УДК 517.925.5:519.216

С. С. Жуматов (Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Sufficient conditions for the asymptotic and uniform asymptotic stability of implicit differential systems in a neighborhood of the program manifold are established. Sufficient conditions of stability are also obtained for the known first integrals. A class of implicit systems for which it is possible to find the derivative of the Lyapunov function is selected.

Встановлено достатні умови асимптотичної та рівномірної асимптотичної стійкості неявних диференціальних систем в околі програмного многовиду. Отримано також достатні умови стійкості при відомих перших інтегралах. Виділено клас неявних систем, для яких можливо обчислити похідну функції Ляпунова.

Введение. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В общем случае такие системы имеют вид

$$f(t,x,\dot{x})=0, \quad f\in R^s, \quad x\in R^n\ (s\leq n), \quad t\in(\alpha,\beta). \tag{1}$$

Неявный характер этой системы порождает ряд трудностей, связанных с существованием и единственностью, устойчивостью и ограниченностью решений. В работе [1] такие системы названы неявными дифференциальными системами, введены понятия устойчивости и ограниченности решений относительно заданных нелинейных функций. Получены достаточные условия устойчивости и ограниченности, где явно фигурируют эти функции. В [2, 3] исследованы особые точки неявных систем дифференциальных уравнений (1) при $s=n$. Рассмотрены особые точки определенного типа, называемые правильными, которые являются в некотором смысле типичными для уравнения общего положения. Показано, что среди правильных особых точек встречаются, в основном, точки трех типов: точки ветвления (существуют ровно два решения, выходящие из данной точки, и нет ни одного входящего решения), точки остановки (существуют ровно два решения, входящие в данную точку, и нет ни одного выходящего решения) и точки единственности (существуют одно решение, выходящее из данной точки, и одно входящее). Установлено, что если функция f достаточно гладкая, то в окрестности правильной особой точки решение $x(t)$ представимо в виде композиции гладкой функции и корня из t некоторой степени. В [4, 5] для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения с конечными соотношениями, не разрешенного относительно производной, строится другое дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной и не содержащее конечных соотношений.

Важно отметить, что частным случаем системы (1) является система вида

$$H(t,x(t))\dot{x}=f(t,x), \quad H\in R^{s\times n}, \quad f\in R^s, \quad x\in R^n\ (s\leq n), \quad t\in(\alpha,\beta). \tag{2}$$

Модели вида (2) известны под названиями сингулярных систем, обобщенных систем пространственного состояния или дифференциально-алгебраических систем. В работах [6 – 8] изучались свойства систем при $s=n$, когда при старшей производной стоит матрица, у которой детерминант равен нулю, установлены условия приводимости к канонической форме и условия разрешимости задачи Коши, исследованы вопросы существования периодических решений.

Исследования этих систем при $s = n$ и постоянной матрице H, детерминант которой равен нулю, а функция f является линейной относительно x с постоянной матрицей f_0, тесно переплетается с работами К. Вейерштрасса и Л. Кронекера [9, 10] по теории матричных пучков. Начиная с семидесятых годов XX столетия эти системы в случае, когда указанные матрицы являются переменными, исследовались и исследуются на предмет существования и единственности решений, приведения к канонической форме, приводимости к системам с постоянными матрицами, построения вычислительных алгоритмов решения вырожденных линейных систем.

В перечисленных работах неявные дифференциальные системы исследовались относительно нулевой точки равновесия. Мы исследуем эти системы в окрестности программного многообразия.

В работе [11] получены достаточные условия устойчивости и притягиваемости программного многообразия неявных дифференциальных систем.

Предположим, что векторная функция $f(t, x, \dot{x})$ обеспечивает существование решений системы (1). Под решением системы (1) будем понимать непрерывную функцию времени t, существующую на временном интервале $T \subseteq I$, которая всюду в $T \backslash S$ удовлетворяет уравнению (1), где S — не более чем счетное множество.

Программное многообразие $\Omega(t)$ задается следующим образом:

$$\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0, \quad \omega \in R^s \quad (s \leq n). \tag{3}$$

Обозначим через Φ множество, образованное при $t \in [t_0, \beta)$ значениями $x(t, t_0, x_0)$ всех решений $x(t)$, существующих на $[t_0, \beta)$, $t_0 \in \bar{T}$, где $\bar{T}$ — связное множество всевозможных начальных моментов, а через Ψ многозначную функцию, которая имеет свойство $\Phi(t_0, t) \subset \subset \Psi(t_0, t)$, $t_0 \leq t$. Пусть $x_u(t)$ — известное решение системы (1), $\omega(t,\ x_u(t)) = 0$.

Введем некоторые векторные функции q, p, l, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered}
\bar{Q}(t, \varepsilon) = \{x \in R^n \colon |q(t, \omega) - q(t, 0)| \leq \varepsilon\}, \quad q(t, \omega) \in R^q, \\
\bar{P}(t, \varepsilon) = \{x \in R^n \colon |p(t, \omega) - p(t, 0)| \leq \varepsilon\}, \quad p(t, \omega) \in R^p, \\
\bar{L}(t, \varepsilon) = \{x \in R^n \colon |l(t, \omega) - l(t, 0)| \leq \varepsilon\}, \quad l(t, \omega) \in R^l.
\end{gathered} \tag{4}$$

Ставится задача: получить условия асимптотической устойчивости программного многообразия неявной системы (1) относительно функций q, p, l.

Асимптотическая устойчивость программного многообразия. Для решения поставленной задачи введем следующие множества и определения:

$$B_\varepsilon = Q(t, \varepsilon) \bigcap \Phi(t_0, t),$$

$$B_\delta(\varepsilon) = B_\delta \bigcap B_\varepsilon,$$

$$\bar{A}_\varepsilon = \bar{L}(t, \varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t_0, t).$$

Определение 1. *Пусть* $S(t) \in S_p(R^n),\ t \in I$, *где* $S_p(R^n)$ — *множество всех непустых связных подмножеств из* R. *Тогда существует предел* $\lim_{t\to\infty} S(t) = L$, *если можно найти* $L \in S_p(R^n)$ *и* $r_0 > 0,\ r_0 \in R$, *и для любой подпоследовательности* $T_s = \{t_k\}$, *сходящейся к* S, *для любых* $\varepsilon \in (0, \infty)$ *и* $r \in (r_0, \infty)$ *существует такое* $m(s, \varepsilon, r)$, *что*

$$\big([S(t_k) \cap H(r)] \triangle [L \cap H(r)]\big) \subset N\big(\partial[L \cap H(r)], \varepsilon\big) \quad \forall\, k \in (m, \infty), \quad t_k \in T_s.$$

Здесь $N(S, m) = [x \in R^n \colon d(x, S) < m],\ m$ — *окрестность множества* S.

Множество $S(t)$ ограничено на I, если существует такое ограниченное множество S_b, что для любого $t \in I$ имеем $S(t) \subset S_b$. Известно, что если $S(t)$ и L — ограниченные множества на I, то существует такое $r_0 > 0,\ r_0 \in R$, что $S(t) \subset H(r_0),\ L \subset H(r_0)$, поэтому $S(t) \cap H(r_0) = S(t)$ и $L \cap H(r_0) = L$.

Определение 2. *Программное многообразие* $\Omega(t)$ *неявной дифференциальной системы* (1) *называется асимптотически устойчивым относительно заданных функций* $q, p, l, c,\ c \geq 0$, *если оно устойчиво относительно* q, p *и для любого* $t_0 \in T,\ T \subseteq I$, *существует такое* $m(t_0) > 0$, *что для любого* $x_0 \in B_m(t_0)$ *и* $t < t_1$ *имеет место соотношение* $\lim_{t\to t_1} \omega(t, t_0, x_0) = \lim_{t\to t_1} \bar{A}_c$. *Здесь* $\bar{A}_c = \bar{L}(t, c) \bigcap \bar{\Psi}(t_0, t)$.

Определение 3. *Программное многообразие неявной дифференциальной системы* (1) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Определение 4. *Пусть* $S(t) \in S_p(R^n),\ t \in I$. *Тогда*:

1) *множество* $S(t)$ *называется непрерывным для любого* $t \in I$, *если* $S(t) \colon t \to s = S(s)\ \ \forall\, t \in I$;

2) *множество* $S(t)$ *называется асимптотически сжимающимся на* $S_*(t)$, *если*:

а) $S(t)$ *непрерывна на* I;

б) $S_*(t) \subset S(t)\ \ \forall t \in I$;

в) $\lim_{t\to t_1} S(t) = \lim_{t\to t_1} S_*(t)$.

Для формулировки основных результатов введем следующие обозначения:

$$a(t, \omega) = p(t, \omega) - p(t, 0),$$

$$D(t_0, t, \Phi) = P(t, \gamma) \bigcap \Phi(t_0, t), \gamma > 0,$$

$$D^+ f(t_0) = \lim_{t\to t_0^+} \sup \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

и для любой $v > 0$, удовлетворяющей условию $\bar{B}_v \subset B$, где $B \subset R^n$ — открытая область, положим

$$V_v = \{x \in R^n \colon V(t, q(t, \omega)) \leq \theta(v)\}.$$

Здесь D^+ — правая верхняя производная Дини.

Теорема 1. *Пусть заданы функции* $q, p, l,$ *удовлетворяющие условию* (4), *и существуют непрерывная функция* $V,$ *которая является локально липшицевой по* $x,$ *и решение* $x_u(t) \in \in D(t_0, t, \Phi)$ *такие, что*:

1) $\Phi(t_0, \delta) \neq \varnothing \ \forall \delta > 0 \ \forall t_0 \in T;$

2) $V(t, q(t, 0)) \equiv 0, \, \theta(\|a(t, \omega)\|) \leq V(t, q(t, \omega));$

3) $P(\cdot, \varepsilon)$ *не затухает для любого* $\varepsilon \in (0, \gamma);$

4) $D^+ V(t, q(t, \omega)) \leq 0;$

5) *множество* $A(\cdot, \varepsilon)$ *является асимптотически сжимающимся на множестве* $\bar{A}(\cdot, t, c).$

Тогда программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) *асимптотически устойчиво относительно функций* $q, p, l, c,\ c \geq 0.$

Доказательство. Пусть заданы $t_0 \in T, \varepsilon > 0$ и $q, p, l,$ — функции, удовлетворяющие условиям (4), в частности

$$\bar{L}(t, c) = \{x \in R^n \colon |l(t, \omega) - l(t, 0)| \leq c, \ c \geq 0\}, \ \ l(t, \omega) \in R^l. \tag{5}$$

Программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) устойчиво относительно функций q, p при выполнении условий 1 – 4, т. е. для любого $x_0 \in B_\delta(\varepsilon)$ и $t_0 \in \bar{T}_i$ имеет место $\omega(t, t_0, x_0) \in \bar{A}_\varepsilon$, где $\bar{A}_\varepsilon = \bar{P}(t, \varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t_0, t)$. Согласно условию 5 теоремы выполняются соотношения

$$\bar{A}_c \subset \bar{A}_\epsilon, \quad \bar{A}_c = \bar{L}(t, c) \bigcap \bar{\Psi}(t_0, t), \quad \lim_{t \to t_1} \bar{A}(t, \varepsilon) = \lim_{t \to t_1} \bar{A}(t, c). \tag{6}$$

Приняв во внимание условия 2 и 4 теоремы, установим, что функция $V(t) = V(t, q(t, \omega(t)))$ ограничена снизу, монотонно убывает и имеет конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = \alpha \geq 0, \tag{7}$$

где α не может быть положительным [12].

Множество $\bar{A}_c$ ограничено, так как $\bar{A}_\varepsilon$ является ограниченным множеством, поэтому существует такое $r_0 > 0, \ r_0 \in R$, что $\bar{A}_c \subset H(r_0), \ L \subset H(r_0)$, откуда следует $\bar{A}_c \cap H(r_0) = \bar{A}_c$ и $L \cap H(r_0) = L$. Множества $\bar{A}_c$ и $\bar{A}_\varepsilon$ имеют одинаковый предел в силу равенства (6). Покажем, что величину δ можно выбрать так, чтобы при этом $\lim_{t \to \infty} \bar{A}(t, c) = 0$, если $x_0 \in B_\delta(\varepsilon)$. Действительно, по найденной величине $\delta > 0$ построим величину δ_1 такую, что при $x_0 \in B_{\delta_1}(\delta)$ будет $\bar{A}_\delta = \bar{L}(t, \delta) \bigcap \bar{\Psi}(t_0, t)$.

Пусть это не так, т. е. существует решение $x(t) \in D(t_0, t, \Phi)$ такое, что $|p(t, \omega) - p(t, 0)| > \delta$ при $t \geq t_0$. Тогда $V(t, q(t, \omega)) > \lambda > 0$ согласно условию 2, что противоречит соотношению (7). Таким образом,

$$\alpha = \lim_{t \to \infty} V(t, q(t, \omega)). \tag{8}$$

Покажем теперь, что $\omega(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, пусть $\varepsilon_1 > 0$ произвольно мало и

$$l_1 = \inf \theta(\omega) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \leq \|\omega\| \leq r, \quad r \in (r_0, \infty). \tag{9}$$

Из формулы (7) следует, что при $t_1 > t_0$ имеет место

$$V(t, q(t, \omega)) < l_1.$$

Отсюда в силу монотонного убывания функции $V(t, q(t, \omega))$ получаем

$$V(t, q(t, \omega)) < l_1 \quad \text{при} \quad t > t_1 \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\|\omega\| < \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad t > t_1. \tag{11}$$

Если бы $\|\omega\| \geq \varepsilon_1$ для некоторого момента $t_2 > t_1$, то с учетом (9) и (10) $l_1 > V(t_2, q(t_2, \omega)) \geq$ $\geq \theta(\omega(t_2)) \geq l_1$, что невозможно. Таким образом, на основании неравенства (11) имеем

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t) = 0.$$

Откуда следует, что $\lim_{t \to \infty} \omega(t, t_0, x_0) = \lim_{t \to \infty} \bar{A}_c$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть заданы функции* q, p, l, *удовлетворяющие условию* (4), *и существуют непрерывная функция* V, *которая является локально липшицевой по* x, *и решение* $x_u(t) \in$ $\in D(t_0, t, \Phi)$ *такие, что*:

1) $\Phi(t_0, \delta) \neq \varnothing \;\; \forall \delta > 0 \;\; \forall t_0 \in I$;

2) $V(t, q(t, 0)) \equiv 0, \;\; \theta(\|a(t, \omega)\|) \leq V(t, q(t, \omega)) \leq \xi(\|a(t, \omega)\|)$;

3) $P(\cdot, \varepsilon)$ *не затухает для любого* $\varepsilon \in (0, \gamma)$;

4) $D^+ V(t, q(t, \omega)) \leq -\xi(\|a(t, \omega)\|)$;

5) *множество* $A(\cdot, \varepsilon)$ *является асимптотически сжимающимся на множестве* $\bar{A}(\cdot, t, c)$.

Тогда программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво относительно функций* q, p, l, c, $c \geq 0$.

Доказательство. Пусть заданы $t_0 \in T, \varepsilon > 0$ и q, p, l, — функции, удовлетворяющие условиям (4). Выберем $\nu > 0$ такое, что $\bar{B}_\nu \subset B$, и из условий 2 получим, что для любого $t \in I$ выполняется соотношение

$$V_\nu \subset \bar{B}_\nu \subset B. \tag{12}$$

Тогда для любого $t_0 \in T_i$ и $x_0 \in V_{\nu 0}$ в силу условия 3 следует, что $x \in V_{\nu 0}$ для любого $t \in I^+$, и поэтому на основании (12) заключаем, что $x(t)$ не может достигнуть границы B. Значит, $I^+ = [t_0, \infty)$. Поскольку выполняются условия теоремы, программное многообразие асимптотически устойчиво относительно функций q, p, l. Тогда в силу условий 1, 2 найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $V(t, x_0) < \theta(\varepsilon)$ для всех $x_0 \in B_\delta(\varepsilon)$. Принимая во внимание, что $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, и используя условия 3, 4, заключаем, что $V(t, q(t, \omega))$ не возрастает вдоль траекторий неявной дифференциальной системы (1) и для любых $x_0 \in B_\delta, t \in I^+ = [t_0, \beta)$ получаем

$$\theta(\|a(t, \omega)\|) \leq V(t, q(t, \omega)) \leq V(t_0, \omega_0) < \theta(\varepsilon).$$

Поскольку $\theta \in K$, заключаем, что $\|a(t, \omega)\| < \varepsilon$ и $\lim_{t \to \infty} \omega(t, t_0, x_0) = 0$, т. е. $\omega(t, t_0, x_0) \in$ $\in \bar{A}_\varepsilon$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon = \bar{P}(t, \varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t)$. Программное многообразие равномерно устойчиво. Также для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\xi(\eta) \leq \theta(\nu)$. Выберем $\tau > \xi(\nu)/\zeta(\eta)$. В данном случае $\|\omega(t)\| \leq \eta$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Значит, существует $t_1 \in [t_0, t_0 + \tau]$, для которого выполняется соотношение $\xi(\|\omega(t_1)\|) \leq \xi(\eta) < \theta(\varepsilon)$. Отсюда в силу условия 2 теоремы имеем

$$\theta(\|a(t,\omega)\|) \leq V(t, q(t,\omega)) \leq V(t_1, q(t_1, \omega(t_1))) < \xi(\|q(\omega(t_1)\|) < \theta(\varepsilon).$$

Следовательно, для всех $t \geq t_0 + \tau$ выполняется $\|a(t,\omega)\| < \varepsilon$, т. е. $\omega(t, t_0, x_0) \in \bar{A}_\varepsilon$, где $\bar{A}_\varepsilon = \bar{P}(t,\varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t)$. Теперь для любого $\delta > 0$, удовлетворяющего неравенству $\xi(\delta) \leq \theta(\nu)$, получаем $B_\delta \subset V_\nu$. Отсюда следует, что притяжение имеет свойство равномерности. Таким образом, по определению 3 программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Устойчивость программного многообразия при известных первых интегралах. Если известны первые интегралы, то можно использовать их комбинацию с некоторой дополнительной функцией. Необходимо добиться того, чтобы эта комбинация была положительно определенной и убывающей вдоль решений.

Определение 5. *Непрерывная и локально липшицева по x функция $W(t,x)$ называется первым интегралом для уравнения* (1), *если $D^+W(t,x) = 0$ для любого $(t,x) \in I \times R^n$.*

Теорема 3. *Пусть заданы функции q, p, удовлетворяющие условию* (4), *и существуют непрерывные функции V и W, которые являются локально липшицевыми по x, и решения $x_u(t) \in D(t_0, t, \Phi)$ такие, что*:

1) $\Phi(t_0, \delta) \neq \varnothing \ \ \forall \sigma > 0 \ \ \forall t_0 \in T$;

2) $V(t, q(t,0)) \equiv 0, \ \ W(t, q(t,0)) \equiv 0$;

3) $\max\{V(t, q(t,\omega)), W(t, q(t,\omega))\} \geq \theta(\|a(t,\omega)\|) \ \ \forall (t,x) \in I \times R^n$;

4) *$P(\cdot, \varepsilon)$ не затухает для любого $\varepsilon \in (0, \gamma)$*;

5) *$D^+V(t, q(t,\omega)) \leq 0$ для любого $(t,x) \in I \times R^n$ такого, что $V(t, q(t,\omega)) \geq W(t, q(t,\omega))$.*

Тогда программное многообразие неявных дифференциальных систем устойчиво относительно заданных функций q, p.

Доказательство. Пусть $V(t, q(t,\omega)), W(t, q(t,\omega))$ и $\nu(t,q)$ — непрерывные функции, определенные на $I \times D(t_0, t, \Phi)$, для которых справедливо соотношение

$$\nu(t,q) = \max\{V(t, q(t,\omega)), W(t, q(t,\omega))\},$$

причем $V(t, q(t,0)) \equiv 0$, $W(t, q(t,0)) \equiv 0$. Если выполняются

$$D^+V(t, q(t,\omega)) \leq 0 \wedge D^+W(t, q(t,\omega)) \leq 0,$$

то $D^+\nu(t,\omega)) \leq 0$ на $I \times D(t_0, t, \Phi)$. Применяя теорему 2 и для определенности выбирая $\nu(t,q) = V(t, q(t, \omega(t)))$, получаем

$$\theta(\|a(t,\omega)\|) \leq V(t, q(t,\omega)) \leq V(t_0, \omega_0) < \theta(\varepsilon).$$

Поскольку $\theta \in K$, заключаем, что $\|a(t,\omega)\| < \varepsilon$, т. е. $\omega(t, t_0, x_0) \in \bar{A}_\varepsilon$, где $\bar{A}_\varepsilon = \bar{P}(t,\varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t)$.

Вычисление производной функции Ляпунова. Заметим, что в вышепроведенных исследованиях непосредственное вычисление производной функций Ляпунова затруднительно. Поэтому введем следующее понятие.

Определение 6. *Нелинейное преобразование $y = G(t,x)$ называется преобразованием Ляпунова, если функция $G(t,x) \in R^s$, определяющая переменную y, такова, что*:

1) *полная производная по времени $\dot{y}(t)$ вдоль решений системы* (1) *известна и является ограниченной функцией, когда (t,y) принадлежит компактному множеству в $I \times R^s$*;

2) *любая непрерывная кривая из пространства $I \times R^n$, состоящая из точек (t,x), переводится преобразованием $y = G(t,x)$ в непрерывную кривую, состоящую из точек (t,y) в пространстве $I \times R^s$.*

Лемма 1. *Пусть M — открытое множество $M \subset I \times R^s$, $V(t,y) \in C(M)$ локально липшицева по y на M.*

Если $x(t)$ — непрерывное решение системы (1) *и $y = G(t,x(t))$ обладает тем свойством, что точка (t,y) принадлежит M, то верхняя производная Дини функции V вдоль решений системы* (1) *в момент $t^* \in I$ имеет вид*

$$D^+V(t^*) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V(t^*+h, y^*+h\dot{y}^*) - V(t,y^*}{h}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть задано нелинейное преобразование $y = G(t,x)$, являющееся преобразованием Ляпунова. Находим полную производную

$$\dot{y} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\dot{x} = F(t,y),$$

где $F(t,y)$ — некоторая известная функция, удовлетворяющая условию $F(t,0) \equiv 0$. Обозначим $y(t^*) = y^*$. Для любого малого $h > 0$ имеем

$$V(t^*+h, y(t^*+h)) - V(t^\star, y(t^*)) =$$

$$= V[t^*+h, y^*+hF(t^\star,y^\star) + h\varepsilon(t^\star,y^\star,h)] - V(t^\star, y(t^*)) \le$$

$$\le V[t^*+h, y^*+hF(t^\star,y^\star)] + kh\|\varepsilon(t^\star,y^\star,h)\| - V(t^\star, y(t^*)).$$

Здесь $\varepsilon \to 0$ одновременно с h, а k — постоянная Липшица в окрестности y^*. Отсюда получаем

$$D^+V(t^*) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V[t^*+h, y(t^*+h)] - V(t^*, y(t^*))}{h} \le$$

$$\le \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V[t^*+h, y^*+hF(t^\star,y^\star)] - V(t^*, y(t^*))}{h}. \tag{14}$$

Также для любого малого $h > 0$ находим

$$V(t^*+h, y(t^*+h)) - V(t^\star, y(t^*)) \ge$$

$$\ge V[t^*+h, y^*+hF(t^\star,y^\star) - h\varepsilon(t^\star,y^\star,h)] - V(t^\star, y^*).$$

Отсюда следует

$$D^+V(t^*) \ge \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V[t^*+h, y^*+hF(t^\star,y^\star)] - V(t^*, y(t^*))}{h}. \tag{15}$$

Таким образом, сравнивая (14) и (15), получаем

$$D^+V(t^*) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V[t^* + h, y^* + hF(t^\star, y^\star)] - V(t^*, y(t^*))}{h}.$$

Теорема 4. *Пусть* $M = I \times R^q$ *и* y *является преобразованием Ляпунова, определяемым как* $y = q(t,x)$. *Тогда если существует локально липшицева по* y *на* M *функция* $V(t,y) \in C(M)$, *то производная* $D^+V[q(t,x(t))]$ *в момент* $t^* \in I$ *вычисляется по формуле* (13).

Доказательство. Пусть задано нелинейное преобразование $y = q(t,x)$, являющееся преобразованием Ляпунова. Поскольку для данной функции известна полная производная, имеем

$$\dot{y} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} = F(t,y),$$

где $F(t,y)$ — некоторая известная функция, удовлетворяющая условию $F(t,0) \equiv 0$. Тогда, обозначая $y(t^*) = y^*$, в момент $t^* \in I$, как и при доказательстве леммы 1, получаем правую верхнюю производную Дини в виде (13).

1. *Bajik V. N.* Non-linear function and stability of motions implicit systems // Int. J. Cont. – 1990. – **52**, № 5. – P. 1167 – 1187.
2. *Ремизов А.О.* О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 5. – С. 622 – 630.
3. *Ремизов А.О* Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 11. – С. 105 – 124.
4. *Козеренко К.В.* Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений с конечными состояниями, не разрешенных относительно производной // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 11. – С. 85 – 93.
5. *Козеренко К.В.* Об исследовании решений неявно заданных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 2. – С. 235 – 238.
6. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 10 – 15.
7. *Яковець В.П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278 – 1296.
8. *Яковець В.П.* Про структуру загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 292 – 298.
9. *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen // Monatsh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. – 1867. – S. 310 – 338.
10. *Kronecker L.* Algebraische Reduktion der Scharen bilinear er Formen // Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. – 1890. – S. 763 – 776.
11. *Жуматов С.С.* Устойчивость и притягиваемость программного многообразия неявных дифференциальных систем // Тр. 3-й Междунар. конф. „Математическое моделирование и дифференциальные уравнения" (17 – 22 сентября 2012 г., Брест). – Минск, 2012. – С. 143 – 151.
12. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 302 с.

Получено 07.02.13