УДК 514. 752. 43

І. В. Потапенко (Ін-т математики, економіки і механіки, Одес. нац. ун-т)

ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ВАРІАЦІЇ МЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ПОВЕРХНІ ЗА ЗАДАНОЮ ВАРІАЦІЄЮ СИМВОЛІВ КРІСТОФФЕЛЯ ДРУГОГО РОДУ ПРИ ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ ПОВЕРХОНЬ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_3

We investigate the problem of reconstruction of variation of a metric tensor of a surface on the basis of given variation of the sekond-kind Christoffel symbols for infinitesimal deformations of surfaces in the Euclidean space E_3.

Исследуется вопрос о восстановлении вариации метрического тензора поверхности по заданной вариации символов Кристоффеля второго рода при инфинитезимальных деформациях поверхностей в евклидовом пространстве E_3.

У теорії інфінітезимальних деформацій поверхонь у тривимірному евклідовому просторі одне з цікавих питань полягає в тому, які умови повинно задовольняти симетричне за нижніми індексами тензорне поле $\delta\Gamma_{ij}^h$, щоб, з одного боку, воно задавало варіацію символів Крістоффеля другого роду, а з іншого — за ним можна було відтворити варіацію δg_{ij} метричного тензора поверхні при деякій регулярній інфінітезимальній деформації, та з якою довільністю це можна зробити.

Ця проблематика має певну схожість з проблемою відновлення метричного тензора поверхні за заданими симетричними за нижніми індексами функціями Γ_{ij}^h Крістоффеля другого роду, оригінальне розв'язання якої наведено в [1, c. 18 – 20].

Більш загальну задачу про пошук умов, при яких простір афінної зв'язності (A_n) зводиться до простору Вейля (W_n), для бінарної області ($n = 2$) розв'язано в [2]. Ця задача узагальнює основну проблему неріманової геометрії, яка була поставлена Ейзенхартом і Вебленом в [3]. Задача, яка розглядається в даній роботі, та задачі, про які йшлося вище, зводяться до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, що схожі своєю лівою частиною, але суттєво відрізняються правою. Відмінність полягає в тому, що варіація символів Крістоффеля другого роду $\delta\Gamma_{ij}^h$ на відміну від символів Крістоффеля другого роду Γ_{ij}^h є тензором при інфінітезимальних деформаціях першого порядку.

Оскільки всі міркування будуть стосуватися лише метрики поверхні, а не самої поверхні, то є сенс говорити про сім'ю поверхонь з заданою регулярною метрикою. Але, не змінюючи загальності міркувань, під час доведень будемо мати на увазі якусь конкретну поверхню сімей.

Наведемо деякі означення, необхідні для подальшого викладу, та доведемо важливі леми. Аналітичне зображення процесу деформування регулярних поверхонь евклідового простору E_3 в класі $C^m(G)$, $m \geq 1$, та означення неперервної за параметром t деформації S_t можна знайти в [4, с. 54, 55; 5].

Означення 1. *Нехай* S_t — *регулярна сім'я поверхонь (неперервна за параметром* t *деформація), яке залежить від малого параметра* t, *до того ж*

$$\bar{r}_t(x^1,x^2,t) = \bar{r}(x^1,x^2) + t\overset{1}{\bar{y}}(x^1,x^2) + t^2\overset{2}{\bar{y}}(x^1,x^2) + \ldots + t^n\overset{n}{\bar{y}}(x^1,x^2). \quad (1)$$

Деформацію (1) *називають інфінітезимальною деформацією* k*-го порядку,* $k = 1,2,\ldots,n$, *якщо її розглядають з точністю до* k*-го порядку відносно* $t \to 0$. *При цьому величинами порядків* $k+1$ *і вище відносно* t *нехтують. Вектори* $\overset{1}{\bar{y}}(x^1,x^2)$, $\overset{2}{\bar{y}}(x^1,x^2)$, … , $\overset{k}{\bar{y}}(x^1,x^2)$ *називають векторами зміщення.*

Означення 2. *Нехай* $R(x^1,x^2)$ *та* $R_t(x^1,x^2,t)$ — *певні характеристики поверхонь* S *та* S_t *відповідно. Припустимо, що приріст* $\Delta R(x^1,x^2,t) = R_t(x^1,x^2,t) - R(x^1,x^2)$ *функції* $R(x^1,x^2)$ *при деформації розкладено в ряд по степенях* t. *Тоді у розкладі*

$$R_t(x^1,x^2,t) = R(x^1,x^2) + t\delta R(x^1,x^2) + t^2\delta^2 R(x^1,x^2) + \ldots + t^n\delta^n R(x^1,x^2) \quad (2)$$

коефіцієнти δR, $\delta R^2,\ldots,\delta^n R$ *називаються відповідно першою, другою і т. д.* n*-ю варіаціями геометричної величини* $R(x^1,x^2)$.

З (2) легко вивести формулу обчислення варіації k-го порядку, $k = 1,2,\ldots,n$:

$$\delta^k R(x^1,x^2) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k R_t(x^1,x^2,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}. \quad (3)$$

У даній роботі обмежимося розглядом виключно інфінітезимальних деформацій першого порядку вигляду

$$\bar{r}_t = \bar{r}(x^1,x^2) + t\bar{y}(x^1,x^2) \quad (4)$$

і далі словами „першого порядку” будемо нехтувати.

Лема 1. *Нехай регулярна поверхня* S *з векторно-параметричним рівнянням* $\bar{r} = \bar{r}(x^1,x^2)$ *зазнає інфінітезимальної деформації* (4) *і* $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ *та* $U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ — *тензорні поля на* S *типу* (p,q) *та* (r,s) *відповідно. Тоді мають місце формули*

$$\delta\left(\frac{\partial T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial\left(\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right)}{\partial x^k}, \quad (5)$$

$$\delta\left(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}\right) = \left(\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right) U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} + T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\left(\delta U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}\right). \quad (6)$$

Доведення. Формули (5) та (6) випливають з означення 2 та формули (3) при $k = 1$.

Також з формули (3) видно, що операція варіювання тензора не змінює його типу.

Означення 3. *Коваріантною похідною тензорного поля* $T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}$ *типу* (p,q), *заданого на регулярній поверхні* S, *називається тензорне поле* $T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p,l}$ *типу* $(p+1,q)$, *яке визначається за формулою*

$$T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p,l} = \frac{\partial T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}}{\partial x^l} + T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1\alpha\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \ldots + T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_q}_{\alpha l} -$$

$$- T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1l} - T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1\alpha\ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - \ldots - T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_pl}, \tag{7}$$

де Γ^h_{ij} *— символи Крістоффеля другого роду, які визначаються на базі першого фундаментального тензора поверхні за формулою*

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)g^{kh}. \tag{8}$$

Лема 2. *Нехай поверхня* S *зазнає інфінітезимальної деформації* (4) *і* $T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}$ *— тензорне поле типу* (p,q), *задане на поверхні. Тоді варіація коваріантної похідної* $\delta\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p,l}\right)$ *цього поля задовольняє співвідношення*

$$\delta\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p,l}\right) = \left(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)_{,l} + T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1\alpha\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \ldots + T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_q}_{\alpha l} -$$

$$- T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1l} - T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1\alpha\ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - \ldots - T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_pl}, \tag{9}$$

де $\delta\Gamma^h_{ij}$ *— варіація символів Крістоффеля другого роду.*

Доведення. Коваріантна похідна тензорного поля $T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}$ типу (p,q) згідно з означенням 3 визначається за формулою (7).

Якщо поверхня S зазнає інфінітезимальної деформації (4), то кожне тензорне поле на поверхні зазнає варіації.

Зваріюємо (7), використавши формули (5) та (6):

$$\delta\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p,l}\right) = \frac{\partial\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}}{\partial x^l} + \delta T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + \delta T^{j_1\alpha\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} +$$

$$+ T^{j_1\alpha\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \ldots + \delta T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}\Gamma^{j_q}_{\alpha l} + T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{j_q}_{\alpha l} - \delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1l} -$$

$$- T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1l} - \delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1\alpha\ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1\alpha\ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - \ldots - \delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_pl} -$$

$$- T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_pl}. \tag{10}$$

Збираючи у правій частині (10) доданки, що містять вираз $\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}$, згідно з означенням 3 коваріантної похідної отримуємо (9).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Коваріантна похідна варіації метричного тензора регулярної поверхні* S *при інфінітезимальній деформації* (4) *визначається за формулою*

$$\delta g_{ij,k} = g_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\delta\Gamma^m_{jk} . \tag{11}$$

Доведення. Для метричного тензора поверхні має місце рівність

$$g_{ij,k} = 0 . \tag{12}$$

Застосувавши до (12) формулу (9), отримаємо (11).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Варіація символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальній деформації* (4) *регулярної поверхні* S *визначається за формулою*

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha h}(\delta g_{i\alpha,j} + \delta g_{j\alpha,i} - \delta g_{ij,\alpha}) \tag{13}$$

і є тензором типу (2, 1).

Доведення. Застосувавши до кожного доданка в дужках у правій частині (13) формулу (11) та згорнувши вираз з метричним тензором $g^{\alpha h}$, помноженим на $\frac{1}{2}$, отримаємо (13).

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Варіація тензора кривини Рімана типу* (3, 1) *при інфінітезимальній деформації* (4) *регулярної поверхні* S *визначається за формулою*

$$\delta R^h_{.ijk} = (\delta\Gamma^h_{ik})_{,j} - (\delta\Gamma^h_{ij})_{,k} . \tag{14}$$

Доведення. Тензор кривини Рімана типу (3, 1) визначається через символи Крістоффеля другого роду за формулою

$$R^h_{.ijk} = \frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j} - \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k} . \tag{15}$$

Зваріювавши (15) з використанням формул (5) та (6), а також означення 3 коваріантної похідної, отримаємо (14).

Лему 5 доведено.

Отже, проблема відновлення варіації метричного тензора за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду на поверхнях в евклідовому просторі E_3 зводиться до вивчення умов інтегровності системи (11).

Теорема 1. *Якщо тензорні поля* δg^1_{ij}, δg^2_{ij} *— два довільні розв'язки системи* (11) *на поверхні ненульової гауссової кривини, то вони відрізняються на величину* Cg_{ij}, *де* C *— стала, а* g_{ij} *— метричний тензор поверхні.*

Доведення. Нехай тензорні поля δg^1_{ij}, δg^2_{ij} є розв'язками системи (11), тоді мають місце рівності

$$\delta \overset{1}{g}_{ij,k} = g_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\delta\Gamma^m_{jk} \tag{16}$$

та

$$\delta \overset{2}{g}_{ij,k} = g_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\delta\Gamma^m_{jk}\,. \tag{17}$$

Віднімаючи від (16) рівність (17), одержуємо

$$(\delta \overset{1}{g}_{ij} - \delta \overset{2}{g}_{ij})_{,k} = 0\,. \tag{18}$$

Але згідно з [6, с. 361 – 362], якщо на поверхні ненульової гауссової кривини коваріантна похідна симетричного коваріантного тензора другої валентності тотожно дорівнює нулю, то цей тензор відрізняється лише сталим множником від метричного тензора поверхні. Отже, $\delta \overset{1}{g}_{ij} - \delta \overset{2}{g}_{ij} = Cg_{ij}$.

Теорему 1 доведено.

З геометричної точки зору теорема 1 показує, що варіація символів Крістоффеля другого роду визначає варіацію метричного тензора з точністю до гомотетії.

Теорема 2. *При будь-якій інфінітезимальній деформації* (4) *регулярної поверхні* S *мають місце співвідношення*

$$\delta R^{\alpha}_{\alpha kl} = 0\,, \tag{19}$$

де δR^h_{ijk} *— варіація тензора кривини Рімана, виражена формулою* (14).

Доведення. Якщо поверхня S зазнає інфінітезимальної деформації (4), то система (11) має розв'язок, а це означає, що для неї виконуються умови інтегровності

$$\delta g_{mj} R^m_{ikl} + \delta g_{im} R^m_{jkl} = g_{im}\delta R^m_{jkl} + g_{mj}\delta R^m_{ikl}\,. \tag{20}$$

Використавши формулу

$$R^m_{ikl} = K(\delta^m_k g_{il} - \delta^m_l g_{ik})\,, \tag{21}$$

перепишемо (20) у вигляді

$$K(\delta g_{kj} g_{il} - \delta g_{lj} g_{ik} + \delta g_{ik} g_{jl} - \delta g_{il} g_{jk}) = g_{im}\delta R^m_{jkl} + g_{mj}\delta R^m_{ikl}\,. \tag{22}$$

Помноживши (22) на g^{ij}, одержимо (19).

Теорему 2 доведено.

Слід зазначити, що умови (19) є і достатніми для того, щоб система (11) мала розв'язки на регулярній поверхні, тобто була інтегровною.

Теорема 3. *При інфінітезимальній деформації* (4) *регулярної поверхні* S *за виконання умов* (19) *система* (11) *завжди має розв'язок.*

Доведення. Зваріювавши формулу [4, с. 349]

$$R^h_{ijk} = \delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}\,, \tag{23}$$

отримаємо

$$\delta R^h_{ijk} \;=\; \delta^h_k \delta R_{ij} - \delta^h_j \delta R_{ik} \,. \tag{24}$$

Виконавши згортку за індексами h та k, матимемо

$$\delta R_{ij} \;=\; \delta R^{\alpha}_{ij\alpha} \,. \tag{25}$$

Для визначення варіації метричного тензора на поверхні ненульової гауссової кривини скористаємось формулою

$$R_{ij} \;=\; -\,K g_{ij} \,. \tag{26}$$

Зваріювавши (26), для поверхонь ненульової гауссової повної кривини K з урахуванням (6) матимемо

$$\delta g_{ij} \;=\; \frac{(-\delta K g_{ij} - \delta R^{\alpha}_{ij\alpha})}{K} \,. \tag{27}$$

Покажемо, що тензорне поле $\delta\Gamma^h_{ij}$ повністю визначає варіацію гауссової кривини δK за умови, що виконуються умови (19).

Для цього використаємо формулу [4, с. 69]

$$\delta K \;=\; -\,2Kg\delta g - \frac{1}{2} c^{jk} c^{il} \delta g_{ij,kl} \,, \tag{28}$$

де c^{ij} — дискримінантний тензор поверхні [4, с. 7], або, з урахуванням (11),

$$\delta K \;=\; -\,2Kg\delta g - \frac{1}{2} c^{jk} c^{il} (g_{mj} \delta\Gamma^m_{ik,l} + g_{mi} \delta\Gamma^m_{jk,l}) \,. \tag{29}$$

Покажемо, що умови (19) забезпечують існування варіації дискримінанта метричного тензора δg. Для цього використаємо формулу Фосса – Вейля [6, с. 350]

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} \;=\; 2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} \,. \tag{30}$$

Зваріювавши (30) з використанням леми 1, матимемо

$$\frac{\partial \delta g}{\partial x^l} \;=\; 2\delta g \Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2g\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} \,. \tag{31}$$

Умови інтегровності (31) мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^l \partial x^k} \;=\; \frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^k \partial x^l} \,. \tag{32}$$

Диференціюючи (31) по x^k, отримуємо

$$\frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^l \partial x^k} \;=\; 2\frac{\partial \delta g}{\partial x^k} \Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2\delta g \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha l}}{\partial x^k} + 2\frac{\partial g}{\partial x^k} \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2g \frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha l}}{\partial x^k} \,. \tag{33}$$

Підставляючи в (33) вирази для $\dfrac{\partial g}{\partial x^k}$ та $\dfrac{\partial \delta g}{\partial x^k}$ за формулами (30), (31) відповідно, маємо

$$\frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^l \partial x^k} = 4(\delta g \Gamma^\alpha_{\alpha k} + g \delta\Gamma^\alpha_{\alpha k})\Gamma^\alpha_{\alpha l} + 2\delta g \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k} + 4 g \Gamma^\alpha_{\alpha k} \delta\Gamma^\alpha_{\alpha l} + 2 g \frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k}. \quad (34)$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^k \partial x^l} = 2\delta g \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha k}}{\partial x^l} \right) + 2 g \left(\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{\alpha k}}{\partial x^l} \right). \quad (35)$$

Оскільки $\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha k}}{\partial x^l} = R^\alpha_{\alpha kl}$ та $\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{\alpha k}}{\partial x^l} = \delta R^\alpha_{\alpha kl}$, то за формулою (9) та умовою (19) переконуємося, що виконано умови (32). Таким чином, система (31) є абсолютно інтегровною відносно δg, що дозволяє за формулою (29) визначити варіацію гауссової кривини δK, а за формулою (27) — варіацію δg_{ij}.

У випадку $K = 0$, як видно з (22),

$$g_{im} \delta R^m_{jkl} + g_{mj} \delta R^m_{ikl} = 0. \quad (36)$$

Помноживши (36) на g^{ij}, отримаємо співвідношення (19), яке виконується за умовою теореми.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Якщо при інфінітезимальній деформації поверхні ненульової гауссової кривини в евклідовому просторі* E_3 *варіація тензора Річчі дорівнює нулю, то така деформація є конформною.*

Доведення. З формули (27) внаслідок умови $\delta R_{ij} = 0$ випливає

$$\delta g_{ij} = \frac{-\delta K}{K} g_{ij},$$

тобто варіація метричного тензора пропорційна самому метричному тензору. Отже, інфінітезимальна деформація є конформною.

Теорему 4 доведено.

Зазначимо, що виконання умови (19) для тензорного поля $\delta\Gamma^h_{ij}$ відносно метрики g_{ij} не гарантує існування інфінітезимальної деформації (4).

В [7, 8] відмічено тісний зв'язок між геодезичними відображеннями та геодезичними інфінітезимальними деформаціями поверхонь в E_3 які характеризуються умовою

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \lambda_i \delta^h_j + \lambda_j \delta^h_i.$$

Для геодезичних інфінітезимальних деформацій регулярних поверхонь умова (19) означає градієнтність векторного поля λ_i, тобто (19) набирає вигляду

$$\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i} = 0.$$

Таким чином, використовуючи отриманий у роботі результат, можна вивчати різні типи інфінітезимальних деформацій з різного роду алгебраїчними та диференціальними обмеженнями на варіацію символів Крістоффеля другого роду.

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть вторая. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 408 с.
2. *Петров П. И.* Основная проблема неримановой геометрии в бинарной области // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 4. – С. 768 – 769.
3. *Eisenhart L. P., Veblen O.* Proc. Nat. Acad. USA. – 1922. – **8**, № 2.
4. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: АстроПринт, 1999. – 168 с.
5. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 2 (24). – С. 47 – 158.
6. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть первая. – М.; Л.:ОГИЗ, 1947. – 512 с.
7. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
8. *Фоменко В. Т.* Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений // Докл. Академии наук. – 2006. – **407**, № 4. – С. 453 – 456.

Одержано 25.08.10,
після доопрацювання — 24.01.11