

ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ У РІВНОМІРНИЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТРИКАХ

We establish uniform [with respect to parameter p , $1 \leq p \leq \infty$] upper estimations of the best approximations by trigonometric polynomials for the classes $C_{\beta,p}^{\psi}$ of periodic functions generated by sequences $\psi(k)$ vanishing faster than any power function. The obtained estimations are exact in order and contain constants expressed in the explicit form and depending only on the function ψ . Similar estimations are obtained for the best approximations of the classes $L_{\beta,1}^{\psi}$ in metrics of the spaces L_s , $1 \leq s \leq \infty$.

Найдены равномерные относительно параметра p , $1 \leq p \leq \infty$, оценки сверху наилучших приближений тригонометрическими полиномами классов периодических функций $C_{\beta,p}^{\psi}$, порождаемых последовательностями $\psi(k)$, убывающими к нулю быстрее любой степенной функции. Полученные оценки точны по порядку и содержат выраженные в явном виде постоянные, зависящие только от функции ψ . Аналогичные оценки установлены для наилучших приближений классов $L_{\beta,1}^{\psi}$ в метриках пространств L_s , $1 \leq s \leq \infty$.

Нехай C — простір 2π -періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_{∞} — простір 2π -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{\infty} = \text{esssup}_t |f(t)|$; L_p , $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних в p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f(t)$, в якому норму задано формулою $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$.

Нехай, далі, $L_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p \leq \infty$, — множина всіх 2π -періодичних функцій f , що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0, \quad (1)$$

де $\Psi_{\beta}(t)$ — сумовна на $[0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0,$$

а

$$B_p^0 = \{ \varphi \in L_1 : \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1 \}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Функцію φ у зображенні (1), згідно з О. І. Степанцем [1, с. 132], називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають через f_{β}^{ψ} . Підмножину неперервних функцій із $L_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p \leq \infty$, позначають через $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L_{\beta,p}^{\psi}$ та $C_{\beta,p}^{\psi}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел \mathbb{N} деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$ таких, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ позначатимемо через \mathfrak{M} .

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1} \left(\frac{\psi(t)}{2} \right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty, t \rightarrow \infty \}.$$

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то (див., наприклад, [2, с. 97]) функція $\psi(t)$ спадає до нуля швидше за довільну степеневу функцію, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^r \psi(t) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Це означає, що за умови $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ ряд Фур'є довільної функції f із $C_{\beta,p}^\psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, можна диференціювати довільне число разів і в результаті будемо одержувати рівномірно збіжні ряди. Отже, класи $C_{\beta,p}^\psi$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ складаються з нескінченно диференційовних функцій.

З іншого боку, як показано у [3, с. 1692], для кожної нескінченно диференційовної 2π -періодичної функції f можна вказати функцію ψ з множини \mathfrak{M}_∞^+ таку, що $f \in C_{\beta,p}^\psi$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Із множини \mathfrak{M}_∞^+ виділяють підмножини \mathfrak{M}'_∞ і \mathfrak{M}''_∞ ; \mathfrak{M}'_∞ — множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K_1 > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \leq K_1$, $t \geq 1$, а \mathfrak{M}''_∞ — множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена знизу деяким додатним числом, тобто існує стала $K_2 > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \geq K_2$, $t \geq 1$.

Типовими представниками множини \mathfrak{M}_∞^+ є функції $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, причому якщо $r \geq 1$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}'_\infty$, а якщо $r \in (0, 1]$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}''_\infty$. Класи $C_{\beta,p}^\psi$ та $L_{\beta,p}^\psi$, що породжуються функціями $\psi = \psi_{r,\alpha}$, будемо позначати через $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ та $L_{\beta,p}^{\alpha,r}$ відповідно.

Нехай, далі, $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ та $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ — найкращі наближення класів $C_{\beta,p}^\psi$ та $L_{\beta,p}^\psi$ в метриках просторів C та L_s , тобто величини вигляду

$$E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s, \quad 1 \leq p, s \leq \infty,$$

де \mathcal{T}_{2n-1} — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n - 1$.

Дану роботу присвячено знаходженню точних порядкових оцінок величин $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

У роботі [2, с. 225] (див. також [4, с. 48]) встановлено точні порядкові оцінки величин $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \leq p, s \leq \infty$, а також при $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, $1 < p, s < \infty$. У випадку $p = s = 1$ або $p = s = \infty$ в [5] встановлено асимптотичні рівності при $n \rightarrow \infty$ для величин $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ж для послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, виконуються умови:

$$1) \quad \Delta^2 \psi(k) \stackrel{\text{df}}{=} \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0, \quad \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad k = n, n+1, \dots;$$

$$2) \frac{\Delta^2 \psi(n)}{\psi(n)} > \frac{(1+3\rho)\rho^{2n}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^{2n}}},$$

то при $p = s = 1$, $p = s = \infty$ в [6] отримано точні значення величин $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

У роботі [7] знайдено порядкові оцінки величин $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$, $1 \leq p < \infty$, і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$, $1 < s \leq \infty$, у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(t) - t \geq a > 2$, $\mu(t) \geq b > 2$. При цьому для оцінок зверху для найкращих наближень $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ використовувались відповідно величини

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^\psi} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_s, \quad 1 < s \leq \infty,$$

де $S_{n-1}(f; \cdot)$ – частинні суми Фур'є порядку $n - 1$ функції f . Було встановлено нерівності

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \leq C_{a,b} (2p)^{1-\frac{1}{p}} \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq C_{a,b} (2s')^{\frac{1}{s}} \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}, \quad 1 < s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \quad (3)$$

де

$$C_{a,b} = \frac{1}{\pi} \max \left\{ \frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}, 2\pi \right\}. \quad (4)$$

Крім того, в [7] доведено, що при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n > 2$ суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень тригонометричними поліномами, тобто

$$E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \asymp \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \asymp \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}, \quad 1 < s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$$

(тут і далі запис $A(n) \asymp B(n)$ ($A(n) > 0$, $B(n) > 0$) означає існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$).

Зазначимо, що порядкову рівність $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \asymp \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$ встановлено в роботі [8]. Крім того, у роботах [9, 10] при $p = 2$, $s = \infty$ та $p = 1$, $s = 2$ за умови збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty \psi^2(k)$ знайдено точні значення величин $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ для всіх $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

Водночас суми Фур'є, як апарат наближення, не дозволяють записати рівномірні відносно параметрів p , $1 \leq p \leq \infty$, та s , $1 \leq s \leq \infty$, оцінки зверху для величин $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ та $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$. Цей факт зумовлений тією обставиною, що при $p = \infty$ та $s = 1$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$

$$\frac{\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C}{E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C} \asymp \ln^+(\eta(n) - n), \quad \frac{\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s}{E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s} \asymp \ln^+(\eta(n) - n),$$

де $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$ (див., наприклад, [1, с. 264, 285; 4, с. 86, 87]).

У даній роботі побудовано лінійний метод наближення $V_{n,\psi}(t)$, що дозволяє записати рівномірні відносно параметрів $p, 1 \leq p \leq \infty$, і $s, 1 \leq s \leq \infty$, оцінки зверху найкращих наближень $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Показано, що знайдені оцінки є точними за порядком і містять виражені в явному вигляді сталі, які залежать лише від функції ψ .

Теорема 1. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+, \beta \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$. Тоді для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2, \mu(n) \geq b > 2$, справджуються оцінки

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \leq C_{a,b}^* \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad (5)$$

де

$$C_a = \frac{\pi}{96(1 + \pi^2)^2} \frac{(a - 1)^2(a - 2)^2}{a^3(3a - 4)}, \quad (6)$$

$$C_{a,b}^* = \frac{2(1 + \pi^2)}{\pi} \left(\frac{2b}{b - 2} + \frac{a}{a - 1} \right). \quad (7)$$

Доведення. Згідно з формулою (33) роботи [7] для довільної $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ при $\eta(n) - n \geq a > 2, \mu(n) \geq b > 2$ має місце оцінка

$$E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \geq C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

в якій величина C_a означена рівністю (6). Для знаходження оцінки зверху величини $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ розглянемо лінійний метод $V_{n,\psi}(f; x)$ наближення функцій із множини $C_{\beta,p}^\psi(L_{\beta,1}^\psi)$ вигляду

$$V_{n,\psi}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n, [\eta(n)] - n + 1}(k) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

де

$$\lambda_{n, [\eta(n)] - n + 1}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 2n - [\eta(n)] - 1, \\ 1 - \frac{[\eta(n)] - 2n + k}{[\eta(n)] - n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & 2n - [\eta(n)] \leq k \leq n - 1 \end{cases} \quad (9)$$

(тут і далі $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α).

Зауважимо, що суми (8) є частинним випадком узагальнених сум Валле Пуссена $U_{n,m}^\nu(f; x)$, тобто поліномів вигляду (див., наприклад, [11])

$$U_{n,m}^\nu(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,m}(k) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

де

$$\lambda_{n,m}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n - m, \\ 1 - \frac{\nu(k)}{\nu(n)}, & n - m + 1 \leq k \leq n - 1, \end{cases}$$

а $\nu(k), k \in \mathbb{N}$, — довільно монотонно зростаюча послідовність додатних чисел $m \in [1, n], m \in \mathbb{N}$. Поклавши $\nu(k) = \frac{[\eta(n)] - 2n + k}{\psi(k)}$ і $m = [\eta(n)] - n + 1$, одержимо $U_{n,m}^\nu(f; x) = V_{n,\psi}(f; x)$.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(C_{\beta,p}^\psi; V_{n,\psi})_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^\psi} \|f(\cdot) - V_{n,\psi}(f; \cdot)\|_C, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Оскільки

$$E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \leq \mathcal{E}(C_{\beta,p}^\psi; V_{n,\psi})_C, \quad (10)$$

то для доведення теореми 1 достатньо показати, що при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(C_{\beta,p}^\psi; V_{n,\psi})_C \leq C_{a,b}^* \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (11)$$

де $C_{a,b}^*$ означаються рівністю (7). Згідно з [2, с. 51] для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\begin{aligned} f(x) - V_{n,\psi}(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \left(\sum_{k=1}^{n-1} (1 - \lambda_{n, [\eta(n)]-n+1}(k)) \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right) dt, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\lambda_{n, [\eta(n)]-n+1}(k)$ означаються формулою (9). Із (12) і (9) отримаємо

$$f(x) - V_{n,\psi}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) \Psi_{\beta,n}^*(x-t) dt, \quad \|f_\beta^\psi\|_p \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta,n}^*(t) &= \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} \frac{[\eta(n)] - 2n + k}{[\eta(n)] - n} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \\ &= \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)] - n}\right) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Згідно з твердженнями 8.1 і 8.2 роботи [1, с. 137, 138] для будь-якої функції $f \in C_{\beta,p}^\psi$ виконується нерівність

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) \Psi_{\beta,n}^*(x-t) dt \right\|_C \leq \frac{1}{\pi} \|f_\beta^\psi\|_p \|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'} \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}^*(t)\|_{p'}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (15)$$

Оцінимо зверху величину $\|\Psi_{\beta,n}^*\|_{p'}$. Позначаючи

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \sum_{j=1}^k \cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad (16)$$

з (14) одержуємо

$$\Psi_{\beta,n}^*(t) = \psi(n) (D_{n-1,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t)) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} (n-k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (17)$$

Далі скористаємось наступним твердженням роботи [7].

Лема 1. Нехай $\gamma \in \mathbb{R}$, а $\lambda(k), k = 1, 2, \dots$, — деяка послідовність дійсних чисел. Тоді для довільних $N, M \in \mathbb{N} (N < M)$ має місце рівність

$$\frac{1}{M-N} \sum_{k=N}^{M-1} \sum_{j=1}^k \lambda(j) \cos(jt + \gamma) = \sum_{k=1}^N \lambda(k) \cos(kt + \gamma) + \frac{1}{M-N} \sum_{k=N+1}^{M-1} (M-k) \lambda(k) \cos(kt + \gamma). \quad (18)$$

Поклавши в умовах леми 1 $M = n, N = 2n - [\eta(n)], \lambda(k) \equiv 1, \gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, із (18) отримаємо

$$\frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} (n-k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t). \quad (19)$$

Із (17) і (19) випливає рівність

$$\Psi_{\beta,n}^*(t) = \psi(n) D_{n-1,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (20)$$

Застосовуючи до останнього доданка з правої частини рівності (20) перетворення Абеля, одержуємо, що при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k) D_{k,\beta}(t) - \psi(n) D_{n-1,\beta}(t), \quad (21)$$

де $\Delta\psi(k) = \psi(k) - \psi(k+1)$.

Згідно з (20) і (21)

$$\Psi_{\beta,n}^*(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k) D_{k,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} D_{k,\beta}(t). \quad (22)$$

На підставі формули

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(\gamma + kt) = \sin\left(\gamma + \frac{N-1}{2}t\right) \sin \frac{Ny}{2} \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \quad (23)$$

(див., наприклад, [12, с. 43]) при $N = k + 1, \gamma = (1 - \beta)\frac{\pi}{2}$ маємо

$$\begin{aligned}
D_{k,\beta}(t) &= \sum_{j=0}^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} = \frac{\cos\left(\frac{kt}{2} - \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin \frac{k+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} = \\
&= \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad 0 < |t| \leq \pi. \tag{24}
\end{aligned}$$

З (24) і (22) одержуємо

$$\begin{aligned}
\Psi_{\beta,n}^*(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k) \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \\
&- \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k) \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right. \\
&\left. - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right). \tag{25}
\end{aligned}$$

Застосуємо перетворення Абеля до першої суми з правої частини рівності (25), внаслідок чого запишемо

$$\begin{aligned}
\Psi_{\beta,n}^*(t) &= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2\psi(k) \sum_{j=0}^k \sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \Delta\psi(n) \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right), \quad 0 < |t| \leq \pi, \tag{26}
\end{aligned}$$

де

$$\Delta^2\psi(k) = \Delta\psi(k) - \Delta\psi(k+1) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2).$$

Оскільки

$$\sin \frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \tag{27}$$

то згідно з (23)

$$\left| \sum_{j=0}^k \sin \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{\pi}{|t|}, \quad 0 < |t| \leq \pi. \quad (28)$$

З (26)–(28) маємо

$$\begin{aligned} |\Psi_{\beta,n}^*(t)| &\leq \frac{\pi^2}{2t^2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 \psi(k) + \Delta \psi(n) + \frac{2\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{t^2} \left(\Delta \psi(n) + \frac{\psi(n)}{[\eta(n)] - n} \right), \quad 0 < |t| \leq \pi. \end{aligned} \quad (29)$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}$, то

$$\Delta \psi(n) \leq |\psi'(n)|, \quad \psi'(n) := \psi'(n+0). \quad (30)$$

Оцінимо значення величини $|\psi'(n)|$. Для цього нам знадобиться наступне твердження.

Лема 2. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$, $\mu(t) \geq b > 0$. Тоді

$$\frac{1}{2} \frac{b^2}{(b+1)^2} (\eta(t) - t) \leq \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{b} \right) (\eta(t) - t), \quad t \geq 1. \quad (31)$$

Доведення. Згідно з [1, с. 165] справджується співвідношення

$$|\psi'(\eta(\eta(t)))| (\eta(\eta(t)) - \eta(t)) \leq \frac{1}{4} \psi(t) \leq |\psi'(\eta(t))| (\eta(\eta(t)) - \eta(t)), \quad \psi \in \mathfrak{M}. \quad (32)$$

З правої частини (32) випливає, що

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq \frac{4|\psi'(\eta(t))|}{|\psi'(t)|} (\eta(\eta(t)) - \eta(t)) \leq 4 (\eta(\eta(t)) - \eta(t)). \quad (33)$$

Згідно з формулою (11) роботи [7] для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$ при $\mu(t) \geq b > 0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2} (\eta(t) - t) \leq \eta(\eta(t)) - \eta(t) < \left(1 + \frac{1}{b} \right) (\eta(t) - t), \quad (34)$$

тому з (33) отримуємо

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{b} \right) (\eta(t) - t). \quad (35)$$

З іншого боку, на підставі (32) і (34)

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \geq \frac{4|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|} (\eta(\eta(t)) - \eta(t)) \geq \frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|} (\eta(t) - t). \quad (36)$$

Оскільки

$$\psi'(t) = (4\psi(\eta(\eta(t))))' = 4\psi'(\eta(\eta(t)))\eta'(\eta(t))\eta'(t), \quad \psi \in \mathfrak{M}$$

(тут і далі $\eta'(t) = \eta'(t+0)$), то

$$\frac{\psi'(\eta(\eta(t)))}{\psi'(t)} = \frac{1}{4\eta'(\eta(t))\eta'(t)}. \quad (37)$$

Згідно з формулою (13) роботи [7] для довільної $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$ при $\mu(t) \geq b > 0$

$$\eta'(t) \leq 1 + \frac{1}{b}, \quad t \geq 1. \quad (38)$$

Тому з (37) і (38) випливає

$$\frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|} (\eta(t) - t) \geq \frac{1}{2} \frac{b^2}{(b+1)^2} (\eta(t) - t). \quad (39)$$

Об'єднуючи (36) і (39), отримуємо твердження лєми.

Лему доведено.

Згідно з (30) і (31) маємо

$$\Delta\psi(n) \leq |\psi'(n)| \leq \frac{2(b+1)^2}{b^2} \frac{\psi(n)}{\eta(n) - n}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_\infty^+, \quad b > 0. \quad (40)$$

За лемою 2 роботи [7] якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n \geq a > 1$, $\mu(n) \geq b > 0$, то

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right) (\eta(n) - n) < [\eta(n)] - n. \quad (41)$$

З (29), (40), і (41) випливає нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \pi^2 \left(\frac{2(b+1)^2}{b^2} + \frac{a}{a-1} \right) \frac{\psi(n)}{\eta(n) - n} \frac{1}{t^2}, \quad 0 < t \leq \pi. \quad (42)$$

Покажемо також, що при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 2$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \right) \psi(n)(\eta(n) - n). \quad (43)$$

З (14) маємо

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \left| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| + \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)] - n} \right). \quad (44)$$

Відповідно до формули (30) роботи [7] для довільних $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 2$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leq \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} \right) \psi(n)(\eta(n) - n), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

Крім того, як неважко переконатись,

$$\begin{aligned} & \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)] - n} \right) = \\ & = \psi(n) \left(([\eta(n)] - n - 1) - \frac{([\eta(n)] - n)([\eta(n)] - n - 1)}{2([\eta(n)] - n)} \right) = \\ & = \frac{\psi(n)}{2} ([\eta(n)] - n - 1) < \frac{\psi(n)}{2} (\eta(n) - n). \end{aligned} \quad (46)$$

З (44)–(46) отримуємо нерівність (43).

Враховуючи (42), (43), а також нерівності

$$\frac{a}{a-1} > \frac{1}{a} + \frac{1}{2}, \quad a > 1, \quad \frac{b}{b-2} > \frac{(b+1)^2}{b^2}, \quad b > 2,$$

переконуємось, що при $1 \leq p' < \infty$, $\eta(n) - n \geq a > 1$ і $\mu(n) \geq b > 2$

$$\begin{aligned} \|\Psi_{\beta,n}^*(t)\|_{p'} &\leq \psi(n) \left(\left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \right)^{p'} \int_{|t| \leq \frac{1}{\eta(n)-n}} (\eta(n) - n)^{p'} dt + \right. \\ &\quad \left. + \pi^{2p'} \left(\frac{2(b+1)^2}{b^2} + \frac{a}{a-1} \right)^{p'} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{p'}} \int_{\frac{1}{\eta(n)-n} \leq |t| \leq \pi} \frac{dt}{t^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} < \\ &< \psi(n) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \left(\int_{|t| \leq \frac{1}{\eta(n)-n}} (\eta(n) - n)^{p'} dt + \frac{\pi^{2p'}}{(\eta(n) - n)^{p'}} \int_{\frac{1}{\eta(n)-n} \leq |t| \leq \pi} \frac{dt}{t^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} < \\ &< \psi(n)(\eta(n) - n)^{1-\frac{1}{p'}} \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) 2^{\frac{1}{p'}} \left(1 + \pi^{2p'} \frac{1}{2p'-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &\leq 2(1 + \pi^2) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \psi(n)(\eta(n) - n)^{1-\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \tag{47}$$

У випадку $p' = \infty$ зі співвідношення (43) маємо, що при $\eta(n) - n \geq a > 1$ і $\mu(n) \geq b > 2$

$$\begin{aligned} \|\Psi_{\beta,n}^*(t)\|_{p'} = \|\Psi_{\beta,n}^*(t)\|_{\infty} &\leq \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \right) \psi(n)(\eta(n) - n) < \\ &< 2(1 + \pi^2) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \psi(n)(\eta(n) - n). \end{aligned} \tag{48}$$

Зі співвідношень (13), (15), (47) і (48) випливає справедливість нерівності (11).

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta(\psi, n) - n) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді

$$E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \asymp \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}.$$

Неважко переконатися, що для функції $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$

$$\eta(n) - n = \eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n = n \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right), \tag{49}$$

$$\mu(n) = \mu(\psi_{r,\alpha}; n) = \frac{n}{\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n} = \frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1 \right)^{\frac{1}{r}} - 1},$$

і, як показано в [7, с. 257, 258], при

$$n \geq \max \left\{ 1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2} \right)^{\frac{1}{1-r}}, 1 + 2 \left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}$$

виконуються нерівності

$$\eta(n) - n \geq a(\alpha, r) > 2,$$

$$\mu(n) \geq a(\alpha, r) > 2,$$

де

$$a(\alpha, r) = \frac{\ln 2}{\alpha r} \left(1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2} \right)^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r}, \quad (50)$$

$$b(\alpha, r) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha} \left(1 + 2 \left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)} \right)^{\frac{1}{r}} \right)^{-r} + 1 \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^{-1}. \quad (51)$$

Тоді з теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. Нехай $r \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх n таких, що

$$n \geq \max \left\{ 1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2} \right)^{\frac{1}{1-r}}, 1 + 2 \left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}, \quad (52)$$

справджуються оцінки

$$\begin{aligned} C_a \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^{\frac{1}{p}} &\leq E_n \left(C_{\beta, p}^{\alpha, r} \right)_C \leq \\ &\leq C_{a, b}^* \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (53)$$

де величини C_a і $C_{a, b}^*$ означаються формулами (6) і (7) при $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, що задані за допомогою рівностей (50) і (51).

Теорема 2. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$, справджуються оцінки

$$C_a \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L_{\beta, 1}^\psi)_s \leq C_{a, b}^* \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}, \quad (54)$$

де сталі C_a і $C_{a, b}^*$ означаються формулами (6) і (7) відповідно.

Доведення. Згідно з формулою (70) роботи [7] для довільних $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ при $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ має місце оцінка

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \geq C_a \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}},$$

в якій величина C_a означена рівністю (6). Для оцінки зверху найкращих наближень $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; V_{n,\psi})_s = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \|f(\cdot) - V_{n,\psi}(f; \cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

де суми $V_{n,\psi}$ означаються формулою (8).

Оскільки

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; V_{n,\psi})_s, \tag{55}$$

то для доведення теореми 2 достатньо показати справедливість співвідношення

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; V_{n,\psi})_s \leq C_{a,b}^* \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}. \tag{56}$$

Для цього використаємо інтегральне зображення (13), яке у випадку $f \in L_{\beta,1}^\psi$ буде справедливим майже для всіх $x \in \mathbb{R}$, та нерівність (5.28) з [13, с. 43]. Тоді для довільних $1 \leq s \leq \infty$ одержимо

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}^*(\cdot)\|_s \|\varphi(\cdot)\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}^*(\cdot)\|_s. \tag{57}$$

Використовуючи співвідношення (47) і (48) і покладаючи $p' = s$, з (57) отримуємо (56).

Теорему 2 доведено.

Наслідок 3. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta(\psi, n) - n) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Тоді

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}.$$

Наслідок 4. Нехай $r \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що задовольняють умову (52), справджуються оцінки

$$\begin{aligned} C_a \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1}{s'}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^{\frac{1}{s'}} &\leq E_n(L_{\beta,1}^{\alpha,r})_s \leq \\ &\leq C_{a,b}^* \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1}{s'}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^{\frac{1}{s'}}, \end{aligned}$$

де величини C_a і $C_{a,b}^*$ означаються формулами (6) і (7) при $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, що задані рівностями (50) і (51).

З рівності (49) для величини $\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n$ неважко одержати двосторонні оцінки

$$\frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r} \leq \eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n \leq (1 + \ln 2^{1/\alpha})^{\frac{1-r}{r}} \frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r}, \quad \alpha > 0, \quad r \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{58}$$

З наслідків 2, 4 та формули (58) випливають порядкові рівності

$$E_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C \asymp \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1-r}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$E_n(L_{\beta,1}^{\alpha,r})_s \asymp \exp(-\alpha n^r) n^{\frac{1-r}{s'}}, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1.$$

Співставляючи співвідношення (2) і (3) з (5) і (54) відповідно, при виконанні умов теорем 1 та 2 можна записати оцінки

$$C_a \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \leq C_{a,b}(p) \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}},$$

$$C_a \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L_{\beta,1}^{\psi})_s \leq C_{a,b}(s') \psi(n) (\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

де

$$C_{a,b}(p) = \min \left\{ (2p)^{1-\frac{1}{p}} C_{a,b}, C_{a,b}^* \right\},$$

а величини $C_{a,b}$ і $C_{a,b}^*$ означені формулами (4) і (7) відповідно.

Обчислення показують, що при невеликих значеннях p , $1 \leq p \leq 7$, $C_{a,b,p} = (2p)^{1-\frac{1}{p}} C_{a,b}$, а при великих p , $p \geq 26$, $C_{a,b,p} = C_{a,b}^*$.

1. Степанець А. И. Методы теории приближений: В 2ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
2. Степанець А. И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. Степанець А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л. Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686–1708.
4. Степанець А. И. Методы теории приближений: В 2ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – 468 с.
5. Сердюк А. С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 294–336.
6. Сердюк А. С. Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **41**. – С. 168–189.
7. Сердюк А. С., Степанюк Т. А. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 255–282.
8. Романюк В. С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Экстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131–135.
9. Сердюк А. С., Соколенко І. В. Рівномірні наближення класів $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій лінійними методами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181–189.
10. Сердюк А. С., Соколенко І. В. Наближення лінійними методами класів $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 245–254.
11. Сердюк А. С., Овсянко Е. Ю. Равномерное приближение периодических функций тригонометрическими суммами специального вида // ArXiv preprint, arXiv:1212.3769, 2013. – 14 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
13. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Одержано 14.10.13