УДК 519.21

А. С. Ткешелашвили (Тбилис. ун-т им. И. Джавахишвили, Грузия)

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ДИНАМИКИ В КОНЦЕ ИНТЕРВАЛА

We consider a problem of the estimation of density of a random value that is an initial value of some dynamics. The dynamics is determined by differential equation whose solution is observable at the end of an interval. This problem is called a problem of the estimation with the use of indirect observations. By using a method of transformation of a measure along an integral curve in combination with kernel estimates, we present a procedure of the estimation of density.

Розглядається задача оцінювання щільності випадкової величини, що є початковим значенням деякої динаміки. При цьому динаміка задається у вигляді диференціального рівняння, розв'язок якого є спостережуваним у кінці інтервалу. Таку задачу називаємо задачею оцінювання за посередніми спостереженнями. З застосуванням техніки перетворення міри вздовж інтегральної кривої в поєднанні з ядерними оцінками наведено процедуру оцінювання щільності.

Пусть на интервале $[0, T]$ задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{1}$$

Рассмотрим начальную задачу Коши $y(0) = X$, где X — случайная величина с неизвестной плотностью распределения $p(x)$. Допустим, поставленная задача для (1) имеет единственное решение $y(t)$ с вероятностью 1, которое, конечно, является случайным процессом. Статистику доступны наблюдения этого процесса в конце интервала — в точке T, которые соответствуют недоступной выборке из X, т. е. имеем наблюдения $y_1(T), y_2(T), \ldots, y_n(T)$. По этим наблюдениям требуется оценить $p(x)$. Если $f(t, x) \equiv 0$, то $y(t) = X$ и задача сводится к классической постановке.

Понятно, что вдоль интегральной кривой плотность $p(x)$ должна быть достаточно регулярной и поэтому восстановление должно быть возможно. Поэтому сначала изучим именно этот вопрос.

Пусть $\{\Theta, \mathcal{F}\}$ — измеримое пространство, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ — пространство вещественнозначных σ-аддитивных функций множеств на $\mathcal{F}$ с нормой

$$\|\mu\| = (\operatorname{Var} \mu)(\Theta) = \mu^+(\Theta) - \mu^-(\Theta),$$

где $\mu = \mu^+ - \mu^-$ — разложение Хана. $\mathcal{M}$ является банаховым пространством. Элементы этого пространства будем называть мерами.

Рассмотрим семейство мер $\mu_t \in \mathcal{M}$, где t — вещественный параметр, $0 \leq t \leq T < \infty$. Будем считать, что для каждого фиксированного $A \in \mathcal{F}$ функция $t \mapsto \mu_t(A)$ непрерывна. Сходимость на множествах из $\mathcal{F}$ есть слабая сходимость в $\mathcal{M}$ (см. [1]). Поэтому рассматриваемое семейство ограничено в $\mathcal{M}$: $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mu_t\| < \infty$.

Предположим, что для каждого $A \in \mathcal{F}$ функция $\mu_t(A)$ дифференцируема по параметру $t \in (0, T)$ и имеет односторонние производные для $t = 0$ и $t = T$. Тогда мера

$$\nu_t = \mu_t' \colon\ A \mapsto \frac{d\mu_t(A)}{dt}$$

называется производной меры μ_t по параметру. Из представления

$$\mu_{t_2} - \mu_{t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \nu_\tau(d\tau)$$

следует непрерывность по вариации семейства μ_t:

$$\|\mu_{t_2} - \mu_{t_1}\| \leq C|t_2 - t_1|.$$

Если мера $\nu_t = \mu_t'$ абсолютно непрерывна относительно μ_t, то плотность Радона – Никодима

$$\rho(t,x) = \frac{d\nu_t}{d\mu_t}\,(x)$$

называется логарифмической производной семейства мер μ_t по параметру.

Пусть $\mathrm{B}(\mathcal{F})$ — банахово пространство ограниченных измеримых функций с равномерной нормой. Дифференцируемость μ_t в описанном выше смысле эквивалентна соотношению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Theta} \varphi(x)\mu_t(dx) = \int\limits_{\Theta} \varphi(x)\mu_t'(dx)$$

для каждого $\varphi \in \mathrm{B}(\mathcal{F})$, а существование логарифмической производной семейства μ_t по параметру — соотношению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Theta} \varphi(x)\mu_t(dx) = \int\limits_{\Theta} \varphi(x)\rho(t,x)\mu_t(dx), \quad \varphi \in \mathbf{B}(\mathcal{F}).$$

Например, пусть μ — некоторая мера, $\alpha(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая по t вещественная положительная ограниченная функция и $\alpha(T,x) \equiv 1$. Тогда семейство мер

$$\mu_t(A) = \int\limits_{A} \alpha(t,x)\,\mu(dx), \quad t \in [0,T],$$

имеет логарифмическую производную вида

$$\rho(t,x) = \frac{\alpha_t'(t,x)}{\alpha(t,x)}.$$

Отсюда

$$\alpha(t,x) = e^{\int_0^t \rho(\tau,x)\,d\tau}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Важно обратное утверждение.

Лемма. *Пусть семейство мер $\mu_t \in \mathcal{M}$, $t \in [0,T]$, на измеримом пространстве $\{\Theta,\mathcal{F}\}$ имеет логарифмическую производную $\rho(t,x)$, для которой выполнены условия*:

1) $\rho(t,x)$ *непрерывна по* t, μ_t *почти всюду*;

2) $\rho(t,x)$ — σ-*ограничена в том смысле, что существует разбиение* $\Theta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Theta_j$ *такое, что* $\rho(t,x)$ *ограничена на каждом* $[0,T] \times \Theta_j$.

Тогда каждые две меры μ_s и μ_τ, $s,\tau \in [0,T]$, рассматриваемого семейства эквивалентны и

$$p(s,\tau,x) = \frac{d\mu_s}{d\mu_\tau}\,(x) = e^{\int_\tau^s \rho(t,x)\,dt}. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой $\varphi \in \mathrm{B}(\mathcal{F})$ выражение

$$\int\limits_{\Theta} \varphi(x)p(t,\tau,x)\mu_\tau(dx) = \psi(t,\tau)$$

не зависит от τ. Тогда при $t=\tau$ для индикаторной функции $\varphi(x) = I_A(x)$ получим (2). Покажем, что $\dfrac{d}{d\tau}\,\psi(t,\tau) = 0$.

Формально это следует из равенств

$$\frac{\partial p(t,\tau,x)}{\partial\tau} = -\rho(\tau,x) \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{d\tau}\,\mu_\tau = \rho(\tau,x)\mu_\tau,$$

и поэтому надо лишь проверить законность почленного дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

Рассмотрим соотношение

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int\limits_{\Theta} \varphi(x)p(t,\tau+\varepsilon,x)\mu_{\tau+\varepsilon}(dx) - \int\limits_{\Theta} \varphi(x)p(t,\tau,x)\mu_\tau(dx)\right\} =$$

$$= \int\limits_{\Theta} \varphi(x)p(t,\tau,x)\,\frac{\mu_{\tau+\varepsilon}(dx) - \mu_\tau(dx)}{\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{\Theta} \varphi(x)\,\frac{p(t,\tau+\varepsilon,x) - p(t,\tau,x)}{\varepsilon}\,\mu_\tau(dx) +$$

$$+ \int\limits_{\Theta} \varphi(x)\,\frac{p(t,\tau+\varepsilon,x) - p(t,\tau,x)}{\varepsilon}\,\left[\mu_{\tau+\varepsilon} - \mu_\tau\right](dx).$$

Пусть сначала функция $\rho(t,x)$ ограничена на $[0,T]\times\Theta$. Тогда в каждом из трех слагаемых подынтегральное выражение ограничено и возможен предельный переход при $\varepsilon \to 0$. При этом последнее слагаемое стремится к нулю, так как

$$\|\mu_{\tau+\varepsilon} - \mu_\tau\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

В общем же случае при рассмотренных условиях можно представить $\Theta = \bigcup_{j=1}^{\infty}\Theta_j$ так, что на каждом Θ_j функция $\rho(t,x)$ ограничена, и тогда для каждого j

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Theta_j} \varphi(x)p(t,\tau,x)\mu_\tau(dx) = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к уравнению (1)

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad y(0) = X, \tag{$1'$}$$

где случайная величина X имеет неизвестную плотность $p(x)$.

Предположим, что:

(f) $f(t,x)$ — непрерывная функция своих переменных, имеющая непрерывную производную $f'_x(t,x)$.

Решение задачи ($1'$) существует, единственно и является случайным процессом с дифференцируемыми траекториями с вероятностью 1. Пусть μ_t — распределение вероятностей процесса $y(t)$ в точке. Ясно, что

$$\mu_0(A) = \int\limits_A p(t)\,dt, \quad A \in \mathcal{B}[0,T],$$

где $\mathcal{B}[0,T]$ обозначает борелевскую σ-алгебру подмножеств $[0,T]$.

Теорема 1. *Пусть* $p(t) > 0$ *и выполнено условие* (f). *Тогда семейство* μ_t *имеет логарифмическую производную.*

Доказательство. Обозначим через $S_{t\tau}$ обратимое эволюционное семейство, связанное с задачей ($1'$):

$$y(t) = S_{t\tau}y, \qquad S_{tt} = I, \qquad S_{t\tau} \circ S_{\tau x} = S_{ts},$$

$$\frac{\partial S_{t\tau}y}{\partial t} = f(t, S_{t\tau}y), \qquad 0 \le s \le \tau \le t \le T.$$

Тогда

$$\mu_t(A) = P(y(t) \in A) = P(S_{t0}X \in A) = P(X \in S_{t0}^{-1}A) =$$

$$= \int\limits_{S_{t0}^{-1}A} p(s)\,ds = \int\limits_A p\left(S_{t0}^{-1}\tau\right)\left(S_{t0}^{-1}\right)'(\tau)\,d\tau.$$

Значит, μ_t имеет плотность распределения вероятностей и

$$p_t(x) = p(S_{t0}^{-1}x)\,\frac{\partial(S_{t0}^{-1}x)}{\partial x}$$

или

$$p(x) = \frac{\partial S_{t0}x}{\partial x}\,p_t(S_{t0}x). \tag{3}$$

Легко также подсчитать логарифмическую производную меры μ_t:

$$\rho(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\,\ln p(S_{t0}^{-1}x)\,\frac{\partial S_{t0}^{-1}x}{\partial x}\,.$$

Теорема доказана.

Пусть решение задачи ($1'$) наблюдается в точке T и $y_1(T), y_2(T), \ldots, y_n(T)$ — соответственно выборка. Надо построить оценку для плотности $p(x)$ случайной величины X. Будем строить так называемую ядерную оценку.

Пусть $K(x)$ — функция, обладающая свойствами:

(k) $K(x)$ — непрерывная, ограниченная, интегрируемая, положительная функция, определенная на R и такая, что $\int_R K(x)\,dx = 1$.

Рассмотрим оценку плотности $p_T(x)$ ядерного вида

$$\widehat{p}_T(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - y_j(T)}{h_n}\right), \tag{4}$$

где последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию:

(h) h_n — положительная, сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел, для которой $nh_n \to \infty$.

Тогда в условиях (k) и (h), как известно (см. [2]), $\widehat{p}_{T}(x)$ является состоятельной оценкой для плотности $p_{T}(x)$. Поэтому для оценки $p(t)$ согласно формулам (3) и (4) возмем

$$\widehat{p}(x) = \frac{\partial(S_{T0}x)}{\partial x}\,\widehat{p}_{T}(S_{T0}x). \tag{5}$$

Если известен интегральный поток, соответствующий (1) – S_{t0}, то формула (5) даст нам искомую оценку. Однако в некоторых случаях задание явного вида такого семейства представляет сложную задачу. Поэтому приходится искать другие возможности.

Рассмотрим детерминированную задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y_0 = y(0) = x,$$

и построим для нее последовательность $\varphi_n(x)$, которая равномерно сходится к решению задачи Коши – $y(t)$ $\Big($такова, например, процедура Пикара: $\varphi_n(t) = x + \int_0^t f(x, \varphi_{n-1}(s))\,dx$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi_0(t) = y_0\Big)$. В качестве приближения можем взять $S^n_{T0}x = \varphi_n(T)$.

Окончательно приходим к выводу, что

$$\widehat{p}(x) = \frac{\partial(\varphi_n(T))}{\partial x}\,\widehat{p}_{T}(\varphi_n(T)) \tag{6}$$

является искомой оценкой для плотности $p(x)$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для задачи Коши* $(1')$ *выполнены условия* (f), (k) *и* (h), *где* X — *случайная величина с неизвестной положительной плотностью* $p(x)$. *Тогда состоятельная оценка плотности* $p(x)$ *дается формулой* (6).

Замечание. Задача, рассмотренная здесь, допускает многочисленные обобщения. Можно рассмотреть стохастический вариант динамики с гладкими коэффициентами, а также уравнения с частными производными и со случайным начальным условием. Тогда применение описанного метода дает возможность оценки плотности распределения начальной случайной величины по наблюдениям в точке интегральной кривой динамики.

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Мир, 1962.
2. *Надарая Э. А., Абсава Р. М.* Некоторые задачи теории непараметрического оценивания функциональных характеристик закона распределения наблюдений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 2005.

Получено 26.11.10