УДК 517.5

Т. В. Ломако (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ТЕОРИИ СХОДИМОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

The convergence and compactness theorems are proved for classes of regular solutions of the Beltrami degenerate equations with restrictions of integral type on the dilatation.

Доведено теореми збіжності та компактності класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на дилатацію.

1. Введение. В данной работе рассмотрены отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ (см., например, [1, с. 11]) с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, изучались во многих работах (см., например, ссылки в работе [2, с. 238]). Некоторые из них посвящены вопросам компактности и сходимости таких классов. Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в секвенциально компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе нелинейных, функционалов. Кроме того, как правило, в компактных классах удается показать выпуклость множества комплексных характеристик, что значительно упрощает построение вариаций.

Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu(z)\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду, $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

— *максимальной дилатацией* или просто *дилатацией* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$. В данной работе доказаны теоремы сходимости и компактности классов решений вырожденных уравнений Бельтрами. Отметим, что под локально равномерной сходимостью отображений в $\overline{\mathbb{C}}$ будем понимать равномерную сходимость на компактах относительно сферической метрики.

Точка дифференцируемости называется *регулярной точкой* отображения f, если его якобиан в этой точке отличен от нуля:

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0\,. \tag{2}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием того, чтобы гомеоморфизм, имеющий хотя бы одну регулярную точку, сохранял ориентацию, является положительность якобиана во всех регулярных точках (см., например, [3, с. 10]).

Обозначим через $Df(z)$ дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{C}$ в точке z:

$$Df(z) \cdot h := f_z \cdot h + f_{\overline{z}} \cdot \overline{h}, \quad h \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$|Df(z)| := \sup_{|h|=1} \{|Df(z) \cdot h|\} = |f_z| + |f_{\overline{z}}|.$$

Заметим, что в регулярных точках гомеоморфного решения уравнения Бельтрами

$$K_\mu(z) = \frac{|Df(z)|^2}{J_f(z)} = \frac{J_f(z)}{l\,(Df(z))^2},$$

где $l\,(Df(z)) := \inf\limits_{|h|=1} |Df(z) \cdot h| = |f_z| - |f_{\overline{z}}|$.

Под *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D будем понимать гомеоморфизм f из пространства Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, частные производные которого удовлетворяют (1) и (2) почти всюду в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [4]. Напомним, что по теореме Меньшова (см. [5], а также теорему 42.3 в [6], ср. с теоремой III.3.1 в [3]) любой гомеоморфизм на плоскости, имеющий почти всюду частные производные, является дифференцируемым почти всюду.

Пусть $f\colon D \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Говорят, что f имеет (N)-свойство по Лузину, если для любого $E \subset D$: $|E| = 0 \Rightarrow |f(E)| = 0$. Здесь и далее $|E|$ обозначает меру Лебега множества $E \subset \mathbb{C}$. Говорят, что функция f имеет $\left(N^{-1}\right)$-свойство, если для любого $E \subset \mathbb{C}$: $|E| = 0 \Rightarrow \left|f^{-1}(E)\right| = 0$.

Всюду далее $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, ${\rm dist}\,(E, F)$ — евклидово расстояние между множествами E и F в $\mathbb{C}$. Обозначим через h *сферическое* (хордальное) расстояние между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$: $h(z_1, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$, $h(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$, $z_1, z_2 \neq \infty$. *Элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$ имеет вид $dS(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{-2}\, dxdy$. *Сферическим диаметром множества* E в $\overline{\mathbb{C}}$ называется величина $h(E) = \sup_{z_1, z_2 \in E} h(z_1, z_2)$. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \overline{\mathbb{C}} \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\overline{\mathbb{C}}$ (пишут $\rho \in {\rm adm}\, \Gamma$), если

$$\int\limits_\gamma \rho(z)\, |dz| \, \geq \, 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in {\rm adm}\, \Gamma} \int\limits_D \rho^2(z)\, dxdy.$$

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости (см. [2]). Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция.

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0\in D$, если соотношение

$$M(\Delta(fS_1,\,fS_2,\,fD))\le\int\limits_A Q(z)\,\eta^2(|z-z_0|)\,dxdy \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A=A(z_0,\,r_1,\,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0=\operatorname{dist}(z_0,\,\partial D)$, окружностей $S_i=S(z_0,\,r_i)$, $i=1,\,2$, и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,\,r_2)\to[0,\,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr=1$.

2. Теоремы сходимости. Функция $\Phi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=\infty \tag{4}$$

(см., например, [7, с. 37]). В дальнейшем *непрерывность* функции Φ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+}=[0,\,\infty]$.

Следующий результат является обобщением теоремы 1 в [8].

Лемма 1. *Пусть $f,\,f_n\colon D\to\mathbb{C}$ — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,\,1}_{\mathrm{loc}}$ и $f_n\to f$ при $n\to\infty$ локально равномерно. Тогда для любого открытого множества $\Omega\subset D$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega\Phi\left(K_\mu(z)\right)\Psi(z)\,dxdy\le\liminf_{n\to\infty}\int\limits_\Omega\Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\Psi(z)\,dxdy \tag{5}$$

для любой непрерывной строго выпуклой функции $\Phi\colon[1,\infty]\to\overline{\mathbb{R}^+}$ и равномерно непрерывной функции $\Psi(z)\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ такой, что $1/\Psi(z)$ локально ограничено в $\mathbb{C}$.

Доказательство. В силу леммы 1 в [8] и счетной аддитивности интеграла утверждение достаточно доказать для ограниченных множеств Ω. Тогда $\Psi(z)\ge$ $\ge C>0$ для всех $z\in\Omega$.

Пусть $K(z,\,h)\subset\Omega$ — квадрат с центром в точке z и длиной стороны h. Из равномерной непрерывности $\Psi(z)$ следует, что для каждого $\epsilon>0$ существует такое $\delta(\epsilon)>0$, что для любых $z,\,z'\in\Omega$ из того, что $z\in K(z',\,h)<\delta(\epsilon)$, следует неравенство $|\Psi(z)-\Psi(z')|<\epsilon$.

Система квадратов $K(z,\,h)$, $z\in\Omega$, $h<\delta(\epsilon)$, образует покрытие множества Ω в смысле Витали и по теореме Витали (см., например, теорему IV.3.1 в [9]) можно выбрать не более чем счетную последовательность непересекающихся квадратов $E_m=K(z_m,\,h_m)\subseteq\Omega$, $m=1,\,2,\ldots$, из указанного покрытия такую, что $|\Omega\setminus\cup E_m|=0$.

Согласно теореме 1 в [8] при $\epsilon<C$ получаем

$$\int\limits_{E_m}\Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\Psi(\zeta)\,d\xi d\eta\le$$

$$\le(\Psi(z_m)-\epsilon)\int\limits_{E_m}\Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,d\xi d\eta+2\epsilon\int\limits_{E_m}\Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,d\xi d\eta\le$$

$$\leq (\Psi(z_m) - \epsilon) \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right)\, d\xi d\eta + 2\epsilon \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu}(\zeta)\right)\, d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right) \Psi(\zeta)\, d\xi d\eta + 2\epsilon \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu}(\zeta)\right)\, d\xi d\eta,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Из последнего неравенства, согласно счетной аддитивности интеграла (см., например, теорему I.12.7 в [9]) и лемме 1 в [8] имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu}(z)\right) (\Psi(z) - 2\epsilon)\, dxdy \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) \Psi(z)\, dxdy,$$

откуда в силу произвольного выбора ϵ получаем неравенство (5).

Лемма доказана.

В дальнейшем мы используем функцию множества $M(\Omega)$, заданную на произвольных открытых множествах Ω в $\mathbb{C}$, которую всегда можно доопределить (и переопределить) на произвольных множествах E в $\mathbb{C}$, положив

$$M_*(E) = \inf_{\Omega \supseteq E} M(\Omega)\,. \tag{6}$$

Заметим, что функция множества $M_*(E)$ является монотонной по включению и полунепрерывной справа, т. е. если $E = \bigcap E_n$, то

$$M_*(E) \leq \liminf_{n\to\infty} M_*(E_n) \tag{7}$$

и существует такая последовательность (открытых) множеств $\Omega_n \supseteq E$, для которой

$$M_*(E) = \lim_{n\to\infty} M_*(\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} M(\Omega_n). \tag{8}$$

Таким образом, произвольная функция $M(\Omega)$ открытого множества Ω в $\mathbb{C}$ допускает регулярную замену M_* со свойствами (6) – (8).

Теорема 1. *Пусть $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ — последовательность регулярных решений уравнения Бельтрами с комплексными коэффициентами μ_n. Предположим, что для каждого открытого множества $\Omega \subset D$ и некоторой локально конечной функции множества $M(\Omega)$*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) dS(z) \leq M(\Omega), \tag{9}$$

где $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непрерывная строго выпуклая функция.

Если $f_n \to f$ равномерно на каждом компактном множестве в D, где $f\colon D \to$ $\to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм, то f является регулярным решением уравнения (1) *с комплексным коэффициентом μ таким, что*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu}(z)\right) dS(z) \leq M(\Omega) \tag{10}$$

для любого открытого множества $\Omega \subset D$.

Отметим, что согласно определению (6)

$$\int\limits_E \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) dS(z) \leq M_*(E) \tag{11}$$

и

$$\int\limits_E \Phi\left(K_{\mu}(z)\right) dS(z) \leq M_*(E) \tag{12}$$

для любого измеримого множества $E \subseteq D$.

Доказательство. Покажем, что предельная функция f последовательности f_n принадлежит классу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$. Согласно лемме 2.1 в [10] для доказательства этого факта достаточно показать, что ∂f_n и $\overline{\partial} f_n$ равностепенно ограничены в $L^1_{\rm loc}$ и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы.

Итак, пусть C — произвольное компактное множество в D и V — открытое множество с компактным замыканием $\overline{V}$ в D такое, что $C \subset V$, например $V = \{z \in D\colon \operatorname{dist}(z, C) < r\}$, где $r < \operatorname{dist}(C, \partial D)$. Заметим далее, что почти всюду

$$|\overline{\partial} f_n| \leq |\partial f_n| \leq |\partial f_n| + |\overline{\partial} f_n| = K^{1/2}_{\mu_n}(z) \cdot J^{1/2}_{f_n}(z).$$

Следовательно, согласно неравенству Гельдера и лемме III.3.3 в [3]

$$\int\limits_E |\partial f_n|\, dxdy \leq \left|\int\limits_E K_{\mu_n}(z)\, dxdy\right|^{1/2} |f_n(C)|^{1/2}$$

для любого измеримого множества $E \subseteq C$. Отсюда, поскольку f_n сходится к f равномерно на C, получаем

$$\int\limits_E |\partial f_n|\, dxdy \leq \left|\int\limits_E K_{\mu_n}(z)\, dxdy\right|^{1/2} |f(V)|^{1/2} \tag{13}$$

для всех достаточно больших n. Заметим, что условие (9) по теореме 3.1.2 в [7] влечет равностепенную ограниченность K_{μ_n} в $L^1_{\rm loc}$ и равностепенную абсолютную непрерывность неопределенных интегралов $\int K_{\mu_n}\, dxdy$. Таким образом из (13) получаем, что $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ равностепенно ограничены в $L^1_{\rm loc}$ и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы. Согласно лемме 2.1 в [10] f принадлежит $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$.

Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ последовательности f_n следует локально равномерная сходимость $f_n^{-1} \to f^{-1}$ (см., например, лемму 3.1 в [11]).

Поскольку f_n принадлежит $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и $J_{f_n}(z) > 0$ почти всюду, то $f_n^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}\left(f_n(D)\right)$ (см. теоремы 1.1 и 1.3 в [12]).

Аналогично (3.11) и (3.12) в [12] для произвольного измеримого множества $E \subset D$ имеем

$$\int\limits_{f_n(E)} |Df_n^{-1}(w)|^2\, dudv \leq \int\limits_E K_{\mu_n}(z)\, dxdy, \tag{14}$$

где $w = u + iv$. Из (14) получаем, что нормы $\|f_n^{-1}\|$ равностепенно ограничены в $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$ и, следовательно, $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$ (см. теорему III.3.5 в [1], а также теорему 1 в [13]). Тогда отображение f имеет $\left(N^{-1}\right)$-свойство (см. теорему III.6.1 в [3]) и $J_f \neq 0$ почти всюду в D (см. теорему 1 в [14]).

Соотношение (10) следует из леммы 1.

Теорема доказана.

3. Теорема нормальности. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неубывающая выпуклая функция, $M(\Omega)$ — произвольная функция открытого множества Ω в D, а $\Delta > 0$. Обозначим через $\mathfrak{F}^M_{\Phi,\Delta}$ класс всех регулярных решений $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с комплексными коэффициентами μ таких, что $h\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)\right) \geq \Delta$ и

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \leq M(\Omega) \tag{15}$$

для любого открытого множества Ω в D.

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *нормальным*, если каждая последовательность отображений f_n из $\mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится к непрерывному отображению $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ равномерно на каждом компактном множестве $K \subset \mathbb{C}$. Нормальность тесно связана со следующим понятием. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $h\left(f(z), f(z_0)\right) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и $z \in \mathbb{C}$ с $|z - z_0| < \delta$. Семейство $\mathfrak{F}$ называется *равностепенно непрерывным*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$.

Для каждой неубывающей функции $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ обратную функцию $\Phi^{-1}\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ можно корректно определить следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t.$$

Здесь инфимум равен ∞, если множество элементов $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также неубывающая.

Теорема 2. *Пусть функция* Φ *такая, что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{16}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$. *Тогда класс* $\mathfrak{F}^M_{\Phi,\Delta}$ *образует нормальное семейство для любого* $\Delta > 0$ *и любой локально конечной функции множества* $M(\Omega)$.

Доказательство. Пусть f — отображение из класса $\mathfrak{F}^M_{\Phi,\Delta}$. Без ограничения общности будем считать, что $\Phi(0) > 0$. Отображение f является регулярным и, следовательно, кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$, $\mu = \mu_f$ во всех точках области D (см. следствие 3.1 в [15], а также лемму 20.9.1 в [16]).

Согласно критерию Арцела – Асколи (см. п. 20.4 в [17]) достаточно показать, что отображение из $\mathfrak{F}^M_{\Phi,\Delta}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $z_0 \in D$. Из теоремы 7.3 в [2] следует, что

$$h\left(f(z), f(z_0)\right) \ \leq \ \frac{32}{\Delta} \exp\left\{-\int\limits_{|z-z_0|}^{\rho} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}\right\} \tag{17}$$

для любого $z \in B(z_0, \rho)$ и $\rho = \rho(z_0) < \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$ такого, что $M(B(z_0,\,\rho)) < \infty$, где $k_{z_0}(r)$ – среднее значение $K_\mu(z)$ по окружности $|\zeta - z_0| = r$. После замены $t = r/\rho$ интеграл справа в (17) оценивается следующим образом (см. лемму 3.1 в [18]):

$$\int\limits_{|z-z_0|}^{\rho} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{tk(t)} \geq \frac{1}{2} \int\limits_{eP(\varepsilon)}^{P(\varepsilon)/\varepsilon^2} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)},$$

где $\varepsilon = |z - z_0|/\rho$, $k(t) = k_{z_0}(\rho t)$ и

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\rho^2\left(1-\varepsilon^2\right)} \int\limits_{R} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right) d\xi\, d\eta.$$

Здесь $R = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < |\zeta - z_0| < \rho\}$ — кольцо с центром в z_0, $\zeta = \xi + i\eta$. Отметим, что

$$P(\varepsilon) \leq \frac{\beta(z_0)}{2\pi\left(1-\varepsilon^2\right)} \int\limits_{R} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right) \frac{d\xi\, d\eta}{\left(1+|\zeta|^2\right)^2}\,.$$

где $\beta(z_0) = (1 + (\rho(z_0) + |z_0|)^2)^2/\rho^2(z_0)$, так как $|\zeta| \leq |\zeta - z_0| + |z_0| \leq \rho(z_0) + |z_0|$ при $\zeta \in R$. Таким образом,

$$\Phi(0) \leq P(\varepsilon) \leq \frac{\beta(z_0)}{\pi} M(R),$$

если $\varepsilon \leq 1/\sqrt{2}$ и, в частности, если $\varepsilon \leq 1/2$. Следовательно,

$$h\left(f(z), f(z_0)\right) \quad \leq \quad \frac{32}{\Delta} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int\limits_{\beta(z_0)M(R)}^{\frac{\Phi(0)\rho^2(z_0)}{|z-z_0|^2}} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(r)}\right\} \tag{18}$$

для всех z таких, что $|z - z_0| < \rho(z_0)/2$. Значит, отображения $f \in \mathfrak{F}^M_{\Phi,\,\Delta}$ равностепенно непрерывны в точке z_0.

Теорема доказана.

4. Теорема компактности. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функция* $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *удовлетворяет условию* (16), $M(\Omega)$ *— локально конечная функция открытого множества* Ω *в* $D \subseteq \mathbb{C}$. *Если* f_n *— последовательность регулярных решений уравнения Бельтрами, удовлетворяющих условию* (15), *такая, что* $f_n(z_1) = z_1$, $f_n(z_2) = z_2$ *и* $f_n \to f$ *равномерно на каждом компактном подмножестве в* D, *то предельное отображение* f *— гомеоморфизм.*

Доказательство. Возьмем точку $z_0 \in D$ и для $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}(z_0,\, \partial D)$ положим $A = A(z_0,\, r_1,\, r_2)$. В силу условия (15) по теореме 3.1.2 в [7] найдется число $\Psi_A < \infty$ такое, что

$$\int\limits_{A} K_{\mu_n}(z)\, dxdy \leq \Psi_A, \tag{19}$$

так как $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — строго выпуклая функция.

Отображение f_n является регулярным и, следовательно, кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_{\mu_n}(z)$, $\mu_n = \mu_{f_n}$ во всех точках области D (см. следствие 3.1 в [15], а также лемму 20.9.1 в [16]). По лемме 7.3 в [2] получаем

$$\frac{2\pi}{M\left(\Delta\left(f_n S_1,\, f_n S_2,\, f_n A\right)\right)} \geq \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r k_{z_0,\, n}(r)}, \tag{20}$$

где $k_{z_0,n}(r)$ — среднее значение $K_{\mu_n}(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$, $S_j = S(z_0, r_j)$, $j = 1, 2$.

Найдется измеримое подмножество X множества $[r_1, r_2]$ меры $(r_2 - r_1)/2$, на котором

$$\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)\, d\varphi \leq \frac{8\Psi_A}{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + 3r_1\right)}\,.$$

В противном случае имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)\, d\varphi r dr > \frac{8\Psi_A}{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + 3r_1\right)} \int\limits_{r_1}^{(r_2+r_1)/2} r\, dr = \Psi_A,$$

что противоречит (19).

Следовательно, для любого A найдется q, определенное ниже, такое, что для всех n

$$\frac{2\pi}{M\left(\Delta\left(f_n S_1,\, f_n S_2,\, f_n A\right)\right)} \geq \pi \int\limits_X \frac{dr/r}{\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) d\varphi} \geq$$

$$\geq \frac{\pi\left(r_2 + 3r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)}{8\Psi_A} \int\limits_{(r_1+r_2)/2}^{r_2} \frac{dr}{r} = q > 0.$$

Поэтому по лемме 1 в [19] $f(z)$ — гомеоморфизм.

Лемма 2 доказана.

Пусть $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неубывающая выпуклая функция, а $M(\Omega)$ — функция открытого множества Ω в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_\Phi^M$ класс всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\int\limits_\Omega \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \leq M(\Omega), \tag{21}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Комбинируя теоремы 1 и 2, а также лемму 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть функция* $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *непрерывная строго выпуклая и удовлетворяет условию* (16), *а функция* $M(\Omega)$ *открытого множества* Ω *в* $\mathbb{C}$ *ограничена. Тогда класс* $\mathfrak{F}_\Phi^M$ *является компактным.*

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 376 p.
3. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.
4. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equat. – 2009. – **54**, № 10. – P. 935 – 950.
5. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75 – 85.
6. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.
7. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
8. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009 – 1019.
9. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во инстор. лит., 1949. – 494 с.
10. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 4. – P. 524 – 535.
11. *Kolomoitsev Iu. S., Ryazanov V. I.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations // Proc. Inst. Appl. Mech. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2009. – **19**. – P. 116 – 124.
12. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 2006. – **180**, № 1. – P. 75 – 95.
13. *Суворов Г. Д.* Семейства плоских топологических отображений – Новосибирск: Ред.-изд. совет Сиб. отд-ния АН СССР, 1965. – 264 с.
14. *Пономарев С. П.* N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 3. – С. 411 – 418.
15. *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 285 – 289.
16. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. – Princeton Univ. Press, 2009. – 677 p.
17. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1971. – **299**. – 144 p.
18. *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – **36**. – P. 231 – 244.
19. *Brakalova M. A., Jenkins J. A.* On solutions of the Beltrami equation // J. Anal. Math. – 1998. – **76**. – P. 67 – 92.

Получено 06.07.10,
после доработки — 06.01.11