УДК 517.5

В. М. Дільний (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ІНВАРІАНТНІ ПІДПРОСТОРИ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ГАРДІ

We consider the description of translation invariant subspaces of a weighted Hardy space in the half plane. The obtained result includes the Beurling – Lax theorem for the Hardy space as a special case. We discuss the problem of generalization of the definition of inner function.

Представлено описание трансляционно-инвариантных подпространств в одном весовом пространстве Харди в полуплоскости. Полученный результат содержит как частный случай теорему Берлинга – Лакса для пространства Харди. Обсуждается вопрос об обобщении понятия внутренней функции.

1. Вступ. Нехай $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty,$ — простір Гарді аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій, що задовольняють умову

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Цьому простору присвячено велику кількість досліджень. Необхідні нам властивості простору $H^p(\mathbb{C}_+)$ містяться, наприклад, у монографії [1]. Зокрема, кожна функція $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на уявній осі кутові граничні значення $f(iy)$ і $f(iy) \in L^p(-\infty; +\infty)$. Простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, є банаховими і

$$\|f\|_{H^p} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p dy \right\}^{1/p}.$$

Окрім цього (див. [2]), простір $H^p(\mathbb{C}_+)$ можна визначити і як простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\|f\|^*_{H^p} = \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} \bigl|f(re^{i\varphi})\bigr|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty,$$

причому $2^{-1/p}\|f\|_{H^p} \le \|f\|^*_{H^p} \le \|f\|_{H^p}$. Для $p = 2$ цей результат раніше встановив М. М. Джрбашян [3]. Для кожної функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty$, існує сингулярна гранична функція h_f, що визначена з точністю до адитивної сталої та значень у точках неперервності рівністю

$$h_f(t_2) - h_f(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \log\bigl|f(x+iy)\bigr|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \log\bigl|f(iy)\bigr|dy. \tag{1}$$

Функція h_f є незростаючою і $h'_f(t) = 0$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$. Справджується також наступне твердження [1].

Лема 1. *Якщо* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$ *і* $f \not\equiv 0$, *то має місце зображення*

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(1+t^2)(t+iz)} \log\big|f(it)\big| dt \right\} \cdot B_f(z) \cdot S_f^*(z),$$

де $a_0 \in \mathbb{R}$, B_f — *добуток Бляшке, побудований за послідовністю нулів функції* f,

$$a_1 = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\log\big|f(x)\big|}{x} \le 0,$$

$$S_f^*(z) = \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(1+t^2)(t+iz)} dh(t) \right\}.$$

Функцію $I_f(z) := e^{a_1 z} B_f(z) S_f^*(z)$ називають внутрішнім множником функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$. Відомо, що коли $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, то $f / I_f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ і $I_f f_1 \in H^p(\mathbb{C}_+)$ для кожної функції $f_1 \in \in H^p(\mathbb{C}_+)$. Через $\mathrm{SP}(G, H)$ позначатимемо замикання лінійної оболонки системи $\big\{G(z) e^{\tau z} \colon \tau \le \le 0\big\}$ в банаховому просторі H. Функція $G \in H$ називається циклічною в банаховому просторі H, якщо $\mathrm{SP}(G, H) = H$. П. Лакс [4], модифікуючи результати А. Бьорлінга [5], встановив, що функція $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли I_G є константою. Він також показав, $\mathrm{SP}\big(G, H^p(\mathbb{C}_+)\big) = I_G \cdot H^2(\mathbb{C}_+)$. Різноманітні застосування цих результатів та їх узагальнення можна знайти в [11 – 13].

Б. Винницький [6] розглянув простір функцій $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \ge 0, 1 \le p < +\infty$, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\|_{H_\sigma^p}^p := \sup_{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \big|f(re^{i\varphi})\big|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Функції з цього простору мають майже скрізь на уявній осі кутові граничні значення $f(iy)$, $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$ і [14]

$$\|f\|_{H_\sigma^p}^p = \max_{\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}\right\}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \big|f(re^{i\varphi})\big|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}.$$

Цей простір є банаховим. Функція $f \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ має сингулярну граничну функцію h_f, що визначається рівністю (1). При цьому h_f є незростаючою, $h'(t) = 0$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$.

Нехай $\log z$ — така гілка натурального логарифма в $\mathbb{C}_+$, що $\log 1 = 0$. У статтях [7 – 10] показано, що функція $G \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли $G(z) \ne 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$, $h_G \equiv \mathrm{const}$ і

$$G(z) \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz \right) \notin H^2(\mathbb{C}_+) \quad \text{для кожного } c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Метою цієї статті є дослідження $\mathrm{SP}\big(G, H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)\big)$ у випадку, коли умова (2) не виконується.

2. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай* $\sigma > 0$, $\mu(z) = e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} e^{-cz}$ *і функція* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *є такою, що*

$$\chi(z) := G(z)\mu(z) \in H^2(\mathbb{C}_+) \tag{3}$$

для деякого $c \in \mathbb{R}$. *Тоді* $\mathrm{SP}\big(G, H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)\big) = \dfrac{1}{\mu} I_\chi H^2(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. Нехай $Q \in \mathrm{SP}(G, H^2_\sigma\big(\mathbb{C}_+)\big)$. Тоді знайдеться послідовність η_n скінченних лінійних комбінацій функцій системи $\big\{e^{\tau z} \colon \tau \le 0\big\}$ така, що послідовність $(G\eta_n)$ збігається в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до Q. Тоді послідовність $(G\eta_n)$ є фундаментальною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Але $\big|\mu(z)\big| = e^{-\frac{2\sigma}{\pi} r\varphi \sin\varphi + \frac{2\sigma}{\pi} x \log x - cx}$, якщо $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$. Тому $G\eta_n\mu \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Окрім цього,

$$\big\|G\eta_n - G\eta_m\big\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \ge \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy) - G(iy)\eta_m(iy)\big|^2 \big|\mu(iy)\big|^2 dy \ge$$

$$\ge \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy)\mu(iy) - G(iy)\eta_m(iy)\mu(iy)\big|^2 dy,$$

тому $(G\eta_n\mu)$ є фундаментальною у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$. Оскільки $I_\chi(iy) = 1$ майже скрізь і $G\eta_n\mu/I_\chi \in H^2(\mathbb{C}_+)$, то послідовність $(G\eta_n\mu/I_\chi)$ також є фундаментальною у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$. Нехай $G\eta_n\mu/I_\chi \xrightarrow{H^2(\mathbb{C}_+)} \nu \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тоді $G\eta_n\mu \xrightarrow{H^2(\mathbb{C}_+)} \nu I_\chi$. Отже, $G(z)\eta_n(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} e^{-cz} \to \nu(z)I_\chi(z)$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$. Тому $G(z)\eta_n(z) \to \nu(z)I_\chi(z)e^{\frac{-2\sigma}{\pi} z \log z} e^{cz}$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$. З іншого боку, $G(z)\eta_n(z) \to Q(z)$ у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тому $G(z)\eta_n(z) \to Q(z)$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$. Отже, $Q(z) = \nu(z)I_\chi(z)e^{\frac{-2\sigma}{\pi} z \log z} e^{cz} = \nu(z)I_\chi(z)/\mu(z)$ для деякої функції $\nu \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тому якщо $Q \in \mathrm{SP}\big(G, H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)\big)$, то $Q \in \dfrac{1}{\mu} I_\chi \mathrm{SP}\big(G, H^2(\mathbb{C}_+)\big)$.

Нехай тепер $Q \in \dfrac{1}{\mu} I_\chi H^2(\mathbb{C}_+)$. Тоді $Q = I_\chi \nu/\mu$ для деякої функції $\nu \in H^2(\mathbb{C}_+)$. За теоремою Лакса – Бьорлінга знайдеться послідовність η_n скінченних лінійних комбінацій функцій системи $\big\{e^{\tau z} \colon \tau \le 0\big\}$ така, що послідовність $(\eta_n\chi)$ збігається в $H^2(\mathbb{C}_+)$ до νI_χ. Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy) - Q(iy)\big|^2 e^{-2\sigma|y|} dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy) - Q(iy)\big|^2 \big|\mu(iy)\big|^2 dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy)\mu(iy) - Q(iy)\mu(iy)\big|^2 dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|\eta_n(iy)\chi(iy) - \nu(iy)I_\chi(iy)\big|^2 dy \to 0, \quad n \to \infty.$$

Окрім цього,

$$\int\limits_0^{+\infty} \big|G(x)\eta_n(x) - Q(x)\big|^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \left|\eta_n(x)\frac{\chi(x)}{\mu(x)} - \frac{\nu(x)I_\chi(x)}{\mu(x)}\right|^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \big|\eta_n(x)\chi(x) - \nu(x)I_\chi(x)\big|^2 \frac{1}{\mu^2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \big|\eta_n(x)\chi(x) - \nu(x)I_\chi(x)\big|^2 e^{-\frac{4\sigma}{\pi}x\log x + 2cx} dx \le c_1 \int\limits_0^{+\infty} \big|\eta_n(x)\chi(x) - \nu(x)I_\chi(x)\big|^2 dx$$

для деякої сталої c_1. Оскільки

$$\int\limits_0^{+\infty} \big|\eta_n(x)\chi(x) - \nu(x)I_\chi(x)\big|^2 dx \to 0, \quad n \to +\infty,$$

то

$$\int\limits_0^{+\infty} \big|G(x)\eta_n(x) - Q(x)\big|^2 dx \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Окрім цього,

$$\big\|G\eta_n - Q\big\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} = \max\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \big|G(iy)\eta_n(iy) - Q(iy)\big|^2 e^{-2\sigma|y|} dy\,;\right.$$

$$\left.\int\limits_{-\infty}^{0} \big|G(iy)\eta_n(iy) - Q(iy)\big|^2 e^{-2\sigma|y|} dy;\ \int\limits_0^{+\infty} \big|G(x)\eta_n(x) - Q(x)\big|^2 dx \right\}.$$

Тому $G\eta_n \xrightarrow{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} Q$, якщо $n \to \infty$. Отже, $Q \in \mathrm{SP}\big(G, H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)\big)$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\sigma > 0$, $\mu(z) = e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z - cz}$ *і функція* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *є такою, що виконується умова* (3) *для деякого* $c \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$SP(G; H^2_\sigma\big(\mathbb{C}_+)\big) = \frac{1}{\widetilde{\mu}} I_{\widetilde{\chi}} H^2(\mathbb{C}_+), \tag{4}$$

де

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\ln|G(x)| + \dfrac{2\sigma}{\pi}x\log x}{x} \right), \qquad \widetilde{\chi}(z) := G(z)\widetilde{\mu}(z), \qquad \widetilde{\mu}(z) = e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z - \widetilde{c}z}.$$

Доведення. Оскільки $\chi(z) = G(z)\mu(z) \in H^2(\mathbb{C}_+)$, то $\overline{\lim}_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|G(x)| + \frac{2\sigma}{\pi}x\log x - cx}{x} \leq$ ≤ 0. Тому $\widetilde{c} \leq c$. Окрім цього, функція $\widetilde{\chi}(z) := G(z)\widetilde{\mu}(z)$ належить до $H^2(\mathbb{C}_+)$, бо $\widetilde{\chi}(z) :=$ $:= G(z)\widetilde{\mu}(z) = G(z)\mu(z)\dfrac{\widetilde{\mu}(z)}{\mu(z)} = G(z)\mu(z)e^{(c-\widetilde{c})z} = \chi(z)e^{(c-\widetilde{c})z}$ і $c - \widetilde{c} \leq 0$, до того ж $I_{\widetilde{\chi}}(z) = I_\chi(z)e^{(c-\widetilde{c})z}$ і $\dfrac{1}{\widetilde{\mu}(z)}I_{\widetilde{\chi}}(z) = \dfrac{1}{e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z - \widetilde{c}z}}I_\chi(z)e^{(c-\widetilde{c})z} = \dfrac{1}{e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z - cz}}I_\chi(z) = \dfrac{1}{\mu(z)}I_\chi(z)$. Тому виконується (4).

***Зауваження* 1.** Оскільки $\big|\mu(z)\big| = e^{-\frac{2\sigma}{\pi}r\varphi\sin\varphi + \frac{2\sigma}{\pi}x\log x - cx}$, то з умови $G(z)\mu(z) \in H^2(\mathbb{C}_+)$ випливає, що $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

***Зауваження* 2.** Якщо виконуються умови теореми 2, то функцію $I^*_G = \dfrac{1}{\widetilde{\mu}}I_{\widetilde{\chi}}$ природно назвати внутрішнім множником функції $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

1. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75 – 82.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
4. *Lax P.* Translation invariant subspaces // Acta math. – 1959. – **101**. – P. 163 – 178.
5. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space // Acta Math. – 1949. – **81**, № 1. – P. 239 – 255.
6. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
7. *Vinnitskii B., Dil'nyi V.* On extension of Beurling – Lax theorem // Math. Notes. – 2006. – **79**. – P. 362 – 368.
8. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1257 – 1263.
9. *Дільний В. М.* Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Доп. НАН України. – 2008. – **11**. – С. 7 – 10.
10. *Dilnyi V.* On cyclic functions in weighted hardy spaces // Журн. мат. фізики, аналізу, геометрії. – 2011. – **7**. – С. 19 – 33.
11. *Nikolski N. K.* Operatos, functions and systems: an easy reading. – Amer. Math. Soc., 2002. – Vol. 1, 2.
12. *Амосов Г. Г., Баранов А. Д., Капустин В. В.* О применении модельных пространств для построения коциклических возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой // Уфим. мат. журн. – 2012. – **4**, № 1. – С. 17 – 28.
13. *Амосов Г. Г., Баранов А. Д., Капустин В. В.* О возмущениях изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой // Алгебра и анализ. – 2010. – **22**, № 4. – С. 1 – 20.
14. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы типа Винера – Пели и Мюнца – Саса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **41**. – С. 868 – 894.

Одержано 28.01.13,
після доопрацювання — 11.01.14