\, \varphi(y).$$

Докажем, что траектории процесса можно выбрать непрерывными. Для этого достаточно показать, что вероятность перехода $P(s, x, t, dy)$ обладает следующим свойством:

$$\sup_{x \in R^1} \int_{R^1} |y - x|^4 P(s, x, t, dy) \leqslant K(t-s)^2, \tag{19}$$

где $s \in [0, t)$, K — некоторая положительная постоянная. Зафиксируем некоторое $\bar{x} \in R^1$ и определим функцию $\bar{\varphi}(y) = |y - \bar{x}|^4$, $y \in R^1$.

Подставляя $\bar{\varphi}(y)$ в формулы для $\Phi_0(s, t, \varphi)$ и $\psi(s, t, \varphi)$ и используя неравенство (2), находим

$$|\Phi_0(s, t, \bar{\varphi})| \leqslant K[(t-s)^{3/2} + (t-s)^{-1/2}(x_0 - \bar{x})^4],$$

$$|\psi(s, t, \bar{\varphi})| \leqslant K[(t-s)^{3/2} + (t-s)^{-1/2}(x_0 - \bar{x})^4].$$

Отсюда следует такое же неравенство для функции $V_i(s, t, \bar{\varphi})$, $i=1, 2$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Имеем

$$\int_{R^1} |y - \bar{x}|^4 P(s, \bar{x}, t, dy) = \int_{R^1} G_i(s, \bar{x}, t, y)\, |y - \bar{x}|^4 dy +$$

$$+ \int_s^t G_i(s, \bar{x}, \tau, x_0)\, V_i(\tau, t, \bar{\varphi})\, d\tau, \quad \bar{x} \in D_i.$$

Так как в силу неравенства (2) (при $r=0$, $p=0$)

$$\sup_{\bar{x} \in R^1} \int_{R^1} G_i(s, \bar{x}, t, y)\, |y - \bar{x}|^4 dy \leqslant K(t-s)^2,$$

то при $s \in [0, t)$, $\bar{x} \in R^1$

$$\int_{R^1} |y - \bar{x}|^4 P(s, \bar{x}, t, dy) \leqslant K \Bigg[(t-s)^2 + \int_s^t (\tau - s)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ -h \frac{|x_0 - \bar{x}|^2}{\tau - s} \right\} [(t-\tau)^{3/2} + (x_0 - \bar{x})^4 (t-\tau)^{-1/2}]\, d\tau \Bigg],$$

откуда и вытекает свойство (19).

Подсчитаем, наконец, диффузионные коэффициенты построенного процесса. Определим функции $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $x \in R^1$. В силу представления (3) из соотношений (8), (9) для функции $Z_i(s, y - x_0, t, x_0)$ и неравенств (4), (5) имеем

$$V_i(s, t, \varphi_1) = 2c(s)\sqrt{b_i(s, x_0)} + \tilde{V}_i(s, t, \varphi_1), \; i = 1, 2, \; 0 \leqslant s < t \leqslant T,$$

где $c(s) = q(s) / \{[q(s)+1]\,[b_2(s_1 x_0)]^{-\frac{1}{2}} - [q(s)-1]\,[b_1(s_1 x_0)]^{-\frac{1}{2}}\}$, а функция $\tilde{V}_i(s, t, \varphi_1)$ допускает оценку

$$|\tilde{V}_i(s, t, \varphi_1)| \leqslant K(t-s)^{\alpha/2} \tag{20}$$

в области $s \in [0, t)$. Отсюда, а также из (9) вытекает соотношение

$$\int_{R^1} (y - x)\, P(s, x, t, dy) = T_{st}\varphi_1(x) - x = \int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\, \bar{a}_i(\tau, z)\, d\tau dz +$$

$$+2\int_s^t G_i(s, x, \tau, x_0)\, c(\tau)\sqrt{b_i(\tau, x_0)}\,d\tau + \int_s^t G_i(s, x, \tau, x_0)\,\tilde{V}_i(\tau, t, \varphi_1)\,d\tau,$$

$$x \in D_i, \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Далее аналогичным путем получаем представление для функции

$$V_i(s, t, \varphi_2) = 4x_0 c(s)\sqrt{b_i(s, x_0)} + 2x_0 \tilde{V}_i(s, t, \varphi_1) + \tilde{V}_i(s, t, \varphi_2), \quad i = 1, 2,$$

где $\tilde{V}_i(s, t, \varphi_2)$ удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{V}_i(s, t, \varphi_2)| \leqslant K(t - s)^{1/2} \tag{22}$$

при $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Поэтому, используя формулы (10) и (21), находим

$$\int_{R^1} (y - x)^2 P(s, x, t, dy) = T_{st}\varphi_2(x) - x^2 - 2x\int_{R^1}(y - x)\,P(s, x, t, dy) =$$

$$= \int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\,\tilde{b}_i(\tau, z)\,d\tau dz + 2\int_s^t \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\,\tilde{a}_i(\tau, z)(z - x)\,d\tau dz +$$

$$+ 2(x_0 - x)\int_s^t G_i(s, x, \tau, x_0)\left[c(\tau)\sqrt{b_i(\tau, x_0)} + \tilde{V}_i(\tau, t, \varphi_1)\right] d\tau +$$

$$+ \int_s^t G_i(s, x, \tau, x_0)\,\tilde{V}_i(\tau, t, \varphi_2)\,d\tau, \quad x \in D_i. \tag{23}$$

Теперь мы можем доказать, что для любой финитной непрерывной функции $\varphi(x)$, $x \in R^1$, с вещественными значениями справедливы соотношения

$$\lim_{t \downarrow s} \int_{R^1} \varphi(x)\left[\frac{1}{t - s}\int_{R^1}(y - x)\,P(s, x, t, dy)\right] dx = \int_{R^1} a(s, x)\,\varphi(x)\,dx +$$

$$+ c(s)\sum_{i=1}^{2}\sqrt{b_i(s, x_0)}\,\varphi(x_0),$$

$$\tag{24}$$

$$\lim_{t \downarrow s} \int_{R^1} \varphi(x)\left[\frac{1}{t - s}\int_{R^1}(y - x)^2\,P(s, x, t, dy)\right] dx = \int_{R^1} b(s, x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $a(s, x) = a_i(s, x)$, $b(s, x) = b_i(s, x)$, $x \in D_i$, $i = 1, 2$.

Чтобы доказать первое из них, умножим обе части равенства (21) на непрерывную финитную функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем по x:

$$\int_{R^1} \varphi(x)\left[\frac{1}{t - s}\int_{R^1}(y - x)\,P(s, x, t, dy\right] dx = \sum_{i=1}^{2}\left[\int_{D_i} \varphi(x)\,L_i(s, t, x)\,dx +\right.$$

$$\left. + R_i(s, t, x_0) + \frac{1}{t - s}\int_s^t Q_i(s, \tau, x_0)\,\tilde{V}_i(\tau, t, \varphi_1)\,d\tau\right], \tag{25}$$

где

$$L_i(s, t, x) = \frac{1}{t - s}\int_s^t d\tau \int_{R^1} G_i(s, x, \tau, z)\,\tilde{a}_i(\tau, z)\,d\tau dz,$$

$$R_i(s, t, x_0) = \frac{1}{t-s} \int\limits_s^t d\tau \int\limits_{D_i} G_i(s, x, \tau, x_0)\, 2c(\tau) \sqrt{b_i(\tau, x_0)}\, \varphi(x)\, dx,$$

$$Q_i(s, t, x_0) = \int\limits_{D_i} G_i(s, x, t, x_0)\, \varphi(x)\, dx \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что из оценки (2) (при $r = 0$, $p = 0$) вытекают неравенства $|L_i(s, t, x)| \leqslant K \sup\limits_{t,x} |\tilde{a}_i(t, x)|$, $|R_i(s, t, x_0)| \leqslant K \|\varphi\|$, $|Q_i(s, t, x_0)| \leqslant K \|\varphi\|$, справедливые при $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Кроме того, в силу представления (3) имеем $\lim\limits_{t \downarrow s} L_i(s, t, x) = \tilde{a}_i(s, x)$, $\lim\limits_{t \downarrow s} R_i(s, t, x_0) = c(s) \sqrt{b_i(s, x_0)}\, \varphi(x_0)$, $i = 1, 2$, поэтому, переходя к пределу при $t \downarrow s$ в равенстве (25) с учетом оценки (20), получаем первое из соотношений в (24). Аналогично из выражения (23) учитывая неравенство (22), можно получить и второе соотношение из (24).

Равенства (24) означают, что для построенного нами процесса с вероятностью перехода $P(s, x, t, dy)$ существуют в обобщенном смысле диффузионные коэффициенты: коэффициент диффузии, равный $b(s, x)$, вектор переноса, равный $a(s, x) + c(s) \sum\limits_{i=1}^{2} \sqrt{b_i(s, x_0)}\, \delta(x - x_0)$, где $\delta(x - x_0)$ — δ-функция Дирака. Заметим, что при $c(s) = 0$ ($q(s) = 0$) получаем классический случай склеивания двух диффузионных процессов.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что в области* $[0, T] \times R^1$ *заданы функции* $b(s, x) = b_i(s, x)$, $a(s, x) = a_i(s, x)$, $x \in D_i$, $i = 1, 2$, *причем* $b_i(s, x)$ *и* $a_i(s, x)$ *при* $(s, x) \in [0, T] \times \bar{D}_i$ *удовлетворяют условиям а), б). Пусть выполнено условие* $|q(s)| \leqslant 1$. *Тогда существует необрывающийся марковский процесс с непрерывными траекториями, вероятность перехода которого удовлетворяет соотношениям (24).*

1. *Камынин Л. И.* О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.— Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964, **28**, № 4, с. 721—744.
2. *Портенко Н. И.* Диффузионные процессы с обобщенным коэффициентом переноса.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, **26**, № 1, с. 62—77.
3. *Копытко Б. И.* О склеивании двух процессов броуновского движения.— В кн.: Случайные процессы в задачах математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 94—106.
4. *Копытко Б. И.* О склеивании двух диффузионных процессов на прямой.—В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 84—101.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
08.05.81