УДК 517.5

Н. И. Нагнибида

Об условиях тривиальности одного класса операторов в аналитическом пространстве

Задача о нахождении условий тривиальности того или иного класса операторов (см., например, [1, 2]) представляется нам довольно интересной и ее решению в одном из случаев посвящена эта заметка.

Пусть A_R, $0 < R \leqslant \infty$,— пространство всех однозначных и аналитических в круге $\| z \| < R$ функций с топологией компактной сходимости, а $I\left((If)(z) = \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta \;\; \forall f \in A_R\right)$ — оператор интегрирования в нем. Через S_φ обозначим произвольный линейный непрерывный оператор, отображающий A_R в себя и коммутирующий с I. Тогда, как известно [3], где $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k \in A_R$, а под I^0 следует понимать оператор E тождественного преобразования, или же

$$(S_\varphi f)(z) = \varphi(0) f(z) + \int\limits_0^z \varphi'(z-\zeta) f(\zeta)\,d\zeta \quad \forall f \in A_R.$$

Класс всех таких операторов (операторов свертки!) в пространстве A_R будем обозначать через $S(A_R)$.

Наша задача — описать все линейные непрерывные отображения L пространства A_R (их совокупность обозначим через $\mathscr{R}(\varphi, \psi)$), удовлетворяющие уравнению

$$LS_\varphi = S_\psi L, \tag{1}$$

где S_φ, $S_\psi \in S(A_R)$, и указать условия, при которых класс $\mathscr{R}(\varphi, \psi)$ тривиален.

Аналогичная задача для дифференциальных операторов рассмотрена в [4], а при $S_\varphi = I_u$ и $S_\psi = I^m$ изучена автором в [5].

Воспользуемся работой [6], где показано, что если $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{\nu-1} = 0$, а $\varphi_\nu \neq 0$, то всегда существует такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение T пространства A_R на себя (т. е. изоморфизм), что $TS_\varphi = (\varphi_0 E + \nu!\,\varphi_\nu I^\nu)\,T$. Другими словами, при выполнении указанных условий операторы S_φ и $\varphi_0 E + \nu!\,\varphi_\nu I^\nu$ оказываются эквивалентными между собой.

Заметим, что решить поставленную задачу полностью удается именно благодаря этому результату. Этим и объясняется выбор пространства A_R (а не какого-нибудь другого!) в качестве исходного.

Будем предполагать, что такое число ν существует для каждого из операторов S_φ или S_ψ, фигурирующих в уравнении (1), ибо в противном случае условия тривиальности класса $\mathscr{R}(\varphi, \psi)$ находятся легко и мы их лишь потом сформулируем.

Итак, пусть операторы S_φ и S_ψ из $S(A_R)$ заданы, а L удовлетворяет соответствующему уравнению (1). Введем в рассмотрение такие изоморфизмы T_1 и T_2 пространства A_R на себя, а также числа n, $m \in \mathbf{N}$, что $\varphi_n \neq 0$, $\psi_m \neq 0$, $S_\varphi = T_1^{-1}(\varphi_0 E + n!\,\varphi_n I^n)\,T_1$ и $S_\psi = T_2^{-1}(\psi_0 E + m!\,\psi_m I^m)\,T_2$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде $LT_1^{-1}(\varphi_0 E + n!\,\varphi_n I^n)\,T_1 = T_2^{-1}(\psi_0 E + m!\,\psi_m I^m)\,T_2 L$ или же $B(\varphi_0 E + n!\,\varphi_n I^n) = (\psi_0 E + m!\psi_m I^m)\,B$, где $B = T_2 L T_1^{-1}$. Следовательно, нужно найти условия, при выполнении которых уравнению

$$B(\alpha E + \gamma I^n) = I^m B \tag{2}$$

(здесь $d = \varphi_0 - \psi_0/m!\,\psi_m$, а $\gamma = n!\,\varphi_n/m!\,\psi_m$) удовлетворяет лишь оператор, тождественно равный нулю.

Пусть $\alpha \neq 0$. Поскольку элементы матрицы $[a_{i,k}^{(s)}]_{i,k=0}^\infty$ оператора $I^s\,(s \in \mathbf{N})$ в степенном базисе пространства A_R $\left(\text{т. е. } I^s z^k = \sum_{i=0}^\infty a_{i,k}^{(s)} z^i \quad \forall k \geqslant 0\right)$ полностью определяются формулой

$$a_{i,k}^{(s)} = \begin{cases} k!/(k+s)!, & i = k+s; \\ 0, & i \neq k+s, \end{cases}$$

то (см. (2)) элементы $b_{i,k}$ матрицы оператора B в том же базисе необходимо связаны между собой соотношениями

$$\alpha b_{i,k} + \frac{\gamma k!}{(k+n)!}\,b_{i,k+n} = \delta(i-m)\,\frac{(i-m)!}{i!}\,b_{i-m,k} \quad \forall i,\ k \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

Из этих рекуррентных соотношений следует, например, что при всех i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, $b_{i,k+n} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{(k+n)!}{k!}\,b_{i,k}$ $\forall k \geqslant 0$ или же

$$b_{i,sn+q} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s \frac{(sn+q)!}{q!}\,b_{i,q} \quad \forall s \geqslant 0;\ 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{4}$$

Но так как мы ищем решения уравнения (2) в классе линейных непрерывных отображений пространства A_R в себя, то [7] для всякого ρ, $0 < \rho < R$, существуют такие r, $0 < r < R$, и C, $C \geqslant 0$, что $|b_{i,k}| \leqslant Cr^k/\rho^i$ $\forall i,\ k \geqslant 0$ и, в частности,

$$\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|^s \frac{(sn+q)!}{q!}\,|b_{i,q}| \leqslant C\,\frac{r^{sn+q}}{\rho^i},\quad 0 \leqslant i \leqslant m-1;\ 0 \leqslant q \leqslant n-1;\ s \geqslant 0. \tag{5}$$

Оценки (5) могут выполняться, очевидно, только в случае, когда $b_{i,q} = 0$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Следовательно, $b_{i,q} = 0$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant i \leqslant m-1$. С учетом этого, исходя из (3), аналогично проверяется, что также $b_{i,k} = 0$, $k \geqslant 0$; $m \leqslant i \leqslant 2m-1$. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что вообще $B = 0$.

Предположим, что $\alpha = 0$, и рассмотрим уравнение

$$\gamma B I^n = I^m B. \tag{6}$$

В этом случае из соответствующих (при $\alpha = 0$!) рекуррентных соотношений (3) получаем, что

$$b_{im+l,kn+q} = \begin{cases} 0, \ i < k, \\ \dfrac{(kn+q)!\,[(i-k)\,m+l]!}{q!\,(im+l)!}\,\dfrac{1}{\gamma^k}\,b_{(i-k)m+l,q}, \ i \geqslant k, \\ 0 \leqslant l \leqslant m-1; \ 0 \leqslant q \leqslant n-1. \end{cases} \tag{7}$$

Следовательно, элементы $b_{k,q}$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$, первых n столбцов матрицы искомого оператора B могут быть заданы, вообще говоря, произвольно. Нужно лишь беспокоиться о непрерывности B. А условие непрерывности оператора B в A_R равносильно [7] тому, что $\forall \rho < R \exists r < R$ и $C \geqslant 0$:

$$\frac{(kn+q)!\,[(i-k)\,m+l]!}{q!\,(im+l)!}\,\frac{1}{|\gamma|^k}\,|b_{(i-k)m+l,q}| \leqslant C\,\frac{r^{kn+q}}{\rho^{im+l}}, \ i \geqslant k; \ 0 \leqslant l \leqslant m-1;$$
$$0 \leqslant q \leqslant n-1,$$

или же

$$\frac{1}{|\gamma|^k}\,\frac{(kn+q)!\,(im+l)!}{q!\,[(i+k)\,m+l]!}\,|b_{im+l,q}| \leqslant C\,\frac{r^{kn+q}}{\rho^{(i+k)m+l}}, \ i, k \geqslant 0;$$
$$0 \leqslant l \leqslant m-1; \qquad 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{8}$$

Оказывается, условие (8) можно сформулировать и в более простой (эквивалентной ему!) форме. Для этого следует отдельно рассмотреть несколько различных ситуаций.

Пусть $m < n$. Тогда, извлекая из обеих частей неравенств (8) корень k-й степени (при любых допустимых для них фиксированных значениях i, l и q) и вычисляя затем верхний предел при $k \to \infty$, на основании формулы Стирлинга можно получить, что условие (8) выполняется тогда и только тогда, когда $b_{im+l,q} = 0$, $i \geqslant 0$; $0 \leqslant l \leqslant m-1$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$.
Здесь и в дальнейшем соответствующие вычисления будем, в основном, опускать из-за их громоздкости. Другими словами, при $m > n$ оператор B тождественно равен (см. (7)) нулю.

Предположим, что $m > n$. В этом случае условие (8) равносильно тому, что

$$b_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,q} t^k \in A_R, \ q = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Действительно, (9) следует из (8) при $k = 0$ даже для любых m и n. А чтобы из (9) получить (8), достаточно для выбранного ρ, $0 < \rho < R$, и произвольного фиксированного r, $0 < r < R$, воспользоваться оценками Коши $|b_{k,q}| \leqslant C_1/\rho_1^k$, $\rho < \rho_1 < R$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant \rho \leqslant n-1$, и тем, что величины $\dfrac{(kn+q)!\,(im+l)!}{[(k+i)\,m+l]!\,q!}$ при $k \to \infty$ равномерно по i, l и q стремятся к нулю очень быстро (во всяком случае, не медленнее, чем $k^{-k(m-n)}$).

Остается упростить условие (8) при $m = n$. При этом следует различать случаи $R = \infty$ и $R < \infty$. Если $R = \infty$, то (8) снова эквивалентно (9), ибо теперь для получения импликации (8) $\to$ (9) есть возможность увеличивать r.

Если же $R < \infty$, то при $b_{i_0m+l,q} \neq 0$ из (8) следует, что (кроме условия (9)) должно еще выполняться неравенство $|\gamma| \geqslant 1$. Эти два условия оказываются уже равносильными с (8).

Резюмируя, заключаем, что справедлива лемма.

Лемма. 1) *При* $m < n$ *условие* (8) *выполняется в том и только в том случае, когда* $b_{k,q} = 0$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$.

2) *если* $m \geqslant n$ *и среди чисел* $b_{k,q}$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$, *есть не равные нулю, то условие* (8) *равносильно условию* (9) *с дополнительным требованием при* $m = n$ *и* $R < \infty$ *выполнения неравенства* $|\gamma| \geqslant 1$.

Заметим, что все линейные непрерывные в A_R операторы B ($B \neq 0$!), удовлетворяющие уравнению (6), могут быть получены (с небольшими видоизменениями соответствующих рассуждений из [5]) по формуле

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{k!}{q!} b_{k,q} I^{k-q} Z_n^m(\gamma) P_q^{(n)}, \tag{10}$$

где $(P_q^{(n)} f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-qj} f(\omega^j z)$, $\omega = \exp \frac{2\pi i}{n}$, $Z_n^m(\gamma) z^{ln+q} \frac{(ln+q)!}{(lm+q)!} \times \frac{z^{lm+q}}{\gamma^l}$, $l \geqslant 0$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$, и при $k < q$ $I^{k-q} = \frac{d^{q-k}}{dz^{q-k}}$.

Все изложенное выше позволяет сформулировать основное утверждение.

Теорема. *Пусть* φ *и* ψ — *произвольные фиксированные и отличные от тождественного нуля функции пространства* A_R ($0 < R \leqslant \infty$), *а* S_φ *и* S_ψ — *порожденные ими соответственно операторы свертки в* A_R $\left(\text{т. е. } S_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) I^k \text{ и } S_\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)}(0) I^k\right)$. *Для того чтобы класс решений уравнения* $LS_\varphi = S_\psi L$ *в множестве всех линейных непрерывных отображений пространства* A_R *в себя был тривиальным, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:* 1) $\varphi(z) \equiv \varphi(0)$ *и либо* $\psi(z) \not\equiv \psi(0)$, *либо* $\psi(z) \equiv \psi(0)$, *но* $\varphi(0) \neq \psi(0)$; 2) $\psi(z) \equiv \psi(0)$ *и* $\varphi(0) \neq \psi(0)$; 3) $\varphi(z) \not\equiv \varphi(0)$, $\psi(z) \not\equiv \psi(0)$ *и* а) $\varphi(0) \neq \psi(0)$; б) $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(0) = \psi'(0) = \ldots = \psi^{(m-1)}(0) = 0$, *а* $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$, $\psi^{(m)}(0) \neq 0$ *и* $m < n$; в) $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(0) = \psi'(0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(0) = 0$, $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$, $\psi^{(n)}(0) \neq 0$ *и при* $R < \infty$ $|\varphi^{(n)}(0)| < |\psi^{(n)}(0)|$.

Отметим, что в случае невыполнения условий этой теоремы нетривиальное решение уравнения (1) всегда можно построить с использованием упомянутых выше изоморфизмов T_1 и T_2, а также операторов вида (10). В этой заметке все они фактически найдены (о построении T_1 и T_2 см. в [6]).

В заключение укажем, что полученное утверждение может быть использовано для нахождения условий тривиальности множества решений некоторых конкретных уравнений. Например, если оператор L, удовлетворяющий уравнению (1), искать в виде $(Lf)(z) = \int_0^z k(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta$, где $k(z, \zeta)$ — функция, аналитическая в бицилиндре $\{|z| < R, |\zeta| < R\}$, то при выполнении одного из условий теоремы из соотношения

$$[\varphi(0) - \psi(0)]\, k(z, t) + \int_t^z k(z, \zeta)\, \varphi(\zeta - t)\, d\zeta = \int_t^z \psi(z - \zeta)\, k(\zeta, t)\, d\zeta$$

(справедливого для произвольных z, $|z| < R$, и t, принадлежащего отрезку с концами в точках 0 и z) вытекает $k(z, \zeta) \equiv 0$. Это — обобщение на случай двух переменных известного утверждения о том, что если $\alpha \neq 0$ или же $\alpha = 0$, но $\beta(z) \not\equiv 0$, то уравнение $\alpha x(z) + \int_0^z \beta(z - t)\, x(t)\, dt = 0$ имеет в пространстве A_R только тривиальное решение.

1. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе линейных операторов.— Годишник на висшите технически заведения. Сер. Математика, 1973, **9**, № 3, с. 23—33.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе линейных операторов, определенных на пространстве функций, аналитических в конечно-связной области.— В кн.: Plovdiv : Natura, 1974, 7, № 1, с· 29—32.
3. *Нагнибида Н. И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве.— Сиб. матем. журн., 1966, **7**, № 6, с. 1306—1318.
4. *Подпорин В. П.* О решениях операторного уравнения $P_1(D)A = AP_2(D)$ в некоторых классах линейных операторов.— Докл. АН СССР, 1978, **240**, N 1, с. 28—31.
5. *Нагнибіда М. І.* Про неперервні розв'язки деяких операторних рівнянь в аналітичних просторах, Доп. АН УРСР. Сер. А. 1972, № 12, с. 1082—1085.
6. *Нагнибида Н. И.* К вопросу о приведении операторов Вольтерра в аналитических пространствах к простейшему виду.— Матем. заметки, 1975, **17**, № 4, с. 625—630.
7. *Хапланов М. Г.* Линейные преобразования аналитических пространств.— Докл. СССР, 1951, 80, № 1, с. 21—24.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
28.09.81