УДК 517.53

А. А. Клунник, В. Л. Макаров

О сходимости интерполяционного процесса для x^2-аналитической функции

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Найти x^2-аналитическую [1] функцию $W_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, мнимая часть которой — многочлен от x и y наименьшей возможной степени, удовлетворяющую условиям $W_n(z_j) = s_j$, $j = \overline{1, n}$, где $z_j = x_j + iy_j$ — произвольные, попарно не равные точки комплексной полуплоскости $x > 0$; $s_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = \overline{1, n}$ — заданные произвольные комплекснозначные постоянные.

Как следует из [2], эту функцию можно записать в виде

$$W_n(z) = (1/x) P_{n-1}(x, y) + iQ_n(x, y), \tag{1}$$

где

$$P_{n-1}(x, y) = cx - a_1 - 2a_2 y + \sum_{j=2}^{n-1} [a_{j+1}^{(1)} P_j^{(1)}(x, y) + a_{j+1}^{(2)} P_j^{(2)}(x, y)],$$

$$Q_n(x, y) = a_0 + a_1 y + a_2(x^2 + y^2) + \sum_{j=3}^{n} [a_j^{(1)} Q_j^{(1)}(x, y) + a_j^{(2)} Q_j^{(2)}(x, y)].$$

Постоянные c, a_0, a_1, a_2, $a_j^{(1)}$, $a_j^{(2)}$, $j = \overline{3, n}$ (их всего $2n$) находятся из системы $2n$ линейных уравнений

$$P_{n-1}(x_j, y_j) = \alpha_j x_j, \ Q_n(x_j, y_j) = \beta_j, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Базисные однородные многочлены $P_j^{(1)}$, $P_j^{(2)}$, $Q_j^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$ имеют следующий вид:

$$P_j^{(1)}(x, y) = -(j+1) y^j + \sum_{r=1}^{[j/2]} (-1)^{r+1} (j+1)! \ x^{2r-1} y^{j-2r+1} / ((2r-1) \times \times (j-2r)! \, (2r)!! \, (2r-3)!!), \tag{3}$$

$$P_j^{(2)}(x, y) = -3xy^{j-1}/(j-1) + \sum_{r=2}^{[(j+1)/2]} (-1)^r 3(j-2)! \ x^{2r-1} y^{j-2r+1} / ((j - 2r + 1)! \, (2r-2)!! \, (2r-1)!!), \quad Q_j^{(1)}(x, y) = y^j + \tag{4}$$

$$+ \sum_{r=1}^{[j/2]} (-1)^{r+1} j! \, x^{2r} y^{j-2r} / ((j-2r)! \, (2r)!! \, (2r-3)!!), \quad Q_j^{(2)}(x, y) = \tag{5}$$

$$= x^3 y^{j-3} + \sum_{r=2}^{[(j-1)/2]} (-1)^{r+1} 3(j-1)! \, x^{2r+1} y^{j-2r-1} / ((j - 2r - 1)! \, (2r-2)!! \, (2r+1)!!). \tag{6}$$

В формулах (3)—(6) $[a]$ — целая часть числа a, значение $k!$ и $k!!$ полагаются при $k \leqslant 0$ равными 1, а суммы равны нулю в том случае, если верхний индекс суммирования меньше нижнего. Если узлы интерполирования z_j, $j = \overline{1, n}$, лежат на произвольной прямой, то, как доказано в [2], определитель системы (2) не равен нулю, и поэтому в этом случае всегда существует и притом единственная интерполяционная функция (1).

Предположим, что в области D, находящейся в правой полуплоскости и содержащей отрезок некоторой прямой $y = kx + b$ $(c \leqslant x \leqslant d)$, задана x^2-аналитическая функция $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть, далее, задана бесконечная треугольная матрица

$$x_1^{(1)};\ x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_1^{(3)};\ x_2^{(3)};\ x_3^{(3)}; \dots;\ x_1^{(n)};\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}; \dots, \tag{7}$$

все элементы которой принадлежат отрезку $[c, d]$.

В соответствии с формулой (1) строим последовательность x^2-аналитических интерполяционных функций $W_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, для каждой из которой выполняются равенства

$$W_n(z_m^{(n)}) = W(z_m^{(n)}), \qquad m = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где

$$z_m^{(n)} = x_m^{(n)} + i(kx_m^{(n)} + b). \tag{9}$$

Назовем данный интерполяционный процесс сходящимся, если $\lim\limits_{n \to \infty} W_n(z) = W(z)$ $\forall z \in D$. Введем обозначения: $\omega_n(x) = \prod\limits_{m=1}^{n} (x - x_m^{(n)})$, $p(x) = xu(x, kx + b)$, $g(x) = V(x, kx + b)$,

$$A_n = a_n^{(1)} \Big[k^n + \sum_{r=1}^{[n/2]} (-1)^{r+1}\, n!\, k^{n-2r}/((n-2r)!\,(2r)!!\,(2r-3)!!)\Big] + a_n^{(2)} \Big[k^{n-3} + \sum_{r=2}^{[(n-1)/2]} (-1)^{2+1}\, 3\,(n-3)!\, k^{n-2r-1}/((n-2r-1)!\, (2n-2)!!\,(2n+1)!!)\Big]. \tag{10}$$

Лемма 1. *Если таблица интерполяционных узлов (7) и функции $p(x)$ и $g(x)$ таковы, что интерполяционный процесс Лагранжа для них на отрезке $[c, d]$ сходится (в частности, если $p(x)$ и $g(x)$ — целые функции), и $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \omega_n(x) = 0$ $\forall x \in [c, d]$, то интерполяционный процесс (8) для x^2-аналитической функции комплексного переменного сходится в области D.*

Доказательство. Пусть в области D, обладающей указанными выше свойствами, задана x^2-аналитическая функция $W(z) = u + iv$, удовлетворяющая условиям леммы 1. Построим для нее интерполяционный процесс (8), (9). Из (1) и (8) получаем, что $P_{n-1}(x_m^{(n)}, kx_m^{(n)} + b) = x_m^{(n)} u(x_m^{(n)}, kx_m^{(n)} + b)$, $m = \overline{1, n}$. Отсюда следует, что функция $P_{n-1}(x, kx + b)$ — многочлен $(n-1)$-й степени и совпадает с функцией $p(x) = xu(x, kx + b)$ в n различных точках $x_m^{(n)}$, $m = \overline{1, n}$, т. е. — интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{n-1}(x; p)$.

Для многочлена $Q_n(x, y)$ выполняются условия $Q_n(x_m^{(n)}, kx_m^{(n)} + b) = v(x_m^{(n)}, kx_m^{(n)} + b)$, $m = \overline{1, n}$ Поэтому $Q_n(x, kx + b) = M_n(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $g(x)$, степень которого на единицу больше минимальной возможной степени интерполяционного многочлена Лагранжа $L_{n-1}(x; g)$, построенного по рассматриваемой системе узлов. Учитывая, что старший коэффициент многочлена $M_n(x)$ определяется формулой (10), можно записать, что $M_n(x) = L_{n-1}(x; g) + A_n \omega_n(x)$. Из условий леммы 1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} L_{n-1}(x; p) = p(x)$ $\forall x \in [c, d]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x) = g(x)$ $\forall x \in [c, d]$. Таким образом, на отрезке прямой $y = kx + b$ $(c \leqslant x \leqslant d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(z) = W(z)$.

Но если две x^2-аналитические в области D функции принимают одинаковые значения на бесконечном множестве точек, имеющем точку накопления внутри области D, то они тождественно совпадают друг с другом в этой области [1]. Отсюда и следует, что построенный интерполяционный процесс (11) для x^2-аналитической функции комплексного переменного сходится в области D.

Для удобства записи в дальнейшем опустим верхний индекс при обозначении узлов интерполирования, т е. вместо $x_j^{(n)}$ будем писать x_j, $j = \overline{1, n}$.

Лемма 2. *Если*

$$x_j = c + (d - c)j/(n + 1), \quad j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

то $\max\limits_{x \in [c, d]} |\omega_n(x)| = (d - c)^n n!/(n + 1)^n$.

Доказательство леммы 2 можно получить способом, изложенным в [3].

Введем обозначение

$$|\alpha_{1j}\alpha_{2j} \dots \alpha_{nj}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \dots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \dots \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{1j} & \alpha_{2j} \dots \alpha_{nj} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Чтобы избежать громоздких выкладок, в дальнейшем будем считать, что угловой коэффициент k прямой, на которой лежат узлы интерполяции, равен нулю. В этом случае

$$A_{2m} = (-1)^{m+1}(2m - 1)\, a_{2m}^{(1)}, \tag{12}$$

$$A_{2m+1} = ((-1)^{m+1} 3/(2m - 1)(2m + 1))\, a_{2m+1}^{(2)}. \tag{13}$$

Определим $a_{2m}^{(1)}$ и $a_{2m+1}^{(2)}$ из системы линейных уравнений (2) и подставим найденные значения соответственно в (12) и (13). Оказывается, что эти две формулы можно объединить и окончательно записать в виде

$$A_n = |\, 1 x_j^2 x_j^3 \dots x_j^{n-1} \beta_j \,| / |\, 1 x_j^2 x_j^3 \dots x_j^{n-1} x_j^n \,|. \tag{14}$$

Исследуем выражение $B_n(x) = A_n \omega_n(x)$ при $x \in [c, d]$ в том случае, когда узлы интерполирования выбраны в соответствии с (11). Как следует из леммы 2,

$$|B_n(x)| \leqslant (d - c)^n |A_n| n!/(n + 1)^n = B(n) \ \forall x \in [c, d]. \tag{15}$$

Пусть функция $g(x)$ раскладывается в ряд Тейлора $g(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} c_p x^p$. Так как $\beta_j = \operatorname{Im} W(z_j) = g(x_j)$, $j = \overline{1, n}$, то в соответствии с (14) можно записать, что

$$B(n) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(n), \quad n \geqslant 3, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} u_p(n) &= (d - c)^n (n!/(n + 1)^n)\, c_p D_p^{(n)}, \\ D_p^{(n)} &= |\, 1\ x_j^2 x_j^3 \dots x_j^{n-1} x_j^p \,| / |\, 1\ x_j^2 x_j^3 \dots x_j^{n-1} x_j^n \,|. \end{aligned} \tag{17}$$

Применив признак Даламбера, нетрудно показать, что при любом фиксированном n ряд (16) сходится абсолютно.

Лемма 3. *Если ряд Тейлора* $g(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} c_p x^p$ *имеет радиус сходимости*

$$R > re^{1/e}, \tag{18}$$

где

$$r = \begin{cases} (d-c)\,d, & \textit{если } d-c>1, \quad d>1, \\ d-c, & \textit{если } d-c>1, \quad d\leqslant 1, \\ d, & \textit{если } d-c\leqslant 1, \quad d>1, \\ 1, & \textit{если } d-c\leqslant 1, \quad d\leqslant 1, \end{cases} \tag{19}$$

то ряд $B(n)=\sum_{p=0}^{\infty} u_p(n)$ *сходится равномерно при* $n\geqslant 3$.

Доказательство. Вычислим определитель $\alpha_p^{(n)}=|\,1\ x_j^2x_j^3\ldots x_j^{n-1}x_j^p\,|$. Раскладывая его по элементам последнего столбца и применяя затем способ вычисления определителей типа Вандермонда, изложенный в [4], находим $\alpha_p^{(n)}=\alpha_n W_n\sum_{j=1}^{n} x_j^{p-1}(\gamma_n-1/x_j)/\omega_n'(x_j)$, где $\alpha_n=\prod_{j=1}^{n}x_j$, $\gamma_n=\sum_{j=1}^{n}(1/x_j)$, W_n — определитель Вандермонда. Так как $|\,1\ x_j^2x_j^3\ldots x_j^{n-1}x_j^n\,|=\alpha_n\gamma_nW_n$, то $D_p^{(n)}=(1/\gamma_n)\sum_{j=1}^{n}x_j^{p-1}(\gamma_n-1/x_j)/\omega_n'(x_j)$.

Введем в рассмотрение функцию $f_p(x)=x^p(\gamma_n-1/x)$. Интерполяционный многочлен Лагранжа для этой функции, построенный по узлам x_j, $j=\overline{1,n}$, можно записать в виде

$$L_{n-1}(x;f_p)=\sum_{j=1}^{n}x_j^p(\gamma_n-1/x_j)\,\omega_n(x)/((x-x_j)\,\omega_n'(x_j)). \tag{20}$$

Учитывая (17) и (20), находим, что $u_p(n)=((-1)^{n-1}(d-c)^n\,n!\,c_p/\alpha_n\gamma_n\times(n+1)^n)\,L_{n-1}(0;f_p)$. Зафиксируем $p\,(p\geqslant 3)$. Если $n>p$, то по построению $u_p(n)=0$, $u_n(n)=n!\,c_n/(n+1)^n$. Пусть $n=\overline{3,p-1}$. Так как [3] $|f_p(x)-L_{n-1}(x;f_p)|\leqslant M_n\,|\omega_n(x)|/n!$, где $M_n=\max\limits_{x\in[c,d]}|f_p^{(n)}(x)|$, то в силу леммы 2 $|u_p(n)|\leqslant(d-c)^n\,|c_p|\,M_n/(\gamma_n(n+1)^n)$. Оценим величину M_n в рассматриваемом случае. Так как $f_p^{(n)}(x)=p(p-1)\ldots(p-n+1)\,\gamma_nx^{p-n}-(p-1)(p-2)\ldots(p-n)\,x^{p-n-1}$, то $M_n\leqslant(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)\times\mu_ns^{p-n-1}$, где $\mu_n=\max\limits_{x\in[c,d]}|\,p\gamma_nx-(p-n)\,|$,

$$s=\begin{cases} d, & \text{если } d>1, \\ 1, & \text{если } d\leqslant 1. \end{cases}$$

В зависимости от величин коэффициентов $\mu_n=\max(|\,p\gamma_nc-(p-n)\,|,\ |\,p\gamma_nd-(p-n)\,|)$. Предположим, что $\mu_n=|\,p\gamma_nd-(p-n)\,|=p\gamma_n\,|\,d-(1-n/p)/\gamma_n\,|$. Отсюда следует что

$$M_n\leqslant p!\,\gamma_ns^{p-n}/(p-n)! \tag{21}$$

Аналогично получим оценку (21) и при другом возможном значении μ_n. Таким образом, $|u_p(n)|\leqslant(d-c)^n p!\,s^{p-n}/((n+1)^n(p-n)!)$.

Воспользовавшись известным неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, после некоторых преобразований получим, что при $n=\overline{3,p-1}$ $p!/((n+1)!\,(p-n)!)\leqslant(p/n)^n$. Исследовав функцию $\psi(x)=(p/x)^x$ на экстремум, делаем вывод, что $\max\psi(x)=e^{p/e}$. Учитывая это, получим оценку $|u_p(n)|\leqslant r^pe^{p/e}\,|c_p|$, где постоянная r определяется формулой (19).

Сравним ряд $\sum_{p=0}^{\infty}r^pe^{pe}\,|c_p|$ и сходящийся по условию леммы 3 ряд

$\sum_{p=0}^{\infty} |c_p| R^p$. Так как $\lim_{p\to\infty} r^p e^{p/c}/R^p = 0$, то в силу признака Вейерштрасса ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(n)$ сходится равномерно относительно n и лемма 3 доказана.

Используя леммы 1—3, докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть x^2-аналитическая функция $W(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, заданная в области D, такова, что интерполяционный процесс Лагранжа для функций действительного переменного $p(x)$ и $g(x)$ сходится и $g(x)$ раскладывается в ряд Тейлора с радиусом сходимости R, удовлетворяющем неравенству* (18). *Тогда интерполяционный процесс* (8), (9) *для функции $W(z)$ сходится в области D.*

Доказательство. Построим интерполяционный процесс (8), (9) для заданной x^2-аналитической функции комплексного переменного, удовлетворяющей условиям теоремы. Найдем, далее, $\lim_{n\to\infty} u_p(n)$ для различных фиксированных значений $p = 0, 1, 2, \ldots$: $u_0(n) = 0$, $u_2(n) = 0$ $\forall n = 3, 4, \ldots$, т. к. $D_0^{(n)} \equiv 0$, $D_2^{(n)} \equiv 0$. При любом фиксированном $p = 3, 4, 5, \ldots$ для всех $n > p$ $D_p^{(n)} = 0$, поэтому $\lim u_p(n) = 0$ $(p \neq 1)$. Найдем $\lim_{n\to\infty} u_1(n) = (-1)^{\gamma} c_1 \lim_{n\to\infty} y_n$, где γ — некоторое определенное натуральное число, $y_n = (d-c)^n n!/((n+1)^n d_n \gamma_n)$. Имеем $0 < y_n < (d-c)^n (n-1)!/(n+1) \times \left[\left(c + \frac{d-c}{n+1}\, 1\right)\left(c + \frac{d-c}{n+1}\, 2\right) \ldots \left(c + \frac{d-c}{n+1}\, n\right)\right]^{1-1/n}\Big) \leqslant (n!)^{1/n} (d-c)/(n(n+1))$. Так как $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} (d-c)/(n+1)^n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} u_1(n) = 0$.

Таким образом, каждая из функций $u_p(n)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, определена $\forall n = 3, 4, 5, \ldots$ и имеет при стремлении $n \to \infty$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} u_p(n)$. В силу леммы 3 ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(n)$ сходится равномерно в области $n = 3, 4, 5, \ldots$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} B(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_p(n)$. Используя леммы 1 и 2, неравенство (15), убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Теорема 2. *Если $p(x)$ и $g(x)$ целые функции, то интерполяционный процесс* (8), (9) *для x^2-аналитической функции комплексного переменного $W(z)$ сходится в области D.*

Теорема 2 — частный случай теоремы 1. Отметим, в заключение, что, например, набор x^2-аналитических функций $W(z) = a(C_1 \sin ax + C_2 \cos ax) \exp(ay)/x + i\,[(C_1 ax - C_2) \cos ax - (C_2 ax + C_1) \sin ax] \times \exp(ay)$, где C_1, C_2, a — произвольные постоянные, удовлетворяет условиям теоремы 2 и рассмотренный в статье интерполяционный процесс для них сходится в произвольной односвязной области, находящейся в правой полуплоскости.

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций.— Киев: Наук. думка, 1973.— 424 с.
2. *Макаров В. Л., Клунник А. А.* О единственности x^2-аналитической интерполяционной функции комплексного переменного.— Выч. и прикл. мат., 1981, вып. 44, с. 89—98.
3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. В 2-х томах. М.: Физматгиз, 1962,— Т. 1.— 464 с.
4. *Клуннік О. О. Копистира М. П.* Про обчислення деяких визначників типу Вандермонда.— Вісник Київського університету. Сер. мат. і мех., 1981, вип. 23, с. 58—62.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
25.12.81