УДК 531.39, 517.977

А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОЦЕНКА МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА

We consider a dynamical system with distributed parameters for the description of controlled vibrations of the Kirchhoff plate without polar moment of inertia. A class of optimal controls corresponding to finite-dimensional approximations is used to study the reachable set. Analytic estimates of the norm of these control functions are obtained depending on the boundary conditions. These estimates are used to study the reachable set for the infinite-dimensional system. For a model with incommensurable frequencies, an estimate of the reachable set is obtained under the condition of power decay of the amplitudes of generalized coordinates.

Розглянуто динамічну систему з розподіленими параметрами, яка описує керовані коливання моделі пластини Кірхгофа без урахування полярного моменту інерції обертання її перетину. Для дослідження множини досяжності використано клас оптимальних керувань, що відповідають скінченновимірним апроксимаціям системи. Побудовано аналітичну оцінку норми функцій керування в залежності від крайових умов. За допомогою таких оцінок проведено аналіз множини досяжності нескінченновимірної системи. Для випадку моделі з непорівнянними частотами наведено оцінку множини досяжності з умовою степеневого спадання амплітуд узагальнених координат.

1. Введение. Современный технический прогресс стимулирует развитие методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. В частности, новые алгоритмы управления космическими аппаратами должны обеспечивать стабилизацию не только твердых, но и упругих элементов конструкции [1]. Поэтому актуальными являются вопросы моделирования и синтеза систем управления упругими панелями, которые соединены с твердым телом [2].

При исследовании колебаний пластин наиболее принятой для теоретических исследований является модель Кирхгофа [3 – 5]. Вопросам управления моделью пластины Кирхгофа посвящен ряд работ. В статье [6] изучена билинейная задача оптимального управления для уравнения пластины Кирхгофа, которая закреплена на части границы области. При этом предполагается, что распределенная сила управления пропорциональна поперечной компоненте скорости пластины в каждой точке области. В работе [7] рассмотрена задача активного управления с несколькими временными задержками для уравнения свободных колебаний прямоугольной пластины.

В монографии [8] рассмотрены линейные многомерные колебательные системы в блочной форме, для которых представлен обобщенный метод модального управления, в том числе при ограничениях на значения управления. Задача управляемости для класса линейных бесконечномерных систем с одномерным управлением исследована в статье [9]. В цитируемой работе получены необходимые и достаточные условия точной, приближенной и нуль-управляемости таких систем.

В работах [10, 11] рассматривалась модель пластины Кирхгофа, которая прикреплена к твердому вращающемуся телу. Для такой модели пластины была исследована система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания с конечным числом степеней свободы.

Целью данной работы является исследование множества достижимости бесконечномерной динамической системы с несоизмеримыми частотами при использовании функций управления специального вида.

2. Описание модели. В работе [10] была представлена математическая модель малых колебаний упругой пластины Кирхгофа, которая шарнирно прикреплена на границе к твердому телу. Уравнения движения рассматриваемой системы при управлении вращением твердого тела относительно фиксированной оси могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{x}_{kj}(t) = A_{kj}x_{kj}(t) + B_{kj}u(t), \tag{1}$$

где $x_{kj}(t) = \begin{pmatrix} \xi_{kj}(t) \\ \eta_{kj}(t) \end{pmatrix}$, $A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}$, $B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{kj} \end{pmatrix}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

Величины $\xi_{kj}(t)$ и $\eta_{kj}(t)$ представляют соответственно модальную координату и скорость для моды колебаний с индексами (k,j). Управление $u(t)$ соответствует угловому ускорению тела-носителя.

Коэффициенты уравнений (1) задаются через параметры упругой пластины следующим образом:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right),$$

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k - \text{четное}, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k - \text{нечетное}, \quad j - \text{четное}, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj}, & k - \text{нечетное}, \quad j - \text{нечетное}, \end{cases} \qquad k, j \in \mathbb{N}^2.$$

Здесь α, l_1, l_2, a_2 — положительные константы, физический смысл которых описан в [10]. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $2a_2 \neq l_2$.

Введем комплексные переменные:

$$z_{kj} = \xi_{kj} + i\eta_{kj},$$

$$\bar{z}_{kj} = \xi_{kj} - i\eta_{kj}.$$

Тогда система (1) в переменных z_{kj}, $\bar{z}_{kj}$ примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_{kj} &= -iz_{kj}\beta_{kj} + i\varphi_{kj}u(t), \\ \dot{\bar{z}}_{kj} &= i\bar{z}_{kj}\beta_{kj} - i\varphi_{kj}u(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что поскольку $\varphi_{kj} = 0$ для четных индексов k, система (1) имеет неуправляемое подпространство, соответствующее модам (ξ_{kj}, η_{kj}) с $(k,j) \in S$, где

$$S = \big\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \colon k - \text{четное}\big\}.$$

В дальнейшем рассмотрим подсистему системы (1) для индексов $\mathbb{N}^2 \setminus S$. Пусть задано взаимно однозначное отображение $n \longmapsto (k_n, j_n)$, согласно которому индексу $n \in \mathbb{N}$ соответствует пара индексов $(k_n, j_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus S$. Обозначим

$$\omega_n = \beta_{k_n j_n} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k_n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_n}{l_2}\right)^2\right), \tag{3}$$

$$B_n = \varphi_{k_n j_n} = \begin{cases} \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n \text{ — нечетное}, \quad j_n \text{ — четное}, \\ \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n \text{ — нечетное}, \quad j_n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{4}$$

$$q_n = z_{k_n j_n}, \qquad q_{-n} = \bar{z}_{k_n j_n},$$

и запишем систему (2) в операторном виде

$$\dot{q} = Aq + Bu, \qquad q \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^1, \tag{5}$$

где

$$q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ q_{-2} \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2, \qquad A = i\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad B = i\begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ B_{-2} \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\omega_n = \beta_{k_n j_n}, \qquad B_n = \varphi_{k_n j_n}, \qquad B_{-n} = -\varphi_{k_n j_n}.$$

Система (5) рассматривается в гильбертовом пространстве ℓ^2 с нормой

$$\|q\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|q_n|^2 + |q_{-n}|^2\right)\right)^{1/2}.$$

Оператор $A\colon D(A) \longrightarrow \ell^2$ является инфинитезимальным генератором C_0-полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ в ℓ^2 на основании теоремы Хилле – Иосиды [12, с. 8].

Таким образом, для любых $q^0 \in \ell^2$, $\tau > 0$, $u \in L^2(0,\tau)$ существует единственное обобщенное решение $q(t, q^0, u)$ уравнения (5) с $u = u(t)$, $t \in [0,\tau]$, удовлетворяющее начальному условию $q|_{t=0} = q^0$. Указанное решение можно задать формулой [12, с. 184]

$$q(t; q^0, u) = e^{tA}q^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Рассмотрим множества достижимости [13]:

$$R_\tau(q^0) = \left\{q^1 \in \ell^2 : q^1 = q(\tau; q^0, u) \text{ при } u \in L^2(0,\tau)\right\},$$

$$R(q^0) = \bigcup_{\tau\geq 0} R_\tau(q^0).$$

Напомним, что система (5) приближенно управляема, если $\overline{R(q^0)} = \ell^2$ для всех $q^0 \in \ell^2$. Стандартным приемом исследования приближенной управляемости системы вида (5) является критерий N. Levan, L. Rigby [14], который сводится к анализу инвариантных подпространств сопряженной полугруппы $\{e^{tA^*}\}_{t\geq 0}$ в ядре B^*. Однако непосредственное применение такого подхода не позволяет провести оценку множеств достижимости $R_\tau(q^0)$ и построить функции управления, обеспечивающие решение двухточечной задачи для заданных краевых условий.

В данной работе для оценки множества достижимости $R_\tau(q^0)$ системы (5) будет использовано семейство функций, соответствующее конечномерным задачам оптимального управления.

Наряду с системой (5) рассмотрим ее конечномерную подсистему, соответствующую координатам q_{-n}, q_n, $n = \overline{1, N}$, для фиксированного целого числа $N \geq 1$:

$$\dot{\tilde{q}}_N = A_N \tilde{q}_N + B_N u, \tag{6}$$

$$A_N = i \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega_N \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q}_N = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \end{pmatrix}, \qquad B_N = i \begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{-N} \\ B_N \end{pmatrix}.$$

В работе [11] получено оптимальное управление для конечномерной системы вида (2) с квадратичным функционалом качества. Результат работы [11] можно сформулировать для системы (6) с комплексными переменными следующим образом.

Лемма 1. *Пусть $\omega_j \neq \omega_k$ для всех $1 \leq j \leq k \leq N$. Рассмотрим задачу оптимального управления*

$$\dot{\tilde{q}}_N = A_N \tilde{q}_N + B_N u, \quad t \in [0, \tau], \tag{7}$$

$$J = \int\limits_0^\tau |u(t)|^2 dt \longrightarrow \min, \tag{8}$$

$$\tilde{q}_N^0 = \tilde{q}_N(0) = \begin{pmatrix} q_{-1}^0 \\ q_1^0 \\ \vdots \\ q_{-N}^0 \\ q_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \qquad \tilde{q}_N^1 = \tilde{q}_N(\tau) = \begin{pmatrix} q_{-1}^1 \\ q_1^1 \\ \vdots \\ q_{-N}^1 \\ q_N^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \tag{9}$$

$$q_n^0 = \overline{q_{-n}^0}, \qquad q_n^1 = \overline{q_{-n}^1}, \qquad n = \overline{1, N}.$$

Оптимальное управление для данной задачи имеет вид

$$\hat{u}_N(t) = \big(B_1 e^{i\omega_1 t}, B_{-1} e^{-i\omega_1 t}, \dots, B_N e^{i\omega_N t}, B_{-N} e^{-i\omega_N t}\big)\nu,$$

где

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_{-1}} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{B_N} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{B_{-N}} \end{pmatrix} K^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{-1}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{B_{-N}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{B_N} \end{pmatrix} \left(e^{-i\omega_N \tau} \tilde{q}_N^1 - \tilde{q}_N^0 \right), \tag{10}$$

$$K = (K_{jk})_{j,k=1}^N, \qquad K_{jj} = \begin{pmatrix} \tau & \dfrac{i\left(e^{-2i\omega_j \tau} - 1\right)}{2\omega_j} \\ \dfrac{i\left(1 - e^{2i\omega_j \tau}\right)}{2\omega_j} & \tau \end{pmatrix},$$

$$K_{jk} = i \begin{pmatrix} \dfrac{1 - e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}}{\omega_k - \omega_j} & \dfrac{e^{-i(\omega_k + \omega_j)\tau} - 1}{\omega_k + \omega_j} \\ \dfrac{1 - e^{i(\omega_k + \omega_j)\tau}}{\omega_k + \omega_j} & \dfrac{1 - e^{i(\omega_j - \omega_k)\tau}}{\omega_j - \omega_k} \end{pmatrix}, \quad j \neq k.$$

Для исследования множества достижимости бесконечномерной системы (5) напомним [15], что комплексное или действительное число χ называется алгебраическим числом, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, неравными одновременно нулю.

Число n^* называется степенью алгебраического числа χ, если χ есть корень некоторого многочлена степени n^* с целыми коэффициентами и не существует тождественно неравного нулю многочлена с целыми коэффициентами степени, меньшей чем n^*, корнем которого являлось бы число χ.

Сформулируем основной результат данной работы об оценке состояний $q^1 \in \ell^2$ системы (5), которые приближенно достижимы из точки $q^0 = 0 \in \ell^2$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (5) *выполнены условия*:

1) $B_n \neq 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$;

2) $\chi = \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$ *— алгебраическое число степени* $n^* \geq 2$;

3) *координаты вектора* $q^1 = \begin{pmatrix} q^1_{-1} \\ q^1_1 \\ q^1_{-2} \\ q^1_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2$ *удовлетворяют условиям*

$$q^1_{-n} = \overline{q^1_n}, \qquad |q^1_n| = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right), \quad \gamma > \frac{3}{2}n^* + 1,$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдутся такие числа* $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ *и* $N(\varepsilon) \geq 1$, *что*

$$\left\| q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1 \right\|_{\ell^2} < \varepsilon, \tag{11}$$

где $\hat{u}_N(t)$ — *оптимальное управление для задачи* (7) – (9), *которое имеет вид*

$$\hat{u}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} + B_{-n}e^{-i\omega_n t}\nu_n), \quad t \in [0; \tau].$$

Доказательство. Поскольку в условиях теоремы χ — иррациональное число, из представления (3) вытекает свойство $\omega_j \neq \omega_k$ для всех $j \neq k$. Следуя идее работы [16], оценим величину (11) при использовании управлений вида $u = \hat{u}_N(t)$ из леммы 1.

Введем операторы проектирования $Q_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ и $P_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ следующим образом:

$$P_N : q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \\ q_{-N-1} \\ q_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad Q_N = I - P_N.$$

Тогда

$$\left\| q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1 \right\|_{\ell^2} = \left\| Q_N q(\tau; 0, \hat{u}_N) - Q_N q^1 \right\| \leq$$

$$\leq \left\| Q_N q^1 \right\| + \left\| \int\limits_0^\tau Q_N e^{(\tau - s)A} B \hat{u}_N(s) ds \right\|.$$

Поскольку операторы e^{tA} и Q_N коммутируют, применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\left\| q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1 \right\|_{\ell^2} \leq \left\| Q_N q^1 \right\| + \sup_{t \in [0, \tau]} \|e^{tA}\| \, \|Q_N B\| \int\limits_0^\tau |\hat{u}_N(s)| ds \leq$$

$$\leq \left\|Q_N q^1\right\| + \sqrt{\tau}\|Q_N B\| \sup_{t\in[0,\tau]} \|e^{tA}\| \, \|\hat{u}_N\|_{L^2(0,\tau)}.$$

Очевидно, что норма оператора $e^{tA}: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ равна 1.

Таким образом, для доказательства теоремы покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и вектора q^1 найдутся такие числа $\tau > 0$ и N, что

$$\left\|Q_N q^1\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

$$r_N = \tau\|Q_N B\|^2 \|\hat{u}_N\|^2_{L^2(0;\tau)} < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{13}$$

Неравенство (12) следует из того факта, что

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \left\|Q_N q^1\right\|^2 = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|q^1_{-n}|^2 + |q^1_n|^2\right) = 0$$

для любого элемента $q^1 \in \ell^2$.

Для доказательства неравенства (13) найдем значение нормы оптимального управления:

$$\left\|\hat{u}_N(t)\right\|^2_{L^2(0,\tau)} = \int\limits_0^\tau \left|\hat{u}_N(t)\right|^2 dt = \int\limits_0^\tau \hat{u}_N(t)\overline{\hat{u}_N(t)} dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \left(\sum_{n=1}^N B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} + B_{-n} e^{-i\omega_n t}\nu_n\right)\left(\sum_{n'=1}^N \bar{B}_{n'} e^{i\omega_{n'} t}\bar{\nu}_{-n'} + \bar{B}_{-n'} e^{-i\omega_{n'} t}\bar{\nu}_{n'}\right) dt =$$

$$= \sum_{n=1}^N B_n\bar{B}_n \nu_{-n}\bar{\nu}_{-n}\tau + \sum_{n=1}^N B_n\bar{B}_{-n}\nu_{-n}\bar{\nu}_n \frac{i(1 - e^{2i\omega_n\tau})}{2\omega_n} + \sum_{n=1}^N B_{-n}\bar{B}_n \nu_n\bar{\nu}_{-n} \frac{i(e^{-2i\omega_n\tau} - 1)}{2\omega_n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^N B_{-n}\bar{B}_{-n}\nu_n\bar{\nu}_n\tau + \sum_{n=1}^N\sum_{n'=1}^N B_n\bar{B}_{n'}\nu_{-n}\bar{\nu}_{-n'} \frac{i(1 - e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau})}{\omega_n - \omega_{n'}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^N\sum_{n'=1}^N B_n\bar{B}_{-n'}\nu_{-n}\bar{\nu}_{n'} \frac{i(1 - e^{i(\omega_n + \omega_{n'})\tau})}{\omega_n + \omega_{n'}} + \sum_{n=1}^N\sum_{n'=1}^N B_{-n}\bar{B}_{n'}\nu_n\bar{\nu}_{-n'} \frac{i(e^{-i(\omega_n + \omega_{n'})\tau} - 1)}{\omega_n + \omega_{n'}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^N\sum_{n'=1}^N B_{-n}\bar{B}_{-n'}\nu_n\bar{\nu}_{n'} \frac{i(e^{i(\omega_{n'} - \omega_n)\tau} - 1)}{\omega_n - \omega_{n'}}.$$

Оценим $\left\|\hat{u}_N(t)\right\|^2_{L^2(0,\tau)}$ с использованием неравенства треугольника и неравенства Гельдера:

$$\left\|\hat{u}_N(t)\right\|^2_{L^2(0,\tau)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|^2 |\nu_n|^2 \left(2|\tau| + \frac{2}{|\omega_n|}\right) + \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} |B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}| \left(\frac{4}{|\omega_n - \omega_{n'}|} + \frac{4}{|\omega_n + \omega_{n'}|}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|^2 |\nu_n|^2 \left(2|\tau| + \max_{n,n'\leq N} \frac{2}{|\omega_n|}\right) + \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} |B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}| \times$$

$$\times \left(\max_{n,n'\leq N} \frac{4}{|\omega_n - \omega_{n'}|} + \max_{n,n'\leq N} \frac{4}{|\omega_n + \omega_{n'}|}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|^2 |\nu_n|^2 \left(2|\tau| + \frac{2}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n|}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} |B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}| \left(\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n - \omega_{n'}|} + \frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n + \omega_{n'}|}\right) \leq$$

$$\leq \max_{n,n'\leq N} \left\{ \left(2|\tau| + \frac{2}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n|}\right), \left(\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n - \omega_{n'}|} + \frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n + \omega_{n'}|}\right) \right\} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} \left|B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}\right| \leq$$

$$\leq \max_{n,n'\leq N} \left\{ \left(2\tau + \frac{2}{\omega_1}\right), \left(\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n - \omega_{n'}|} + \frac{4}{\omega_1 + \omega_2}\right) \right\} \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} \left|B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}\right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n - \omega_{n'}|} \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} |B_n B_{n'} \nu_n \nu_{n'}|. \tag{14}$$

Введем переобозначения

$$\tilde{\nu}_n = \nu_n B_{-n}, \qquad \tilde{\nu}_{-n} = \nu_{-n} B_n, \qquad \frac{2}{\min\limits_{n,n'\leq N} |\omega_n - \omega_{n'}|} = H(N),$$

тогда оценка (14) примет вид

$$\left\|\hat{u}_N(t)\right\|^2_{L^2(0,\tau)} \leq 2H(N) \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n\neq n'}}^{N} |\tilde{\nu}_n \tilde{\nu}_{n'}| = 2H(N) \sum_{n'=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} |\tilde{\nu}_n||\tilde{\nu}_{n'}|\right) \leq$$

$$\leq 2H(N)\sum_{n'=1}^{N}\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n}|^2}\right)=H(N)\sqrt{2N}\|\tilde{\nu}\|_2\sum_{n'=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|\leq$$

$$\leq H(N)\sqrt{2N}\|\tilde{\nu}\|_2\sqrt{\sum_{n'=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|^2}\sqrt{\sum_{n'=1}^{N}1^2}=H(N)N\|\tilde{\nu}\|_2^2. \tag{15}$$

Здесь $\|\tilde{\nu}\|_2=\sum_{n=1}^{N}\left(|\tilde{\nu}_n|^2+|\tilde{\nu}_{-n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ обозначает евклидову норму вектора $\tilde{\nu}$.

Согласно лемме 1,

$$\tilde{\nu}=K^{-1}y, \tag{16}$$

где $\tilde{\nu}=\begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{-1}\\ \tilde{\nu}_1\\ \vdots\\ \tilde{\nu}_{-N}\\ \tilde{\nu}_N\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}\frac{1}{B_{-1}} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{B_1} & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_{-N}} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B_N}\end{pmatrix}(e^{-i\omega_N\tau}\tilde{q}_N^1-\tilde{q}_N^0)$.

Оценим норму $\tilde{\nu}$. Для этого представим матрицу K в виде $K=\tau I+C$ и рассмотрим C как линейный оператор из пространства $\mathbb{C}^{2N}$ с нормой $\|\cdot\|_1$ в $\mathbb{C}^{2N}$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$:

$$C\colon\ \left(\mathbb{C}^{2N},\|\cdot\|_1\right)\longrightarrow\left(\mathbb{C}^{2N},\|\cdot\|_\infty\right),$$

где $\|y\|_1=\sum_{n=1}^{N}\left(|y_n|+|y_{-n}|\right)$, $\|y\|_\infty=\max\limits_{1\leq|n|\leq N}|y_n|$.

Запишем (16) в виде

$$K\tilde{\nu}=(\tau I+C)\tilde{\nu}=y,\qquad \tilde{\nu}=\frac{y}{\tau}-\frac{C\tilde{\nu}}{\tau},$$

откуда

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty\leq\frac{1}{\tau}\left(\|y\|_\infty+\|C\tilde{\nu}\|_\infty\right)\leq\frac{1}{\tau}\left(\|y\|_\infty+\|C\|\|\tilde{\nu}\|_1\right),$$

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty\left(1-\frac{\|C\|}{\tau}\right)\leq\frac{1}{\tau}\|y\|_\infty,$$

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty\leq\frac{\|y\|_\infty}{\tau-\|C\|}\qquad\text{при условии}\quad\|C\|<\tau. \tag{17}$$

Оценим $\|C\|$:

$$\|C\|\leq\max_{1\leq n\leq N}\left\{\max_{1\leq m\leq N}|C_{nm}|\right\}=\max_{1\leq n\leq N}\left\{\left|\frac{i(e^{-2i\omega_n\tau}-1)}{2\omega_n}\right|,\left|\frac{i(1-e^{2i\omega_n\tau})}{2\omega_n}\right|,\right.$$

$$\left.\max_{1\leq m\leq N}\left\{\frac{2}{|\omega_m-\omega_n|},\frac{2}{|\omega_m+\omega_n|}\right\}\right\}\leq\max_{1\leq n\leq N}\left\{\frac{1}{|\omega_n|},\max_{1\leq m\leq N}\left\{\frac{2}{|\omega_m-\omega_n|},\frac{2}{|\omega_m+\omega_n|}\right\}\right\}. \tag{18}$$

Из формулы (3) получаем

$$\omega_n = \beta_{j_n k_n} = \alpha\left(\left(\frac{\pi j_n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_n}{l_2}\right)^2\right), \qquad \omega_m = \beta_{j_m k_m} = \alpha\left(\left(\frac{\pi j_m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_m}{l_2}\right)^2\right).$$

Из ограничений $1 \le n \le N$ и $1 \le m \le N$ следуют неравенства вида $1 \le j_m,\ k_m, j_n, k_n \le$ $\le M(N)$ для некоторого целого числа $M(N)$,

$$M(N) = O(\sqrt{N}) \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty. \tag{19}$$

Тогда можно оценить выражение (18) следующим образом:

$$\|C\| \le \max_{j_n,k_n \le M}\left\{\frac{1}{\beta_{j_n k_n}}, \max_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n)\\ j_n,k_n\le M}}\left\{\frac{2}{|\beta_{j_n k_n} + \beta_{j_m k_m}|}, \frac{2}{|\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}|}\right\}\right\} \le$$

$$\le \max_{j_n,k_n \le M}\left\{\frac{1}{\min\limits_{j_n,k_n\le M}\beta_{j_n k_n}}, \frac{2}{\min\limits_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n)\\ j_n,k_n,j_m,k_m\le M}}|\beta_{j_n k_n} + \beta_{j_m k_m}|}, \frac{2}{\min\limits_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n)\\ j_n,k_n,j_m,k_m\le M}}|\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}|}\right\}.$$

Положим $j_n = p$, $k_n = c$, $j_m = m$, $k_m = s$, $\chi = \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$, тогда

$$\min_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n)\\ j_n,k_n,j_m,k_m\le M}}|\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}| = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\min_{\substack{(p,c)\neq(m,s)\\ p,c,m,s\le M}}|\chi p^2 + c^2 - \chi m^2 - s^2|.$$

Поскольку χ — иррациональное алгебраическое число степени $n^* \ge 2$, по теореме Лиувилля получаем

$$\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\min_{\substack{(p,c)\neq(m,s)\\ p,c,m,s\le M}}|\chi p^2 + c^2 - \chi m^2 - s^2| \ge \min_{\substack{p\neq m\\ p,m\le M}}\frac{\alpha\pi^2 R}{l_2^2|p^2-m^2|^{n^*-1}} \ge \frac{\alpha\pi^2 R}{l_2^2(M^2(N)-1)^{n^*-1}},$$

где R — положительная константа, зависящая только от χ и выражаемая в явном виде через сопряженные с χ величины [15].

Следовательно,

$$\|C\| \le \frac{l_2^2(M^2(N)-1)^{n^*-1}}{\alpha\pi^2 R}.$$

Таким образом, из формул (15), (17) и (19) следует, что

$$\big\|\hat{u}_N(t)\big\|^2_{L^2(0,\tau)} \le NH(N)\|y\|_2^2 \qquad \text{при} \quad \tau > \frac{l_2^2\big(M^2(N)-1\big)^{n^*-1}}{\alpha\pi^2 R} = O(N^{n^*-1}). \tag{20}$$

Оценим евклидову норму вектора y:

$$\|y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N}\left(|y_{-n}|^2 + |y_n|^2\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{|e^{-i\omega_n\tau}q_n^1 - q_n^0|^2 + |e^{i\omega_n\tau}q_{-n}^1 - q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2} \le$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{N}\frac{|e^{-i\omega_n\tau}q_n^1|^2+|e^{i\omega_n\tau}q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2}\leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2}.$$

Подставим полученное выражение в левую часть формулы (13):

$$r_N\leq\frac{4N\tau}{\min\limits_{\substack{1\leq n<\\<n'\leq N}}|\omega_n-\omega_{n'}|}\sum_{n=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|B_{-n}|^2+|B_n|^2\right). \qquad (21)$$

Зададим отображение $n\longmapsto(p,c)$, $n'\longmapsto(k,s)$, ставящее в соответствие индексам $n\in\mathbb{N}$ и $n'\in\mathbb{N}$ пары индексов (p,c), (k,s). Согласно введенным обозначениям,

$$B_n=i\varphi_{pc},\qquad \omega_n=\beta_{pc},\qquad \omega_{n'}=\beta_{ks},$$

где $\beta_{pc}=\alpha\left(\left(\dfrac{\pi p}{l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi c}{l_2}\right)^2\right)$, $\beta_{ks}=\alpha\left(\left(\dfrac{\pi k}{l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi s}{l_2}\right)^2\right)$.

Тогда формула (21) примет вид

$$r_N\leq\frac{8N\tau}{\min\limits_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\p,c,k,s\leq N}}|\beta_{pc}-\beta_{ks}|}\sum_{p,c=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|i\varphi_{pc}|^2}\sum_{p,c=N+1}^{\infty}|i\varphi_{pc}|^2. \qquad (22)$$

Пусть

$$q_n^0=0,\qquad q_{-n}^0=0,\qquad |q_n^1|=|q_{-n}^1|=O\left(\frac{1}{p^\gamma}+\frac{1}{c^\gamma}\right).$$

С учетом обозначений (4) для φ_{pc} из формулы (22) следует представление

$$r_N=O\left(\frac{N\tau}{\min\limits_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\p,c,k,s\leq N}}\left|\dfrac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right|}\sum_{p,c=1}^{N}\frac{(c^\gamma+p^\gamma)^2}{(pc)^{2\gamma-2}}\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right) \qquad (23)$$

при $N\longrightarrow\infty$.

Оценим выражение

$$\min\limits_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\p,c,k,s\leq N}}\left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right|.$$

Пусть $\chi=\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2>0$,

$$1-N^2\leq c^2-s^2=(c-s)(c+s)=mq\leq N^2-1,$$

$$1-N^2 \le p^2-k^2=(p-k)(p+k)=m'q' \le N^2-1.$$

Тогда получим

$$\min_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\ p,c,k,s\le N}} \left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right| = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2} \min_{\substack{|mq|\le N^2-1\\ |m'q'|\le N^2-1}} |mq+\chi m'q'|.$$

Если χ — иррациональное алгебраическое число степени $n^*\ge 2$, то по теореме Лиувилля

$$|mq+\chi m'q'| = |m'q'|\left|\chi+\frac{mq}{m'q'}\right| > \frac{C|m'q'|}{|m'q'|^{n^*}} = \frac{C}{|m'q'|^{n^*-1}},$$

где C — положительная константа, зависящая только от χ и выражаемая в явном виде через сопряженные с χ величины.

Если $1\le c\le N$, $1\le s\le N$, $1\le p\le N$, $1\le k\le N$, то

$$\inf_{\substack{(m,m')\neq(0,0)\\ 2\le q\le 2N\\ 2\le q'\le 2N}} |mq+\chi m'q'| > \inf\frac{C}{|m'q'|^{n^*-1}} = \frac{C}{\sup|m'q'|^{n^*-1}} = \frac{C}{(2N(N-1))^{n^*-1}}.$$

Тогда

$$\min_{\substack{1\le(p,c)\le\\ \le(k,s)\le N}} \left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right| = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\frac{C}{(2N(N-1))^{n^*-1}}. \tag{24}$$

Подставим (24) в (23):

$$r_N = O\left(\tau N(2N(N-1))^{n^*-1}\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right). \tag{25}$$

Выполним в (25) эквивалентную замену

$$r_N = O\left(\tau N^{2n^*-1}\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right). \tag{26}$$

Применим интегральный признак сравнения для оценки сумм в (26):

$$\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2 \le \int_0^N p^{2-2\gamma}dp\int_1^{N+1}c^2dc + 2\int_0^N p^{2-\gamma}dp\int_0^N c^{2-\gamma}dc+$$

$$+\int_1^{N+1}p^2dp\int_0^N c^{2-2\gamma}dc = \frac{2N^{6-2\gamma}}{(3-\gamma)^2} + \frac{2N^{3-2\gamma}\left((N+1)^3-1\right)}{9-6\gamma}$$

при $\gamma\neq 3$ и $\gamma\neq\dfrac{3}{2}$,

$$\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2} \leq \int\limits_{N}^{\infty}dp\int\limits_{N}^{\infty}(pc)^{-2}dc = \int\limits_{N}^{\infty}p^{-2}dp\int\limits_{N}^{\infty}c^{-2}dc = \frac{1}{N^2}.$$

Подставим значения интегралов в (26):

$$r_N = O\left(\frac{\tau 2N^{2n^*-1}N^{6-2\gamma}}{N^2(3-\gamma)^2} + \frac{\tau 2N^{2n^*-1}N^{3-2\gamma}((N+1)^3-1)}{N^2(9-6\gamma)}\right).$$

В последнем равенстве выполним эквивалентные преобразования

$$r_N = O\left(\frac{\tau N^{2n^*-1}N^{6-2\gamma}}{N^2} + \frac{\tau N^{2n^*-1}N^{3-2\gamma}N^3}{N^2}\right),$$

$$r_N = O\left(\tau N^{2n^*-2\gamma+3}\right). \tag{27}$$

Полученное представление справедливо для значений $\tau = O(N^{n^*-1})$, удовлетворяющих неравенству (20). Из (27) найдем значения γ, для которых $r_N \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty$:

$$\gamma > \frac{3}{2}n^* + 1.$$

Из этого неравенства вытекает свойство (13) для достаточно больших N.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда* $q^1 \in \overline{R(0)}$.

3. Заключение. Доказательство основного результата данной работы содержит теоретическое обоснование применимости метода модального анализа для оценки множества достижимости бесконечномерной системы, которая описывает колебания прямоугольной пластины Кирхгофа. Ключевым предположением, которое обеспечивает малость нормы решений подсистемы с высокочастотными модами при использовании семейства управлений $u = \hat{u}_N(t)$, является условие теоремы 1 об алгебраичности числа $\chi = l_2^2/l_1^2$, где l_1 и l_2 — размеры пластины.

Представляет интерес дальнейшее исследование возможности ослабления условий теоремы 1 для описания приближенной управляемости модели Кирхгофа.

Вопрос о существовании предельных функций построенного семейства управлений $\{\hat{u}_N(t)\}$ при $N \longrightarrow \infty$ также представляет интерес для дальнейшего исследования задачи управляемости в гильбертовом пространстве.

1. *Набиуллин М. К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 216 с.
2. *Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 214 с.
3. *Жилин П. А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 48 – 64.
4. *Lagnese J. E., Leugering G.* Controllability of thin elastic beams and plates // The Control Handbook / Ed. W. S. Levine. – Boca Raton: CRC Press – IEEE Press, 1996. – P. 1139 – 1156.
5. *Zuyev A.* Approximate controllability of a rotating Kirchhoff plate model // Proc. 49 th IEEE Conf. Decision and Control. – Atlanta (USA), 2010. – P. 6944 – 6948.

6. *Bradley M., Lenhart S.* Bilinear spatial control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation // Electron. J. Different. Equat. – 2001. – **27**. – P. 1 – 15.
7. *Chen L., Pan J., Cai G.* Active control of a flexible cantilever plate with multiple time delays // Acta mech. solida sinica. – 2008. – **21**. – P. 258 – 266.
8. *Новицький В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах // Праці Ін-ту математики НАН України. – 1995. – **11**. – 150 с.
9. *Jacob B., Partington J. R.* On controllability of diagonal systems with one-dimensional input space // Syst. and Contr. Lett. – 2006. – **55**. – P. 321 – 328.
10. *Зуев А. Л., Новикова Ю. В.* Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187 – 198.
11. *Зуев А. Л., Новикова Ю. В.* Оптимальное управление моделью пластины Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 163 – 176.
12. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 279 p.
13. *Fattorini H. O.* Infinite dimensional optimization and control theory. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. – 798 p.
14. *Levan N., Rigby L.* Strong stabilizability of linear contractive control systems on Hilbert space // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1979. – **17**. – P. 23 – 35.
15. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 383 с.
16. *Zuyev A.* Approximate controllability and spillover analysis of a class of distributed parameter systems // Proc. 48 th IEEE Conf. Decision and Contr. and 28 th Chinese Contr. Conf. Shanghai. – China, 2009. – P. 3270 – 3275.

Получено 21.10.13