УДК 517.9; 519.63

В. Б. Василик, В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ

For the first-order differential equation with unbounded operator coefficient in a Banach space, we study the nonlocal problem with integral condition. An exponentially convergent algorithm for the numerical solution of this problem is proposed and justified under the assumption that the operator coefficient A is strongly positive and certain existence and uniqueness conditions are satisfied. This algorithm is based on the representations of operator functions via the Dunford – Cauchy integral along a hyperbola covering the spectrum of A and the quadrature formula containing a small number of resolvents. The efficiency of the proposed algorithm is illustrated by several examples.

Для дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве рассматривается нелокальная задача с интегральным условием. Построен и обоснован экспоненциально сходящийся алгоритм для численного решения этой задачи в предположении, что операторный коэффициент A сильно позитивный и выполнены условия существования и единственности. Этот алгоритм основан на представлении операторных функций с помощью интеграла Данфорда – Коши по гиперболе, которая охватывает спектр A, и на квадратурной формуле, содержащей небольшое количество резольвент. Эффективность предложенного алгоритма продемонстрирована на нескольких примерах.

1. Вступ. Моделі багатьох фізичних процесів описуються за допомогою диференціальних рівнянь з початковими і (або) граничними умовами. Але в деяких випадках постановка нелокальних умов дозволяє описати процес краще, тому що є можливість виміряти деякі параметри системи більш точно, ніж у випадку локальних умов. Задачі з нелокальними умовами виникають в теорії фізики плазми [1], ядерної фізики [2], математичної хімії [3], теорії хвилеводів [4] і т. д. Деякі математичні моделі динаміки біопопуляцій є крайовими задачами для гіперболічних рівнянь з нелокальними умовами по просторових змінних (див., наприклад, [5, 6] і наведену там бібліографію). Водночас ці проблеми можна розглядати як узагальнення класичних крайових задач, які породжують дуже цікаві теоретичні математичні дослідження.

У цій статті ми розглянемо нелокальну задачу з інтегральною умовою:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(0) + \int\limits_0^T w(s)u(s)ds = u_0,\end{gathered} \tag{1}$$

де $w(s) \geq 0$ — задана функція, $u_0 \in X$. Оператор A з областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі X є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним), тобто його спектр $\Sigma(A)$ розташований у правій півплощині у секторі з вершиною в початку координат. Резольвента оператора A спадає обернено пропорційно до $|z|$ на нескінченності (див. оцінку (6) нижче).

Неоднорідну задачу, що відповідає задачі (1), можна звести до однорідної задачі за допомогою заміни функції таким способом. Нехай

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \quad t \in [0, T],$$
$$v(0) + \int_0^T w(s)v(s)ds = u_0, \tag{2}$$

де $f(t)$ — векторнозначна функція в банаховому просторі X. Тоді, покладаючи $v(t) = u(t) + v_1(t)$, де

$$v_1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)ds,$$

отримуємо задачу для визначення $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \in [0, T],$$
$$u(0) + \int_0^T w(s)u(s)ds = u_0 - \int_0^T w(s)v_1(s)ds.$$

Зауважимо, що експоненціально збіжну апроксимацію для $v_1(t)$ було розроблено в [7, 8]. Отже, цю апроксимацію можна використати для знаходження $v_1(t)$, а потім відповідного інтеграла, використовуючи відповідну квадратурну формулу.

Слід також зазначити, що нещодавно було розроблено різні експоненціально збіжні методи для задач з необмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі [8 – 13]. Такі задачі можна розглядати як метамоделі класичних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема параболічних, еліптичних та гіперболічних. У [14] експоненціально збіжний метод було розроблено для m-точкової нелокальної задачі для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом. Для задач із нелокальною інтегральною умовою такі методи на теперішній час невідомі.

Метою даної роботи є побудова експоненціально збіжного наближення розв'язку задачі (1).

2. Існування і зображення розв'язку. Розв'язок задачі (1) можна зобразити формально таким чином:

$$u(t) = e^{-At}u(0). \tag{3}$$

З інтегральної умови в задачі (1) і формули (3) отримуємо

$$\left(I + \int_0^T w(s)e^{-As}ds \right) u(0) = u_0.$$

Позначимо $B(A) = \left(I + \int_0^T w(s)e^{-As}ds \right)$. Таким чином, у випадку, коли $B(A)^{-1}$ існує (достатні умови для існування цього оператора будуть встановлені нижче), маємо

$$u(0) = B(A)^{-1}u_0.$$

Отже,

$$u(t) = e^{-At} B(A)^{-1} u_0. \tag{4}$$

Нехай оператор A в задачі (1) – щільно визначений сильно позитивний (секторіальний) оператор у банаховому просторі X з областю визначення $D(A)$, тобто його спектр $\Sigma(A)$ розміщений у секторі Σ:

$$\Sigma = \left\{ z = \rho_0 + re^{i\theta} \colon r \in [0, \infty),\ \rho_0 > 0\ \ |\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{5}$$

Додатково справджується наступна оцінка для резольвенти оператора A:

$$\|R_A(z)\| = \left\|(zI - A)^{-1}\right\| \le \frac{M}{1 + |z|} \tag{6}$$

за межами сектора та на його межі Γ_Σ. Числа ρ_0, φ називаються спектральними характеристиками A.

Називатимемо криву Γ_0 спектральною гіперболою:

$$\Gamma_0 = \{ z(\zeta) = \rho_0 \cosh \zeta - i b_0 \sinh \zeta \colon \zeta \in (-\infty, \infty),\ b_0 = \rho_0 \tan \varphi \}. \tag{7}$$

Вона має вершину в $(\rho_0, 0)$ і асимптоти, що паралельні до променів спектрального кута Σ.

Для зображення операторних функцій зручно використовувати інтеграл Данфорда – Коші (див., наприклад, [15, 16]), де шлях інтегрування відіграє важливу роль. Використовуючи зображення за допомогою інтеграла Данфорда – Коші і (4), розв'язок задачі (1) можна записати у вигляді

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_I} e^{-zt} \left[1 + \int\limits_0^T w(s) e^{-zs} ds \right]^{-1} R_A(z) u_0 dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_I} F(z,t) R_A(z) u_0 dz, \tag{8}$$

якщо $F(z,t)$ є аналітичною функцією в області, обмеженій гіперболою Γ_I, яка охоплює Γ_0. Щоб отримати рівномірно збіжний та чисельно стійкий алгоритм, ми модифікуємо цей інтеграл, замінивши резольвенту $R_A(z)$ на $R_A^1(z)$ (уперше це було запропоновано в [7]), що не змінює значення інтеграла у випадку, коли $u_0 \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$ (детальніше див. [7, 8]):

$$R_A^1(z) = (zI - A)^{-1} - \frac{I}{z}.$$

Таким чином, можна отримати таке зображення для розв'язку задачі (1):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_I} F(z,t) R_A^1(z) u_0 dz. \tag{9}$$

Виберемо гіперболу

$$\Gamma_I = \{ z(\zeta) = a_I \cosh \zeta - i b_I \sinh \zeta \colon \zeta \in (-\infty, \infty) \} \tag{10}$$

за контур інтегрування, що охоплює Σ, а отже, спектр оператора A. Значення параметрів a_I, b_I визначимо пізніше. Використовуючи цю гіперболу, з (9) отримуємо

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z(\zeta), t) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_0 d\zeta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, \zeta) d\zeta, \tag{11}$$

де

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - i b_I \cosh \zeta.$$

Наступним кроком для побудови чисельного алгоритму є наближення (11) за допомогою ефективної квадратурної формули. Для цього необхідно оцінити ширину смуги навколо дійсної осі, куди підінтегральний вираз в (11) допускає аналітичне продовження (по відношенню до ζ). Гіпербола Γ_I, по якій проводиться інтегрування, перетворюється в параметричну сім'ю гіпербол по відношенню до ν після заміни ζ на $\zeta + i\nu$:

$$\Gamma(\nu) = \{z(\zeta, \nu) = a_I \cosh(\zeta + i\nu) - i b_I \sinh(\zeta + i\nu) \colon \zeta \in (-\infty, \infty)\} =$$

$$= \{z(\zeta, \nu) = a(\nu) \cosh \zeta - i b(\nu) \sinh \zeta \colon \zeta \in (-\infty, \infty)\},$$

де

$$a(\nu) = a_I \cos \nu + b_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \sin(\nu + \phi/2),$$

$$b(\nu) = b_I \cos \nu - a_I \sin \nu = \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \cos(\nu + \phi/2),$$

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{b_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}, \qquad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{a_I}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}.$$

Аналітичність підінтегрального виразу в смузі

$$D_{d_1} = \{(\zeta, \nu) \colon \zeta \in (-\infty, \infty), |\nu| < d_1/2\}$$

з деяким d_1 може бути порушена, якщо резольвента або частина, що відповідає нелокальній умові, стане необмеженою. Щоб цього уникнути, нам потрібно вибрати d_1 таким чином, щоб для $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$ гіпербола $\Gamma(\nu)$ залишалась у правій півплощині комплексної площини. Будемо вимагати, щоб:

1) для $\nu = -d_1/2$ відповідна гіпербола проходила через точку $(\rho_1, 0)$ для деякого $0 \leq \rho_1 < \rho_0$;

2) при $\nu = d_1/2$ вона збігалась зі спектральною гіперболою.

При виконанні таких умов для всіх $\nu \in (-d_1/2, d_1/2)$ множина $\Gamma(\nu)$ не перетинатиме спектральний сектор і гіпербола $\Gamma(0) = \Gamma_I$, що є шляхом інтегрування в (9). Такі вимоги для $\Gamma(\nu)$ приводять до системи рівнянь

$$a_I \cos(d_1/2) + b_I \sin(d_1/2) = \rho_0,$$

$$b_I \cos(d_1/2) - a_I \sin(d_1/2) = b_0 = \rho_0 \tan \varphi,$$

$$a_I \cos(-d_1/2) + b_I \sin(-d_1/2) = \rho_1,$$

з якої елементарними перетвореннями знаходимо

$$d_1 = \arccos\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}\right) - \varphi \tag{12}$$

з $\cos\varphi = \dfrac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b_0}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}$,

$$\begin{aligned} a_I &= \rho_0 \frac{\cos\left(\dfrac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos\varphi} = \rho_0 \frac{\cos\left(\arccos\left(\dfrac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}\right)/2 + \varphi/2\right)}{\cos\varphi}, \\ b_I &= \rho_0 \frac{\cos\left(\dfrac{d_1}{2} + \varphi\right)}{\cos\varphi} = \rho_0 \frac{\cos\left(\arccos\left(\dfrac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}\right)/2 + \varphi/2\right)}{\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для a_I та b_I, визначених вище, резольвента оператора A є аналітичною у смузі D_{d_1} по відношенню до $w = \zeta + i\nu$ для будь-якого $t \geq 0$. Зауважимо, що для $\rho_1 = 0$ маємо $d_1 = \pi/2 - \varphi$, як і в [7].

Беручи до уваги (13), ми можемо записати рівняння для $a(\nu)$, $b(\nu)$ на всьому проміжку $-\dfrac{d_1}{2} \leq \nu \leq \dfrac{d_1}{2}$:

$$a(\nu) = a_I \cos\nu + b_I \sin\nu = \sqrt{\rho_0^2 + b_0^2} \cos\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right),$$

$$b(\nu) = b_I \cos\nu - a_I \sin\nu = \sqrt{\rho_0^2 + b_0^2} \sin\left(\frac{d_1}{2} + \varphi - \nu\right),$$

$$\rho_1 \leq a(\nu) \leq \rho_0, \quad b_0 \leq b(\nu) \leq \sqrt{b_0^2 + \rho_0^2 - \rho_1^2}.$$

Далі визначимо умови для $w(s)$, які гарантують існування оператора $B(z)^{-1}$, що відповідає нелокальній умові з (4). Щоб це виконувалось, потрібно, щоб $B(z) \neq 0$ в області, обмеженій гіперболою Γ_I. Тоді

$$\left|1 + \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds\right| \geq 1 - \left|\int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds\right| \geq$$

$$= 1 - \frac{T\|w(s)\|_{C[0,T]}}{Ta_I \cosh(\zeta)} \left(1 - e^{-Ta_I \cosh(\zeta)}\right) \geq 1 - \frac{\|w(s)\|_{C[0,T]}}{a_I} \left(1 - e^{-Ta_I}\right),$$

оскільки функція $\dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ є монотонно спадною для $x > 0$. Таким чином,

$$\left|1 + \int_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds\right|^{-1} \leq \frac{1}{1 - \dfrac{\|w(s)\|_{C[0,T]}}{a_I} \left(1 - e^{-Ta_I}\right)} \leq C_1$$

у випадку, коли

$$\|w(s)\|_{C[0,T]} < \frac{a_I}{1 - e^{-Ta_I}}. \tag{14}$$

Єдиність розв'язку показується елементарно. Отже, справджується наступна лема.

Лема 1. *Нехай A — щільно визначений сильно позитивний оператор* (*секторіальний*). *Якщо виконується умова* (14), *то існує й єдиний розв'язок задачі* (1), *який можна зобразити за допомогою* (9).

Більш грубою оцінкою, ніж (14), є оцінка

$$\|w(s)\|_{C[0,T]} < \frac{1}{T}, \tag{15}$$

яку можна легко отримати з оцінки

$$\left| \int\limits_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \right| \le \|w(s)\|_{C[0,T]} T.$$

3. Чисельний алгоритм. Насамперед наблизимо інтеграл у знаменнику з (8), використавши експоненціально збіжну квадратурну формулу. Для цього можна використати формули Гаусса, Кленшоу – Куртіса або Sinc-квадратуру для інтеграла по обмеженому інтервалу. Для аналітичних підінтегральних функцій ці квадратури забезпечують експоненціальний порядок збіжності. Квадратурна формула Гаусса має швидкість збіжності $O(\rho^{-2n})$, а формула Кленшоу – Куртіса — $O(\rho^{-n})$, де ρ — сума півосей еліпса Бернштейна [17]. Sinc-квадратурна формула має швидкість збіжності $O(e^{-\sqrt{n}})$ [18] і, на відміну від вищезгаданих формул, може бути застосована до інтегралів на необмежених інтервалах. Її швидкість збіжності може бути або $O(e^{-\sqrt{n}})$, або $O(e^{-n/\ln n})$ в залежності від області аналітичності підінтегральної функції. Зважаючи на вищевикладене, ми будемо використовувати квадратурну формулу Гаусса для інтеграла на обмеженому інтервалі і Sinc-квадратуру для інтеграла на всій осі:

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^T w(s) e^{-z(\zeta)s} ds \approx \sum_{j=0}^{n} \frac{T}{2} \omega_j w(\xi_j) e^{-z(\zeta)\xi_j} = \mathcal{I}_n, \tag{16}$$

$$\xi_j = \frac{T}{2}(\theta_j + 1),$$

де $\{\theta_j\}$ — набір з $(n+1)$-го кореня полінома Лежандра $P_{n+1}(x)$ і $\{\omega_j\}$ — множина ваг квадратурної формули Гаусса. Зазначимо, що θ_j разом з ω_j можна обчислити заздалегідь, використовуючи швидкі алгоритми (див. [17]).

Таким чином, з (11) отримуємо

$$u(t) \approx u_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_n(z(\zeta), t) R_A^1(\zeta) z'(\zeta) u_0 d\zeta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(t, \zeta) d\zeta, \tag{17}$$

де

$$F_n(z(\zeta), t) = e^{-z(\zeta)t} \left[1 + \mathcal{I}_n\right]^{-1}.$$

Для оцінки похибки маємо

$$\left|\frac{1}{1+\mathcal{I}} - \frac{1}{1+\mathcal{I}_n}\right| = \left|\frac{\mathcal{I}_n - \mathcal{I}}{(1+\mathcal{I})(1+\mathcal{I}_n)}\right|.$$

Згідно з (14) або (15), перший член зліва обмежений сталою

$$\frac{1}{|1+\mathcal{I}|} \le C.$$

Для другого доданка одержуємо

$$\frac{1}{|1+\mathcal{I}_n|} \le \frac{1}{1 - \left|\dfrac{T}{2}\sum_{j=0}^{n} \omega_j w(\xi_j) e^{-z(\zeta)\xi_j}\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - \dfrac{T\|w(s)\|_{C[0,T]}}{2}\sum_{j=0}^{n} \omega_j e^{-a_I \cosh(\zeta)\xi_j}} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - T\|w(s)\|_{C[0,T]}} \le c = \mathrm{const} \tag{18}$$

у випадку, коли виконується оцінка (15). Отже, маємо

$$\left|\frac{1}{1+\mathcal{I}} - \frac{1}{1+\mathcal{I}_n}\right| \le c\,|\mathcal{I}_n - \mathcal{I}|\,.$$

Експоненціальна функція e^{-zs} є аналітичною відносно s у всій комплексній площині. Тому гладкість підінтегральної функції в $\mathcal{I}$ визначається гладкістю $w(s)$. Використовуючи теорему 19.3 з [17], приходимо до висновку, що якщо $w\left(\dfrac{T}{2}(s+1)\right)$ можна аналітично продовжити в еліпс Бернштейна навколо $[-1,1]$, де $\left|w\left(\dfrac{T}{2}(s+1)\right)e^{-z\frac{T}{2}(s+1)}\right| \le M$, то

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \le \frac{144M\rho^{-2n}}{35(\rho^2-1)}, \quad n \ge 2. \tag{19}$$

Якщо $w(s)$ та її похідні до $(\nu-1)$-го порядку є абсолютно неперервними, а $w^{(\nu)}$ має обмежену варіацію V, то

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n| \le \frac{32V}{15\pi\nu(n-2\nu-1)^{2\nu+1}}, \quad n > 2\nu+1. \tag{20}$$

За припущення, що $u_0 \in D(A^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, у [8] було показано, що

$$\left\|e^{-z(\zeta)t} z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_0\right\| \le (1+M)K\frac{b_I}{a_I}\left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha e^{-a_I t\cosh\zeta - \alpha|\zeta|}\|A^\alpha u_0\|,$$

$$\zeta \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0, \tag{21}$$

де K — стала, що залежить від α, M — стала з оцінки (6).

Частина, що відповідає нелокальній умові в (17), оцінюється у (18). Таким чином, ми отримаємо наступну оцінку для $\mathcal{F}_n(t,\zeta)$:

$$\|\mathcal{F}_n(t,\zeta)\| \le C(\varphi,\alpha)e^{-a_I t\cosh\zeta-\alpha|\zeta|}\|A^\alpha u_0\|,$$
$$C(\varphi,\alpha)=\frac{(1+M)Kcb_I}{2\pi a_I}\left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha,\quad \zeta\in\mathbb{R},\quad t\ge 0. \tag{22}$$

Далі ми наблизимо інтеграл (17) Sinc-квадратурною формулою [8, 18]

$$u_{n,N}(t)=h\sum_{k=-N}^{N}\mathcal{F}_n(t,z(kh)) \tag{23}$$

з похибкою

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n,h)\|=\|u_n(t)-u_{n,N}(t)\|\le$$
$$\le\left\|u_n(t)-h\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_n(t,z(kh))\right\|+\left\|h\sum_{|k|>N}\mathcal{F}_n(t,z(kh))\right\|\le$$
$$\le\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)}\|\mathcal{F}_n\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}+C(\varphi,\alpha)h\|A^\alpha u_0\|\sum_{k=N+1}^{\infty}e^{-a_I t\cosh kh-\alpha kh}.$$

Тут $\mathbf{H}^1(D_d)$ — простір усіх векторнозначних функцій $\mathcal{F}$, аналітичних у смузі D_d, що введений аналогічно до [18] у [8]. Згідно з [8]

$$\|e^{-z(\cdot)t}z'(\cdot)R_A^1(\cdot)u_0\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}\le\|A^\alpha u_0\|[C_-(\varphi,\alpha,\delta)+$$
$$+C_+(\varphi,\alpha,\delta)]\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\xi|}d\xi=C(\varphi,\alpha,\delta)\|A^\alpha u_0\|, \tag{24}$$

де

$$C(\varphi,\alpha,\delta)=\frac{2}{\alpha}[C_+(\varphi,\alpha,\delta)+C_-(\varphi,\alpha,\delta)],$$
$$C_\pm(\varphi,\alpha,\delta)=(1+M)K\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\pm\frac{d}{2}\right)\left(\frac{2\cos\varphi}{a_0\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\pm\frac{d}{2}\right)}\right)^\alpha, \tag{25}$$
$$d=d_1-\delta$$

для довільного малого додатного δ.

Очевидно, що у випадку виконання (15) частина, що відповідає нелокальній умові, обмежена в D_d. Це дає змогу отримати оцінку

$$\|\mathcal{F}_n(t,\zeta)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}\le C(\varphi,\alpha,\delta)\|A^\alpha u_0\|.$$

Отже, для $\eta_N(\mathcal{F}_n,h)$ справджується оцінка

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n,h)\| \le \frac{c\|A^\alpha u_0\|}{\alpha}\left\{\frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + e^{-a_I t\cosh((N+1)h)-\alpha(N+1)h}\right\}, \tag{26}$$

де стала c не залежить від h, N, t.

Прирівнюючи обидві експоненти при $t=0$, маємо

$$\frac{\pi d}{h} = \alpha(N+1)h,$$
$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}}, \tag{27}$$

що приводить до наступної оцінки похибки:

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n,h)\| \le \frac{c}{\alpha}\exp\Big(-\sqrt{\pi d\alpha(N+1)}\Big)\|A^\alpha u_0\|. \tag{28}$$

У випадку $t>0$ перший доданок в аргументі $e^{-a_I t\cosh((N+1)h)-\alpha(N+1)h}$ з (26) більше впливає на похибку. Покладаючи для цього випадку $h = c_1\ln(N+1)/(N+1)$ з деякою додатною сталою c_1, отримуємо для фіксованого t оцінку

$$\|\eta_N(\mathcal{F}_n,h)\| \le c\left[e^{-\pi d\frac{N+1}{c_1\ln(N+1)}} + e^{-c_2 t a_I (N+1)^{c_1} - c_1\alpha\ln(N+1)}\right]\|A^\alpha u_0\|, \tag{29}$$

де $c_2 = \dfrac{1+(N+1)^{-2c_1}}{2}$. Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай A — щільно визначений позитивний оператор, $u_0 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ і виконуються умови* (15). *Тоді* Sinc-*квадратура* (23) *є апроксимацією $u_n(t)$ з експоненціальною швидкістю збіжності* (28), *рівномірною по $t \ge 0$ для кроку h, визначеного в* (27). *Апроксимація має швидкість збіжності* (29) *для випадку $t > 0$ та $h = c_1\ln(N+1)/(N+1)$.*

Зауваження **1.** Крива інтегрування Γ_I є симетричною відносно дійсної осі. Тому $z(-kh) = \overline{z(kh)}$ і $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$. Наближення (23) можна записати у вигляді

$$u_{n,N}(t) = \frac{h}{2\pi i}\mathcal{F}_n(t,z(0)) + \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{N} h\frac{\mathcal{F}_n(t,z(kh))}{\pi i}\right],$$

що зменшує кількість обчислень резольвенти вдвічі.

Тепер розглянемо оцінку повної похибки наближення:

$$\varepsilon_1 = \|u(t)-u_n(t)\| = \left\|\int_{-\infty}^{\infty}[\mathcal{F}(t,\zeta)-\mathcal{F}_n(t,\zeta)]\,d\zeta\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-z(\zeta)t}\zeta'(\zeta)\right|\left|\frac{1}{1+\mathcal{I}} - \frac{1}{1+\mathcal{I}_n}\right|\left\|R_A^1(\zeta)u_0\right\|d\zeta. \tag{30}$$

За допомогою (21) оцінку (30) можна перетворити до вигляду

$$\varepsilon_1 = \frac{(1+M)Kb_I c}{2\pi a_I}\left(\frac{2}{a_I}\right)^{\alpha}\|A^{\alpha}u_0\|\,|\mathcal{I}-\mathcal{I}_n|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a_I t\cosh\zeta-\alpha|\zeta|}d\zeta \le$$

$$\le \frac{(1+M)Kb_I c}{\pi a_I\alpha}\left(\frac{2}{a_I}\right)^{\alpha}\|A^{\alpha}u_0\|\,|\mathcal{I}-\mathcal{I}_n| = C\,\|A^{\alpha}u_0\|\,|\mathcal{I}-\mathcal{I}_n|\,.$$

Тоді для оцінки повної похибки маємо

$$\|u(t)-u_{n,N}(t)\| \le \varepsilon_1 + \|\eta_N(\mathcal{F}_n,h)\|\,. \tag{31}$$

Це дозволяє сформулювати основну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді* (23) *дає зображення наближення до* $u(t)$ *з експоненціальною швидкістю збіжності у випадку, коли* $w(t)$ *має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна.*

4. Числові приклади.

***Приклад* 1.** Розглянемо задачу (1) з оператором A, визначеним як

$$D(A) = \{v(x)\in H^2(0,1)\colon v(0)=v(1)=0\},$$

$$Av = -v''(x) \quad \forall v\in D(A),$$

що генерує однорідне параболічне рівняння з крайовими умовами

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Доповнимо цю задачу нелокальною інтегральною умовою

$$u(x,0) + \int\limits_0^{\pi/2}\cos(s)u(x,s)ds = \frac{\pi^4+\pi^2+e^{-\pi^3/2}}{\pi^4+1}\sin(\pi x).$$

У цьому випадку точним розв'язком цієї задачі є $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$. Ми виконували обчислення в середовищі Maple. Похибки наведено в табл. 1, 2 для різної кількості вузлів n квадратури (16) і Sinc-вузлів N квадратури (23). Дані, наведені в таблицях, свідчать про експоненціальне спадання похибки згідно з отриманою теоретичною оцінкою (31).

***Приклад* 2.** Розглянемо таку ж задачу, як і в прикладі 1, але з іншою нелокальною умовою

$$u(x,0) + \int\limits_0^{\pi/2}\cos(s^2)u(x,s)ds = (1-x)x^2.$$

Результати обчислень наведено в табл. 3 для різної кількості числа вузлів n квадратури (16) та Sinc-вузлів N квадратури (23). Розряди, що стабілізувались, у таблиці виділено жирним.

Таблиця 1. Похибка для $x = 0.5$, $t = 1$

N	$n=4$	$n=8$	$n=16$
4	0.001074121004		
8	0.000004530997940	0.00000418248071	
16	$2.394152400 * 10^{-7}$	$7.3086845013760 * 10^{-10}$	$7.159165797001 * 10^{-10}$
32	$2.387505905 * 10^{-7}$	$8.2307398421915 * 10^{-12}$	$2.609087146562 * 10^{-13}$
64		$7.9836951021369 * 10^{-12}$	$2.917976861643 * 10^{-18}$
128			$1.622297889726 * 10^{-24}$
256			$1.873772451287 * 10^{-24}$

Таблиця 2. Похибка для $x = 0.5$, $t = 1$

N	$n=32$	$n=64$
128	$2.559484448336975 * 10^{-25}$	
256	$2.398463850885652 * 10^{-35}$	$2.3984646885635428 * 10^{-35}$
512	$1.564339690250043 * 10^{-49}$	$1.5716982365989911 * 10^{-49}$
1024		$8.2307398421915 * 10^{-69}$

Таблиця 3. Розв'язок задачі для $x = 0.4$, $t = 1$

$n = 4$, $N = 32$	$0.\mathbf{59}79651691 * 10^{-4}$
$n = 8$, $N = 64$	$0.\mathbf{595184}68726419642720040295770 9 * 10^{-4}$
$n = 16$, $N = 128$	$0.\mathbf{59518455382318934211}3182135931 * 10^{-4}$
$n = 32$, $N = 256$	$0.\mathbf{59518455382318934214342993705}0 * 10^{-4}$
$n = 64$, $N = 512$	$0.\mathbf{595184553823189342143429937049} * 10^{-4}$
$n = 128$, $N = 1024$	$0.\mathbf{595184553823189342143429937049} * 10^{-4}$

1. *Самарский А. А.* Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925 – 1935.
2. *Leung A. W., Chen G.-S.* Optimal control of multigroup neutron fission systems // Appl. Math. and Optim. – 1999. – **40**, № 1. – P. 39 – 60.
3. *Leung A. W., Ortega L. A.* Existence and monotone scheme for time-periodic nonquasimonotone reaction-diffusion systems: application to autocatalytic chemistry // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **221**, № 2. – P. 712 – 733.
4. *Gordeziani D., Avalishvili G.* Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations // Hiroshima Math. J. – 2001. – **31**, № 3. – P. 345 – 366.
5. *Huyer W.* Approximation of a linear age-dependent population model with spatial diffusion // Commun. Appl. Anal. – 2004. – **8**, № 1. – P. 87 – 108.
6. *Sinestrari E., Webb G. F.* Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – **121**, № 2. – P. 449 – 464.
7. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – **43**, № 5. – P. 2144 – 2171.
8. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Vasylyk V. B.* Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations // Front. Math. – Basel: Birkhäuser, 2011. – viii+180 p.
9. *López-Fernández M., Palencia C., Schädle A.* A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms // SIAM J. Numer. Anal. – 2006. – **44**. – P. 1332 – 1350.
10. *López-Fernández M., Lubich C., Palencia C., Schädle A.* Fast Runge – Kutta approximation of inhomogeneous parabolic equations // Numer. Math. – 2005. – **102**, № 2. – P. 277 – 291.
11. *Sheen D., Sloan I. H., Thomée V.* A parallel method for time discretization of parabolic equations based on Laplace transformation and quadrature // IMA J. Numer. Anal. – 2003. – **23**, № 2. – P. 269 – 299.
12. *Thomée V.* A high order parallel method for time discretization of parabolic type equations based on Laplace transformation and quadrature // Int. J. Numer. Anal. Model. – 2005. – **2**. – P. 121 – 139.
13. *Weideman J. A. C.* Optimizing Talbot's contours for the inversion of the Laplace transform // SIAM J. Numer. Anal. – 2006. – **44**, № 6. – P. 2342 – 2362.
14. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Sytnyk D. O., Vasylyk V. B.* Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 2010. – **31**, № 1-3. – P. 1 – 21.
15. *Clément Ph., Heijmans H. J. A. M., Angenent S. et al.* One-parameter semigroups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1987. – x+312 p.
16. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
17. *Trefethen L. N.* Approximation theory and approximation practice. – Philadelphia, PA: SIAM, 2013. – viii+305 p.
18. *Stenger F.* Numerical methods based on Sinc and analytic functions. – New York etc.: Springer-Verlag, 1993.

Одержано 02.07.13,
після доопрацювання — 19.11.13