УДК 519-7

**С. М. Петренко** (ТОВ „Вайз Інвест Груп”, Київ),
**О. Л. Ребенко, М. В. Тертичний** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО КВАЗІНЕПЕРЕРВНУ АПРОКСИМАЦІЮ В КЛАСИЧНІЙ СТАТИСТИЧНІЙ МЕХАНІЦІ

A continuous infinite systems of point particles with strong superstable interaction are considered in the framework of classical statistical mechanics. The family of approximated correlation functions is determined in such a way that they take into account only those configurations of particles in the space $\mathbb{R}^d$ which, for a given partition of $\mathbb{R}^d$ into nonintersecting hypercubes with a volume $a^d$, contain no more than one particle in every cube. We prove that so defined approximations of correlation functions pointwise converge to the proper correlation functions of the initial system if the parameter of approximation $a$ tends to zero for any positive values of an inverse temperature $\beta$ and a fugacity $z$. This result is obtained for both two-body and many-body interaction potentials.

В рамках классической статистической механики рассматриваются непрерывные бесконечные системы точечных частиц, взаимодействующих с помощью усиленно сверхустойчивого взаимодействия. Семейство аппроксимируемых корреляционных функций определяется таким образом, что они учитывают только те конфигурации частиц в пространстве $\mathbb{R}^d$, которые для заданного розбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на непересекающиеся гиперкубики объема $a^d$ содержат не более чем одну частицу в каждом кубике. Доказано, что так определенные аппроксимации корреляционных функций сходятся поточечно к собственно корреляционным функциям системы, когда параметр аппроксимации $a$ стремится к 0, при произвольных положительных значениях обратной температуры $\beta$ и активности $z$. Этот результат получен как для двухчастичных, так и многочастичных потенциалов взаимодействия.

**1. Вступ.** Квазінеперервну апроксимацію класичної статистичної механіки було запропоновано в роботі [1] для дослідження нескінченних систем точкових частинок, що взаємодіють за допомогою двочастинкового (парного) посилено надстійкого потенціалу. Суть такої апроксимації полягає у тому, що в інтегралах (інтеграли Лебега – Пуассона по всіх можливих конфігураціях частинок), які входять в означення основних характеристик системи, таких як велика статистична сума та кореляційні функції, інтегрування виконується лише по таких конфігураціях, які для заданого розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на неперетинні гіперкубики об'ємом $a^d$ містять не більше ніж одну точку (частинку) у кожному кубику розбиття. Кореляційні функції та тиск системи, визначені таким чином, збігаються поточково (при $a$, що прямує до 0) до відповідних величин, у яких інтегрування виконується по усіх можливих конфігураціях, якщо потенціал взаємодії є достатньо сингулярним у точці початку координат. Більш точно, коли потенціал не є локально інтегровним у будь-якій обмеженій області простору $\mathbb{R}^d$, яка містить точку початку координат. Цей факт хоч і є передбачуваним з точки зору фізичних міркувань, але досить несподіваний з математичної точки зору, оскільки множина таких конфігурацій має міру нуль по відношенню до міри Пуассона чи міри Гіббса для нескінченної системи.

Разом з тим визначені таким чином системи легко апроксимувати системами *ґратчастих газів*, вивчення яких значно спрощується. Особливо важливим перехід від неперервних систем до ґратчастих газів може виявитись при дослідженні критичної поведінки нескінченних неперервних систем в області фазових переходів.

У роботі [1] показано, що для довільних додатних значень температури системи $T$ (або оберненої температури $\beta = 1/kT$) та активності $z$ апроксимований тиск системи $p^{(-)}(z,\beta;a)$ прямує до справжнього тиску $p(z,\beta)$ при $a$, що прямує до 0. У роботі [2] цей результат узагальнено для систем з багаточастинковою взаємодією. Пізніше в роботі [3] такий самий результат було отримано для сім'ї кореляційних функцій, але тільки в області достатньо малих значень параметра $z$, значення якого обмежувались радіусом збіжності розкладів Кірквуда – Зальцбурга для кореляційних функцій системи.

У цій роботі ми узагальнюємо результат роботи [3] на випадок довільних додатних значень параметрів $\beta$, $z$. Використовуючи розклад кореляційних функцій за так званими *щільними* конфігураціями, який було запропоновано в роботі [4] для потенціалів фінітної дії і в роботі [5] для потенціалів з нескінченним радіусом взаємодії, ми встановлюємо, що сім’я апроксимованих кореляційних функцій $\rho_\Lambda^{(-)}(z,\beta;a)$ для системи в обмеженому об’ємі $\Lambda \Subset \mathbb{R}^d$ рівномірно обмежена константою, яка не залежить від параметра апроксимації $a$ і об’єму $\Lambda$ і поточково збігається до кореляційних функцій $\rho(z,\beta)$ при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ і $a \to 0$ при довільних додатних значеннях оберненої температури $\beta$ та активності $z$. Цей результат буде одержано як для парних потенціалів посилено надстійкого типу, так і для багаточастинкових посилено суперстійких взаємодій.

**2. Конфігураційні простори.** ***2.1. Основні конфігураційні простори.*** Нехай $\mathbb{R}^d$ — $d$-вимірний евклідовий простір. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ позначимо сім’ю всіх борелівських множин в $\mathbb{R}^d$. Визначимо простір конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ як множину локально скінченних підмножин (множину положень частинок у просторі $\mathbb{R}^d$):

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{\gamma \subset \mathbb{R}^d \,\middle|\, \gamma \cap \Lambda| < \infty \ \text{ для всіх } \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\right\},$$

де $|A| := \mathrm{card}\{A\}$ — кількість точок множини $A$, а $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ — система всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Визначимо також простір скінченних конфігурацій $\Gamma_0$:

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \left\{\eta \subset \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\eta| = n, \ n \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ визначимо відображення $N_\Lambda \colon \Gamma \to \mathbb{N}_0$ вигляду

$$N_\Lambda(\eta) := |\eta \cap \Lambda|.$$

Тоді $\mathfrak{B}(\Gamma)$ можна визначити також як найменшу $\sigma$-алгебру на $\Gamma$, по відношенню до якої всі ці відображення є вимірними для кожного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, тобто $\sigma(N_\Lambda \big| \Lambda \in \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d))$ (більш детально див. в [6, 7]).

Простір скінченних конфігурацій в обмеженому $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ позначимо через $\Gamma_\Lambda$:

$$\Gamma_\Lambda := \left\{\gamma \in \Gamma_0 \,\middle|\, \gamma \subset \Lambda, \ \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\right\},$$

а відповідні $\sigma$-алгебри на $\Gamma_\Lambda$ і $\Gamma_0$ — через $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ та $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$.

***2.2. Міра Лебега – Пуассона.*** Позначимо через $\sigma$ міру Лебега на $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо міру $\sigma^{\otimes n}$ на множині

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \,\middle|\, x_k \neq x_l, \ \ \text{якщо} \ \ k \neq l\right\},$$

а отже, як міру $\sigma^{(n)}$ на $\Gamma^{(n)}$ через відображення

$$\mathrm{sym}_n \colon \ \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \ni (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \{x_1,\ldots,x_n\} \in \Gamma^{(n)}.$$

За допомогою міри $\sigma^{(n)}$ визначимо міру Лебега – Пуассона (або ненормовану міру Пуассона) $\lambda_\sigma$ на $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$ формулою

$$\lambda_{z\sigma} := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\sigma^{(n)}. \tag{2.1}$$

Звуження міри $\lambda_\sigma$ на $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ також будемо позначати $\lambda_\sigma \equiv \lambda_\sigma^\Lambda$. З більш детальною структурою конфігураційних просторів $\Gamma$, $\Gamma_0$, $\Gamma_\Lambda$ та елементами аналізу на цих просторах можна ознайомитись у роботі [8].

***2.3. Розбиття $\mathbb{R}^d$ на кубики.*** Наслідуючи Руеля [9], введемо розбиття евклідового простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні неперетинні кубики. Нехай $a > 0$ — довільне число. Для кожного $r \in \mathbb{Z}^d$ визначимо елементарний кубик із ребром $a$ і центром у точці $ar \in \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a(r^i - 1/2) \leq x^i < a(r^i + 1/2)\}. \tag{2.2}$$

Ми будемо писати $\Delta$ замість $\Delta_a(r)$, якщо по контексту зрозуміло, про який кубик йде мова. Позначимо через $\overline{\Delta}_a$ розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на кубики $\Delta_a(r)$. Введемо також поняття *узгоджених розбиттів*.

**Означення 2.1.** *Два розбиття $\overline{\Delta}_a$ і $\overline{\Delta}_{a'}$ з $a' < a$ є узгодженими, якщо $a/a' \in \in \mathbb{N}$, а розбиття $\overline{\Delta}_a$ можна отримати з розбиття $\overline{\Delta}_{a'}$ вилученням усіх гіперграней, які не лежать на гіпергранях розбиття $\overline{\Delta}_a$.*

Щоб уникнути непорозумінь, у подальшому будемо мати справу лише з узгодженими розбиттями.

***2.4. Додаткові конфігураційні простори.*** Визначимо два додаткових конфігураційних простори: $\Gamma_\Lambda^{\mathrm{dil}}$ будемо називати простором *розріджених* конфігурацій, а $\Gamma_\Lambda^{\mathrm{den}}$ — простором *щільних* конфігурацій.

Не обмежуючи загальності розгляду будемо розглядати лише такі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, які є об'єднанням кубиків $\Delta_a(r)$ з деяким фіксованим $a$, що залежить від потенціалу взаємодії. У випадках, коли необхідно підкреслити, що об'єм $\Lambda$ є об'єднанням кубиків із розбиття $\overline{\Delta}_a$, будемо позначати такий об'єм через $\Lambda(a)$. Отже, простір розріджених конфігурацій визначимо формулою

$$\Gamma_\Lambda^{\mathrm{dil}} := \big\{\gamma \in \Gamma_\Lambda \,\big|\, |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \;\text{ для всіх }\; \Delta \subset \Lambda\big\},$$

а простір щільних конфігурацій — формулою

$$\Gamma_\Lambda^{\mathrm{den}} := \big\{\gamma \in \Gamma_\Lambda \,\big|\, |\gamma_\Delta| \geq 2 \;\text{ для всіх }\; \Delta \subset \Lambda\big\}.$$

Для довільного $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ і довільної фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_\Lambda$ розщепимо простір *щільних* конфігурацій $\Gamma_\Delta^{\mathrm{den}}$ на два підпростори:

$$\Gamma_\Delta^{(>)}(\eta) = \Gamma_\Delta^{(>)} := \big\{\gamma \in \Gamma_\Delta^{\mathrm{den}} \,\big|\, |\gamma| > d_\eta^\varepsilon(\Delta)\big\}$$

і

$$\Gamma_\Delta^{(<)}(\eta) = \Gamma_\Delta^{(<)} := \big\{\gamma \in \Gamma_\Delta^{\mathrm{den}} \,\big|\, |\gamma| \leq d_\eta^\varepsilon(\Delta)\big\},$$

де $\Delta \equiv \Delta_a(r)$, $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$d_\eta(\Delta) = \mathrm{dist}(\eta, \boldsymbol{\Delta}), \qquad d_\eta^\varepsilon(\Delta) = (d_\eta(\Delta))^\varepsilon,$$

$\boldsymbol{\Delta}$ — кубик, що утворюється з кубика $\Delta$ замиканням множини його внутрішніх точок, тобто в кубику $\boldsymbol{\Delta}$ всі точки його граней належать $\boldsymbol{\Delta}$. Очевидно також, що $\Gamma_\Delta^{\mathrm{den}} = \Gamma_\Delta^{(>)} \cup \Gamma_\Delta^{(<)}$.

І нарешті для $X_k = \cup_{i=1}^{k}\Delta_a(r_i)$

$$\Gamma_{X_k}^{(>)}(\eta) = \Gamma_{X_k}^{(>)} := \left\{\gamma \subset X_k \,\Big|\, |\gamma_\Delta| > d_\eta^\varepsilon(\Delta) \ \text{ для всіх } \ \Delta \subset X_k\right\}$$

і

$$\Gamma_{X_k}^{(<)}(\eta) = \Gamma_{X_k}^{(<)} := \left\{\gamma \subset X_k \,\Big|\, |\gamma_\Delta| \le d_\eta^\varepsilon(\Delta) \ \text{ для всіх } \ \Delta \subset X_k\right\}.$$

**3. Взаємодія.** В найбільш загальній ситуації взаємодія між частинками задається нескінченною послідовністю $p$-частинкових потенціалів:

$$V = \big(0, 0, V_2(x_1, x_2), V_3(x_1, x_2, x_3), \ldots, V_p(x_1, \ldots, x_p), \ldots\big). \tag{3.1}$$

У випадку двочастинкової (парної) взаємодії, яку частіше за інші розглядають у практичних задачах фізики, компоненти послідовності (3.1) мають вигляд

$$V_2(x_1, x_2) = \phi(|x_1 - x_2|), \qquad V_p \equiv 0, \quad p \ge 3.$$

Потенціальну енергію довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_0$ записують таким чином:

$$U(\gamma) = U_V(\gamma) = \sum_{p=2}^{|\gamma|} \sum_{\{x_1,\ldots,x_p\}\subset\gamma} V_p(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\eta\subseteq\gamma:\ |\eta|\ge 2} V(\eta),$$

а енергію взаємодії між двома конфігураціями $\eta$, $\gamma \in \Gamma_0$ визначають так:

$$W(\eta;\gamma) = W_V(\eta;\gamma) = U(\eta\cup\gamma) - U(\eta) - U(\gamma) =$$

$$= \sum_{p=2}^{|\eta\cup\gamma|} \sum_{\substack{i,j=1\\ i+j=p}}^{|\eta|,|\gamma|} \sum_{\substack{\{x_1,\ldots,x_i\}\subset\eta\\ \{y_1,\ldots,y_j\}\subset\gamma}} V_p(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j).$$

Відповідні формули для двочастинкової взаємодії мають вигляд

$$U(\gamma) = U_\phi(\gamma) = \sum_{\{x_1,x_2\}\subset\gamma} \phi(|x_1 - x_2|),$$

$$W(\eta;\gamma) = W_\phi(\eta;\gamma) = \sum_{\substack{x\in\eta\\ y\in\gamma}} \phi(|x - y|).$$

Визначимо три типи взаємодій, які обумовлені системами, що розглядаються в роботі.

**Означення 3.1.** *Взаємодія $U$ має назву*:

а) *стійкої, якщо існує константа $B > 0$ така, що*

$$U(\gamma) \ge -B|\gamma| \ \text{ для довільної } \ \gamma \in \Gamma_0;$$

б) *надстійкої, якщо існують константи $A > 0$, $B \ge 0$ та розбиття $\overline{\Delta_a}$ такі, що*

$$U(\gamma) \ge A \sum_{\Delta\in\overline{\Delta_a}} |\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma| \ \text{ для довільної } \ \gamma \in \Gamma_0; \tag{3.2}$$

в) *посилено надстійкої, якщо існують $m \ge 2$, $a_0 > 0$ такі, що для будь-якого $0 < a \le a_0$ існують константи $A(a) > 0$, $B(a) \ge 0$ такі, що*

$$U(\gamma) \ge A(a) \sum_{\Delta\in\overline{\Delta_a}:|\gamma_\Delta|\ge 2} |\gamma_\Delta|^m - B(a)|\gamma| \ \text{ для довільної } \ \gamma \in \Gamma_0. \tag{3.3}$$

У зв'язку з наведеним означенням існує проблема знаходження достатніх умов на потенціали, які забезпечують стійкість, надстійкість або посилену надстійкість системи. Розв'язання цієї проблеми має досить довгу історію (короткий огляд цієї історії та деякі нові результати можна знайти в [10, 11]).

***Зауваження*** **3.1.** Якщо нерівність (3.2) виконується для деякого розбиття $\overline{\Delta_a}$ з константами $A$ і $B$, то вона виконується з тими самими константами для будь-якого розбиття $\overline{\Delta_{a'}}$, якщо $a' < a$ і вони є узгодженими (див. означення 2.1).

***Зауваження*** **3.2.** Якщо потенціал є посилено надстійким, то він є також надстійким з $A = A(a_0),\ B = B(a_0)$.

***3.1. Визначення системи з двочастинковою взаємодією.*** (**A**). *Умови на потенціал взаємодії.* Розглянемо потенціали загального вигляду $\phi$, які є неперервними функціями на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ і для яких існують константи $r_0 > 0,\ R > r_0,\ \varphi_0 > 0,$ $\varphi_1 > 0,$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що

$$\phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для} \quad |x| \geq R,$$

$$\phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s}, \quad s \geq d \quad \text{для} \quad |x| \leq r_0,$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\}, \qquad \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}. \tag{3.4}$$

Зазначимо, що в означенні 3.1в) константа $a_0 \leq r_0$. Для потенціалів взаємодії, які задовольняють умови (**A**), визначимо дві важливі характеристики (для довільного $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ з $a \leq a_0$):

$$\upsilon_\varepsilon(a) := \sum_{\Delta' \in \overline{\Delta}} \sup_{x\in\Delta} \sup_{y \in \Delta'} \phi^-(|x-y|)|x-y|^\varepsilon \ \ \text{для довільного} \ \ \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{3.5}$$

$$b(a) := \inf_{\{x,y\}\subset\Delta} \phi^+(|x-y|). \tag{3.6}$$

Внаслідок трансляційної інваріантності двочастинкового потенціалу величини $\upsilon_0$ і $b$ не залежать від положення кубика $\Delta$. Справедливим є наступне твердження.

**Твердження 3.1.** *Нехай потенціал $\phi$ задовольняє умови* (**A**). *Тоді взаємодія є посилено надстійкою, а енергія $U$ задовольняє нерівність* (3.3) *з деяким* $0 < a_0 < r_0$ *і для* $s > d$

$$m = 2, \qquad A(a) = \frac{b(a) - 2\upsilon_0(a)}{4} > 0, \qquad B(a) = \frac{\upsilon_0(a)}{2} \tag{3.7}$$

*для довільного* $a \leq a_0$.

Доведення див. в [3].

Більш сильний результат отримано в роботі [10], але для нашого розгляду достатньо нерівностей (3.7).

Як і в роботі [5], введемо позначення

$$\phi_\delta^+(|x|) := (1-\delta)\,\phi^+(|x|), \qquad U_\delta^+ := U_{\phi_\sigma^+}, \tag{3.8}$$

$$\phi_\delta^{st} := \delta\phi^+(|x|) - \phi^-(|x|), \qquad U_\delta^{st} := U_{\phi_\delta^{st}}, \quad \delta \in (0,1). \tag{3.9}$$

З (3.8), (3.9) легко бачити, що

$$\phi(|x|) = \phi_\delta^+(|x|) + \phi_\delta^{st}(|x|), \qquad U(\gamma) = U_\delta^+(\gamma) + U_\delta^{st}(\gamma). \tag{3.10}$$

**Твердження 3.2.** *Нехай потенціал $\phi$ задовольняє умови* (**A**). *Тоді існують* $0 < a_* < r_0$ *та* $\delta \in (0,1)$ *такі, що*

$$(1-\delta)b(a) > 2\upsilon_0(a) \quad \textit{для} \quad a \le a_*, \tag{3.11}$$

*а потенціал* $\phi_\delta^{st}$ *є стійким*: $U_\delta^{st} := U_{\phi_\delta^{st}}(\gamma) \ge -B_\delta|\gamma|$, $\gamma \in \Gamma_0$ *з*

$$B_\delta = \frac{1}{2}\upsilon_0(a_*) = \frac{\delta}{4}b(a_*). \tag{3.12}$$

***Доведення.*** Нерівність (3.11) є наслідком умов (**A**) та означень (3.5), (3.6) для достатньо малих $a$ внаслідок їх поведінки:

$$b(a) \sim \frac{\varphi_0}{a^s}, \qquad \upsilon_\varepsilon(a) \sim \frac{\phi_\varepsilon}{a^d},$$

оскільки для $s > d$ можна вибрати достатньо мале $a = a_*$ або $\varphi_0 >> \phi_\varepsilon$ для $s = d$, де

$$\phi_0\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi^-(|x|)|x|^\varepsilon dx.$$

Як і в роботі [3] (див. твердження 2.1), легко одержати

$$U_{\varphi_\delta^{st}}(\gamma) \ge \sum_{\Delta\in\,\overline{\Delta}_a:|\gamma_\Delta|\ge 2} |\gamma_\Delta|^2\left(\delta\frac{b(a)}{4} - \frac{\upsilon_0(a)}{2}\right) - \frac{\upsilon_0(a)}{2}|\gamma|.$$

Величину $a_*$ виберемо коренем рівняння

$$\delta\frac{b(a)}{4} - \frac{\upsilon_0(a)}{2} = 0.$$

Тоді, щоб задовольнити умову (3.11), слід вибрати $\delta > 1/2$, а константу $B_\delta$ в (3.12) можна виразити через параметри потенціалу $\varphi_0$, $\phi_0$, $s$ і розмірність простору $d$ (див. твердження 2.2 в [3].

***3.2. Визначення системи з багаточастинковою взаємодією.*** Розглянемо багаточастинковий потенціал взаємодії загального типу, який визначається сім'єю $p$-частинкових потенціалів $V_p\colon (R^d)^{\otimes p} \to \mathbb{R}$, $p \ge 2$. На сім'ю потенціалів $V := \{V_p\}_{p\ge 2}$ будемо накладати наступні умови:

($\mathbf{A_1}$) *неперервність*:

$$V_p \in C(\widetilde{(\mathbb{R}^d)^{\otimes p}}), \quad p \ge 2,$$

де

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}} = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}\big|\, x_k \ne x_l \ \text{ при } \ k \ne l\big\};$$

($\mathbf{A_2}$) *симетричність*: для довільного $p \ge 2$, довільних $(x_1,\ldots,x_p) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ і довільної перестановки $\pi$ чисел $\{1,\ldots,p\}$

$$V_p(x_1,\ldots,x_p) = V_p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(p)});$$

($\mathbf{A_3}$) *трансляційна інваріантність*: для довільного $p \ge 2$, довільних $(x_1,\ldots,x_p) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ і довільного $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$V_p(x_1,\ldots,x_p) = V_p(x_1+x_0,\ldots,x_p+x_0);$$

$(\mathbf{A_4})$ *надстійкість*: для довільного $p \geq 2$ потенціали $V_p$ можна зобразити у вигляді

$$V_p = \widetilde{V}_p^+ + V_p^{(st)}, \qquad V_p^{(st)} = \overline{V}_p^+ + V_p^-,$$
$$\widetilde{V}^+ := (\widetilde{V}_p^+)_{p\geq 2}, \qquad V^{(st)} := (V_p^{(st)})_{p\geq 2},$$

де $\widetilde{V}_p^+ + \overline{V}_p^+ = V_p^+$, $V_p^{\pm}$ визначається так само, як в (3.4), а $V_p^{(st)}$, $p \geq 2$, забезпечує стійкість відповідної енергії $U_{V^{(st)}}$, тобто існує константа $B \geq 0$ така, що для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$

$$U_{V^{(st)}}(\eta) \geq -B|\eta|.$$

Відповідне розбиття енергії запишемо у вигляді

$$U(\gamma) = \widetilde{U}^+(\gamma) + U^{st}(\gamma). \tag{3.13}$$

Достатні умови на потенціали $V_p$, які забезпечують надстійкість, були отримані в роботі [11].

У роботі [9] рівномірну за об'ємом обмеженість кореляційних функцій було отримано для систем частинок з потенціалами взаємодії, що забезпечують *надстійкість* та *умову регулярності знизу* (див. [9]). Для парних потенціалів, які задовольняють умови (**A**), обидві умови виконуються. Але для багаточастинкових потенціалів, які не є повністю позитивними, для всіх $p \geq 3$ умова регулярності знизу не виконується. Тому, як і в роботах [12, 13], сформулюємо так зване *притягувально-відштовхувальне співвідношення*, яке дає змогу довести нерівність, що фактично замінює умову регулярності знизу.

Щоб сформулювати умови на потенціали $V_p$, введемо деякі допоміжні конструкції. Нехай $p \geq 2$ та $N \in \mathbb{N}$. Для довільного об'єднання $X_N := \cup_{j=1}^N \Delta_j$ кубиків з розбиття $\overline{\Delta}_a$ (див. (2.2)) і довільного $\varepsilon \geq 0$ визначимо такі величини:

$$I_p^{k_1,\ldots,k_N}(\Delta_1;\ldots;\Delta_N) := \sup_{\substack{x_{i_1}^{(1)}\in\Delta_1,\ldots,x_{i_N}^{(N)}\in\Delta_N \\ i_1=\overline{1,k_1},\ldots,i_N=\overline{1,k_N}}} V_p^-(x_1^{(1)},\ldots,x_{k_N}^{(N)}),$$

де $k_1+\ldots+k_N = p$, $k_j \geq 1, j = \overline{1,N}$, а

$$I_p^{k_1,\ldots,k_M|\bar{k}}(\Delta_1;\ldots;\Delta_M|\varepsilon;(\Delta)_\pi) :=$$
$$:= \sum_{\Delta_1',\ldots,\Delta_{\bar{k}}'\in\overline{\Delta}_a} I_p^{k_1,\ldots,k_M,1,1,\ldots,1}(\Delta_1;\ldots;\Delta_M;\Delta_1';\ldots;\Delta_{\bar{k}}')\prod_{i=1}^{\bar{k}}\left(1+d^{\varepsilon}_{\Delta_i',\Delta_{\pi(i)}}\right), \tag{3.14}$$

$d^{\varepsilon}_{\Delta_i',\Delta_{\pi(i)}} = \left(\mathrm{dist}(\boldsymbol{\Delta}_i',\boldsymbol{\Delta}_{\pi(i)})\right)^{\varepsilon}$, $\pi$ — відображення множини індексів $\{1,\ldots,\bar{k}\}$ у множину $\{1,\ldots,M\}$, $(\Delta)_\pi := \{\Delta_{\pi(1)},\ldots,\Delta_{\pi(\bar{k})}\}$ і $k_1+\ldots+k_M+\bar{k} = p$. Відстань між кубиками — це відстань між їхніми замиканнями.

Зауважимо, що внаслідок трансляційної інваріантності потенціалів взаємодії у випадку $M = 1$ усі індекси $\pi(i) = 1$, а величина

$$I_p^{k_1|\bar{k}}(\Delta_1|\varepsilon;\Delta_1) = I_p^{k_1|\bar{k}}(a;\varepsilon), \tag{3.15}$$

тобто не залежить від положення кубика $\Delta_1$. Для додатних частин $\widetilde{V}_p^+$ потенціалів взаємодії визначимо величину

$$v_p^{k_1,\ldots,k_N}\Big(\Delta_1,\ldots,\Delta_N\Big):=\inf_{\substack{x_{i_1}^{(1)}\in\Delta_1,\ldots,x_{i_N}^{(N)}\in\Delta_N\\ i_1=\overline{1,k_1},\ldots,i_N=\overline{1,k_N}}}\widetilde{V}_p^+(x_1^{(1)},\ldots,x_{k_N}^{(N)}).$$

$(\mathbf{A_5})$ *Притягувально-відштовхувальне співвідношення.* Існує $a_0>0$ таке, що для довільного $N\in\mathbb{N}$, довільної множини $X_N:=\cup_{j=1}^N\Delta_j$, $\Delta_j\in\overline{\Delta}_a$ з $a\le a_0$ виконуються наступні нерівності:

(i) для довільного $\Delta\in\overline{\Delta}_a$ і будь-якого $p\ge 2$

$$V_p(x_1,\ldots,x_p)\ge 0,\quad \text{якщо}\quad \{x_1,\ldots,x_p\}\subset\Delta,$$

(ii) для довільних $p\ge 2$, $1\le N<p$ та $\pi\colon\{1,\ldots,n\}\mapsto\{1,\ldots,N\}$

$$v_p^{k_1,\ldots,k_N}(\Delta_1,\ldots,\Delta_N)\ge$$

$$\ge 2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\substack{m_i\ge 1,i=\overline{1,N};n\ge 1\\ m_1+\ldots+m_N+n=p+l}}C_{k_1}^{m_1}\ldots C_{k_N}^{m_N}(2p)^n I_{p+l}^{m_1,\ldots,m_N|n}(\Delta_1,\ldots,\Delta_N;\varepsilon,(\Delta)_\pi),\tag{3.16}$$

де $k_1+\ldots+k_N=p$, $C_k^m=k!/m!(k-m)!$, якщо $k\ge m$, і $C_k^m=0$, якщо $m>k$.

***Зауваження* 3.3.** Умова (3.16) виникає з комбінаторних міркувань, які викликані необхідністю контролювати від'ємну частину потенціалів взаємодії. З точки зору фізичних міркувань вона означає, що коли у кубику знаходяться принаймні дві частинки (а саме така ситуація виникне у випадку, коли $N<p$), то при достатньо малих розмірах кубика їх $p$-частинкова енергія відштовхування повинна бути більшою за енергії притягання цих частинок з іншими частинками системи для всіх $l\ge p$-частинкових взаємодій.

**Лема 3.1.** *Нехай потенціали* $V=\{V_p\}_{p\ge 2}$ *задовольняють умови* $(\mathbf{A_1})-(\mathbf{A_5})$. *Тоді взаємодія є посилено надстійкою, тобто існують* $m\ge 2$, $a_0>0$ *такі, що для довільного* $0<a\le a_0$ *існують константи* $A(a)>0$, $B(a)\ge 0$ *такі, що*

$$U(\gamma)\ge A(a)\sum_{\Delta\in\overline{\Delta}_a:\ |\gamma_\Delta|\ge 2}|\gamma_\Delta|^m-B(a)|\gamma|\ \ \textit{для будь-якого}\ \ \gamma\in\Gamma_0\tag{3.17}$$

*з*

$$A(a)=v_2^2(a)-2\sum_{p\ge 2}4^pI_p^{1|p-1}(a;0),\qquad B(a)=\sum_{p\ge 2}I_p^{1|p-1}(a;0),\quad m=2,$$

*і для довільних* $\gamma\in\eta\cup\Gamma_{X'}^{(>)}$ *і* $\overline{\gamma}\in\Gamma_X^{(<)}\cup\Gamma_{\Lambda\setminus(X\cup X')}^{(\mathrm{dil})}$, $X'\cap X=\varnothing$,

$$-\beta W(\gamma|\overline{\gamma})-\frac{1}{2}\beta U_{\widetilde{V}^+}(\gamma)leq\beta\bar{I}(a)|\eta|,\tag{3.18}$$

*де* $\bar{I}(a):=\sum_{p\ge 2}2^pI_p^{1|p-1}(a,0)$ (*див.* (3.14), (3.15)).

***Доведення*** повністю збігається з доведенням леми 3.2 в роботі [12] або леми 3.1 в роботі [13]. Основна відмінність полягає у тому, що для доведення нерівності (3.18) ми використовуємо більш громіздку, але більш слабку умову (3.16), ніж у роботах [12, 13].

***3.3. Велика статистична сума та кореляційні функції.*** Введемо важливу вимірну Γ-функцію, яку ми використаємо для визначення квазінеперервної апроксимації статистичних систем:

$$\chi_{-}^{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma \text{ з } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{3.19}$$

Запишемо вираз для великої статистичної суми, в якій враховуються всі можливі конфігурації частинок з $\Gamma_\Lambda$, і вираз для апроксимованої великої статистичної суми, в якій враховуються лише конфігурації з простору $\Gamma_\Lambda^{\mathrm{dil}}$:

$$Z_\Lambda(z,\beta) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{3.20}$$

$$Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \prod_{\Delta\in\overline{\Delta_a}\cap\Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}^{a}(d\gamma). \tag{3.21}$$

Визначимо кореляційні функції

$$\rho_\Lambda(\eta; z,\beta) := \frac{1}{Z_\Lambda(z,\beta)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad \eta\in\Gamma_\Lambda, \tag{3.22}$$

і відповідні кореляційні функції, що відповідають квазінеперервній апроксимації:

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\eta; z,\beta,a) := \frac{1}{Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}^{a}(\eta\cup d\gamma), \tag{3.23}$$

де згідно з (3.21)

$$\lambda_{z\sigma}^{a}(\eta\cup d\gamma) := \prod_{\Delta\in\overline{\Delta_a}\cap\Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{3.24}$$

**4. Основні результати.** Основні результати відносяться до статистичних характеристик нескінченних необмежених систем, для яких існує термодинамічний граничний перехід. Тому ми розглянемо послідовність $(\Lambda_l)$ обмежених вимірних областей простору $\mathbb{R}^d$:

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots \subset \Lambda_n \subset \ldots, \quad \bigcup_l \Lambda_l = \mathbb{R}^d, \tag{4.1}$$

в якій послідовність $(\Lambda_l)$ прямує до $\mathbb{R}^d$ в сенсі Фішера (див. [14], гл. 2, п. 2.1).

Відомо, що для довільної конфігурації $\eta\in\Gamma_0$ і довільної послідовності (4.1) такої, що $\eta\subset\Lambda_1$, існує підпослідовність $(\Lambda_k')$ послідовності $(\Lambda_l)$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\Lambda_k'}(\eta; z,\beta) = \rho(\eta; z,\beta) < \infty \tag{4.2}$$

для довільних додатних $z$, $\beta$ рівномірно на $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$. Цей результат є наслідком рівномірної обмеженості сім'ї кореляційних функцій $\{\rho_{\Lambda_l} : \Lambda_l \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\rho_{\Lambda_l}(\eta; z,\beta) \le \xi^{|\eta|} e^{-\beta U_\delta^{+}} \tag{4.3}$$

з деяким додатним $\xi$, що не залежить від $\Lambda_l$, $\eta$.

Нерівність (4.3) без експоненти у правій частині вперше було отримано в роботі [9]. У роботі [4] наведено нове доведення (значно спрощене завдяки новому підходу) з експонентою $e^{-\beta U_{1/2}^{+}}$, а в роботах [5, 12] цей результат було узагальнено на випадок багаточастинкових потенціалів взаємодії зі скінченним і нескінченним радіусом дії відповідно.

У наступному пункті ми наведемо основні моменти доведення наступної леми.

**Лема 4.1.** *Нехай потенціали* $V = \{V_p\}_{p\geq 2}$ *задовольняють умови* $(\mathbf{A})$ *у випадку двочастинкової взаємодії і умови* $(\mathbf{A_1})$– $(\mathbf{A_5})$ *для багаточастинкової взаємодії. Тоді для довільного* $\eta \in \Gamma_{\Lambda_l}$ *існують* $0 < a_* \leq a_0 < r_0$ *і деяка додатна константа* $\xi_- = \xi_-(a_*)$, *яка не залежить від* $\Lambda_l$ *і* $a$, *такі, що нерівність*

$$\rho_{\Lambda_l}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) \leq \xi_-^{|\eta|} e^{-\beta U_\delta^+} \tag{4.4}$$

*виконується для довільного* $a < a_*$ *такого, що* $a_*/a \in \mathbb{N}$.

Тоді, як і у попередньому випадку, існує підпослідовність $(\Lambda''_m)$ послідовності $(\Lambda_l)$ така, що існує границя

$$\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \lim_{m\to\infty} \rho_{\Lambda''_m}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) < \infty. \tag{4.5}$$

***Зауваження* 4.1.** Граничні функції $\rho(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ в (4.2) та (4.5) можуть бути різними для різних підпослідовностей $\Lambda'_k$ і $\Lambda''_m$. Тому для того, щоб функція $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ була апроксимацією функції $\rho(\eta; z, \beta)$, потрібно вибрати підпослідовність $\Lambda''_m$ у граничному переході (4.5), як підпослідовність послідовності $\Lambda'_k$.

Тепер сформулюємо основний результат цієї статті.

**Теорема 4.1.** *Нехай потенціали* $V = \{V_p\}_{p\geq 2}$ *задовольняють умови* $(\mathbf{A})$ *у випадку двочастинкової взаємодії і умови* $(\mathbf{A_1})$– $(\mathbf{A_5})$ *для багаточастинкової взаємодії. Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$, *довільних додатних* $z$ *і* $\beta$ *і довільної конфігурації* $\eta \in \Gamma_0$ *існує* $a = a(z, \beta, \varepsilon) > 0$ *таке, що*

$$|\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

*де* $\rho(\eta; z, \beta)$ *і* $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ — *граничні значення функцій* $\rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta)$ *і* $\rho_{\Lambda''_m}^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ *відповідно з тією самою підпослідовністю послідовності* $(\Lambda_l)$ (*див. зауваження* 4.1).

***Доведення*** ґрунтується на існуванні границь (4.2), (4.5) і наступній лемі.

**Лема 4.2.** *Нехай потенціали* $V = \{V_p\}_{p\geq 2}$ *задовольняють умови* $(\mathbf{A})$ *у випадку двочастинкової взаємодії і умови* $(\mathbf{A_1})$– $(\mathbf{A_5})$ *для багаточастинкової взаємодії. Тоді для довільної послідовності* $\Lambda_l$ *вигляду* (4.1)

$$\lim_{a\to 0} \rho_{\Lambda_l}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \rho_{\Lambda_l}(\eta; z, \beta), \tag{4.7}$$

*звідки випливає, що для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $a < a_*$ *таке, що виконується нерівність*

$$\left|\rho_{\Lambda_l}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) - \rho_{\Lambda_l}(\eta; z, \beta)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.8}$$

Внаслідок існування границь (4.2) і (4.3) для довільного $\varepsilon > 0$ існують $K_1 \in \mathbb{N}$ таке, що для $k \geq K_1$ справджується

$$\left|\rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta) - \rho(\eta; z, \beta)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.9}$$

і $K_2 \in \mathbb{N}$ таке, що для $k \geq K_2$ виконується нерівність

$$\left|\rho^{(-)}_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta, a) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.10}$$

Тоді теорема 4.1 випливає з (4.8) при $\Lambda_l \equiv \Lambda''_m$ і нерівностей (4.9), (4.10):

$$\left|\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)\right| =$$

$$= \Big|\rho(\eta; z, \beta) - \rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta) + \rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta) - \rho^{(-)}_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta, a) +$$

$$+ \rho^{(-)}_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta, a) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

***Наслідок* 4.1.** *Нерівність* (4.6) *забезпечує існування границі*

$$\lim_{a \to 0} \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \rho(\eta; z, \beta)$$

*для довільних додатних* $z, \beta > 0$ *і* $\eta \in \Gamma_0$.

У випадку двочастинкових потенціалів в області достатньо малих значень активності $z$ існування єдиної поточкової границі доведено в роботі [3].

**5. Доведення лем 4.1 і 4.2.** ***5.1. Доведення леми* 4.1** базується на розкладі кореляційних функцій за щільними конфігураціями, було запропоновано в роботі [5] (див. також [13]) і фактично збігається з доведенням теореми 2.2 в роботі [5] у випадку двочастинкової взаємодії і теореми 2.1 у роботі [13] у випадку багаточастинкової взаємодії. Основна відмінність доведення леми 4.1 полягає у тому, що в означенні кореляційних функцій $\rho^{(-)}_{\Lambda}(\eta; z, \beta, a)$ інтегрування по конфігураційному простору $\Gamma_\Lambda$ виконується за мірою $\lambda^a$ (див. (3.23), (3.24)), тоді як в означенні звичайних кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta; z, \beta)$ інтегрування виконується за мірою Лебега – Пуассона $\lambda$, яка враховує всі можливі конфігурації (див. (3.20) – (3.22)). Тому основна мета доведення леми 4.1 полягає у тому, щоб показати, що константа $\xi_-$ в нерівності (4.4) не залежить від параметра розбиття $a$. Тому в цій роботі ми наведемо лише основні моменти в побудові самого розкладу і деякі оцінки величин, яких не було у попередньому доведенні.

Для того щоб побудувати розклад за щільними конфігураціями, введемо функцію-індикатор за формулою $\chi^{\Delta}_{+}(\gamma) = 1 - \chi^{\Delta}_{-}(\gamma)$. Скористаємося розкладом одиниці для довільного $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ і деякого фіксованого розбиття з $a = a_*$, тобто $\overline{\Delta}_{a_*}$:

$$1 = \prod_{\Delta \subset \Lambda(a_*)} \left[\chi^{\Delta}_{-}(\gamma) + \chi^{\Delta}_{+}(\gamma)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N_{\Lambda(a_*)}} \sum_{\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\} \subset \Lambda(a_*)} \prod_{i=1}^{n} \chi^{\Delta_i}_{+}(\gamma) \prod_{\Delta \subset \Lambda(a_*) \setminus \cup_{i=1}^{n} \Delta_i} \chi^{\Delta}_{-}(\gamma) :=$$

$$:= \sum_{\varnothing \subseteq X \subseteq \Lambda(a_*)} \widetilde{\chi}^{X}_{+}(\gamma) \widetilde{\chi}^{\Lambda(a_*) \setminus X}_{-}(\gamma), \tag{5.1}$$

де $N_\Lambda = |\Lambda| / a^d_*$ (тут символом $|\Lambda|$ позначено міру Лебега множини $\Lambda(a_*)$) — кількість кубиків $\Delta$ в об'ємі $\Lambda = \Lambda(a_*)$ (див. пп. 2.4), а

$$\widetilde{\chi}^{X}_{\pm}(\gamma) = \prod_{\Delta\subset X} \chi^{\Delta}_{\pm}(\gamma). \tag{5.2}$$

Підставляючи (5.1) з $a = a_*$ в означення (3.23) кореляційних функцій $\rho^{(-)}_{\Lambda}(\eta; z, \beta, a)$ з $a < a_*$ і таким, що $\dfrac{a_*}{a} \in \mathbb{N}$, отримуємо розклад

$$\rho^{(-)}_{\Lambda}(\eta; z, \beta, a) =$$
$$= \frac{1}{Z^{(-)}_{\Lambda}(z, \beta, a)} \sum_{\varnothing\subseteq X\subseteq\Lambda(a_*)} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)}\, \widetilde{\chi}^{X}_{+}(\gamma)\widetilde{\chi}^{\Lambda\setminus X}_{-}(\gamma)\lambda^{a}_{z\sigma}(\eta\cup d\gamma). \tag{5.3}$$

***Зауваження* 5.1.** Множини $X$ в (5.3) є об'єднаннями кубиків $\Delta \in \overline{\Delta}_{a_*}$, але в добутку в означенні $\lambda^{a}_{z\sigma}(\eta\cup d\gamma)$ (див. (3.24)) $\Delta \in \overline{\Delta}_{a}$ з $a < a_*$ і $a_*/a \in \mathbb{N}$.

Подальші кроки у побудові розкладу і оцінках повністю збігаються з доведенням теореми 2.2 в роботі [5] у випадку двочастинкової взаємодії і теореми 2.1 в роботі [13] у випадку багаточастинкової взаємодії. Необхідно зауважити, що перехід від інтегрування за мірою $\lambda^{a}_{z\sigma}(\eta\cup d\gamma_{\Delta'})$ у правій частині (5.3) до інтегрування за мірою $\lambda^{a}_{z\sigma}(d\gamma_{\Delta'})$ у подальших оцінках є наслідком елементарної нерівності

$$\chi^{\Delta'}_{-}(\eta\cup\gamma_{\Delta'}) \le \chi^{\Delta'}_{-}(\gamma_{\Delta'}),$$

яка випливає з означення (3.19) для довільного $\Delta' \in \overline{\Delta_a}$ і довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma$.

***5.2. Доведення леми* 4.2.** Підставивши розбиття (5.1) (але з кубиками, що мають довжину ребер $a$ замість $a_*$ і з аргументом $\eta\cup\gamma$ у кожній функції $\chi^{\Delta}_{\pm}$) в (3.22), отримаємо розклад

$$\rho_\Lambda(\eta; z, \beta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(z, \beta)} \sum_{X\subseteq\Lambda} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)}\, \widetilde{\chi}^{X}_{+}(\eta\cup\gamma)\widetilde{\chi}^{\Lambda\setminus X}_{-}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{5.4}$$

Виділимо перший член розкладу при $X = \varnothing$ і, врахувавши означення (3.20) – (3.23), запишемо (5.4) у вигляді

$$\rho_\Lambda(\eta; z, \beta) = \frac{Z^{(-)}_{\Lambda}(z, \beta, a)}{Z_\Lambda(z, \beta)} \rho^{(-)}_{\Lambda}(\eta; z, \beta, a) + R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a), \tag{5.5}$$

де

$$R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(z, \beta)} \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)}\, \widetilde{\chi}^{X}_{+}(\eta\cup\gamma)\widetilde{\chi}^{\Lambda\setminus X}_{-}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{5.6}$$

Доведення леми 4.2 ґрунтується на двох лемах.

**Лема 5.1.** *Нехай потенціали $V = \{V_p\}_{p\ge 2}$ задовольняють умови $(\mathbf{A})$ у випадку двочастинкової взаємодії і умови $(\mathbf{A_1})$ – $(\mathbf{A_5})$ для багаточастинкової взаємодії. Тоді для довільного фіксованого $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$*

$$\lim_{a\to 0} R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a) = 0.$$

***Доведення*** див. у додатку.

**Лема 5.2.** *Нехай потенціали* $V = \{V_p\}_{p\geq 2}$ *задовольняють умови* $(\mathbf{A})$ *у випадку двочастинкової взаємодії і умови* $(\mathbf{A_1})$– $(\mathbf{A_5})$ *для багаточастинкової взаємодії. Тоді для довільного фіксованого* $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{a\to 0} \frac{Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a)}{Z_\Lambda(z,\beta)} = 1.$$

***Доведення.*** В роботах [1, 2] було доведено нерівність

$$\lim_{a\to 0} \frac{Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a)}{Z_\Lambda(z,\beta)} \geq 1,$$

на якій фактично ґрунтувалося доведення того, що тиск апроксимованої системи збігається до тиску справжньої системи. З іншого боку, внаслідок означень (3.20), (3.21) легко бачити, що для довільного $a > 0$

$$\frac{Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a)}{Z_\Lambda(z,\beta)} \leq 1.$$

В результаті отримуємо

$$\lim_{a\to 0} \frac{Z_\Lambda^{(-)}(z,\beta,a)}{Z_\Lambda(z,\beta)} = 1.$$

**А. Додаток.** ***Доведення леми* 5.1.** Врахувавши умову (3.10) для парного потенціалу і умову (3.13) для багаточастинкової взаємодії, запишемо вираз (5.6) у вигляді

$$R^\Lambda(\eta;z,\beta,a) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(z,\beta)} \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta(\frac{1}{2}\widetilde{U}^+(\eta\cup\gamma_X)+U^{st}(\eta\cup\gamma_X))} \widetilde{\chi}_+^X(\eta\cup\gamma)\times$$
$$\times e^{-\beta W(\eta\cup\gamma_X;\gamma_{\Lambda\setminus X})-\beta\widetilde{U}^+(\eta\cup\gamma_X)/2} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda\setminus X})} \widetilde{\chi}_-^{\Lambda\setminus X}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{A.1}$$

Використавши нескінченну подільність міри Лебега – Пуассона, оцінку

$$e^{-\beta W(\eta\cup\gamma_X;\gamma_{\Lambda\setminus X})-\beta\widetilde{U}^+(\eta\cup\gamma_X)/2} \leq e^{\beta\upsilon_*(a)(|\eta|+|\gamma_X|)}$$

і той факт, що

$$\widetilde{\chi}_-^{\Lambda\setminus X}(\eta\cup\gamma) \leq 1,$$

де $\upsilon_*(a) = \upsilon_0(a)$ для двочастинкового потенціалу і $\upsilon_*(a) = \bar{I}(a)$ для багаточастинкової взаємодії (див. (3.18)), отримаємо оцінку виразу (A.1):

$$R^\Lambda(\eta;z,\beta,a) \leq \frac{(ze^{\beta\upsilon_*(a)})^{|\eta|}}{Z_\Lambda(z,\beta)} \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda} \int_{\Gamma_X} e^{-\beta(\widetilde{U}^+(\eta\cup\gamma_X)/2+U^{st}(\eta\cup\gamma_X)+\upsilon_*(a)|\gamma_X|)}\times$$
$$\times\widetilde{\chi}_+^X(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_X) \int_{\Gamma_{\Lambda\setminus X}} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda\setminus X})}\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{\Lambda\setminus X}). \tag{A.2}$$

Врахуємо, що

$$Z_{\Lambda\setminus X}(z,\beta) = \int_{\Gamma_{\Lambda\setminus X}} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda\setminus X})}\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{\Lambda\setminus X})$$

і $Z_{\Lambda\setminus X}(z,\beta)\leq Z_\Lambda(z,\beta)$. Тоді з (A.2) випливає, що

$$R^\Lambda(\eta;z,\beta,a)\leq$$
$$\leq (ze^{\beta\upsilon_*(a)})^{|\eta|}\sum_{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda}\int\limits_{\Gamma_X} e^{-\beta(\widetilde{U}^+(\eta\cup\gamma_X)/2+U^{st}(\eta\cup\gamma_X)+\upsilon_*(a)|\gamma_X|)}\widetilde{\chi}_+^X(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_X).$$

Нехай $\Lambda_\eta$ — об'єднання кубиків, в яких зосереджено точки конфігурації $\eta$. Тоді з твердження 3.1, леми 3.1 і нерівностей (3.3), (3.17) маємо

$$R^\Lambda(\eta;z,\beta,a)\leq\ (ze^{\beta(\upsilon_*(a)+B(a))})^{|\eta|}(R_1^\Lambda+R_2^\Lambda), \tag{A.3}$$

де

$$R_1^\Lambda=\sum_{\varnothing\neq X\subseteq(\Lambda\setminus\Lambda_\eta)}\int\limits_{\Gamma_X} e^{\sum_{\Delta\in X}\beta\left(A(a)|\gamma_\Delta|^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)}\widetilde{\chi}_+^X(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_X),$$

$$R_2^\Lambda=\sum_{\substack{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda,\\ X\cap\Lambda_\eta\neq\varnothing}}\int\limits_{\Gamma_X} e^{\sum_{\Delta\in X}\beta\left(A(a)(|\gamma_\Delta|+|\eta_\Delta|)^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)}\widetilde{\chi}_+^X(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_X)$$

з $A(a)$ і $B(a)$, як в (3.7) для двочастинкових потенціалів і в (3.17) для багаточастинкових взаємодій. Знову використовуючи нескінченну подільність міри Лебега – Пуассона та її визначення, легко отримуємо

$$\int\limits_{\Gamma_\Delta} e^{-\beta A(a)\,|\gamma_\Delta|^2/2+\beta\,(B(a)+\upsilon_*(a))\,|\gamma_\Delta|}\,\chi_+^\Delta(\gamma_\Delta)\,\lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta)=$$
$$=\sum_{n=2}^\infty\frac{(a^d\,z)^n}{n!}\,e^{-\beta\,A(a)\,n^2/2+\beta\,(B(a)+\upsilon_*(a))\,n}\leq\epsilon_1(a),$$
$$\epsilon_1(a)\to 0,\quad \text{якщо}\quad a\to 0.$$

Тоді після підсумовування за множинами $X$ одержуємо оцінку

$$R_1^\Lambda\leq\ (1+\epsilon_1(a))^{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|/a^d}-1\leq\epsilon_1(a)\frac{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|}{a^d}(1+\epsilon_1(a))^{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|/a^d-1}. \tag{A.4}$$

Щоб оцінити $R_2^\Lambda$, запишемо його у вигляді

$$R_2^\Lambda=\sum_{\substack{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda,\\ X\cap\Lambda_\eta\neq\varnothing}}R_0^\Lambda(\eta_{X\cap\Lambda_\eta};z,\beta,a)\times$$
$$\times\int\limits_{\Gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}} e^{\sum_{\Delta\subset(X\setminus\Lambda_\eta)}\beta\left(-A(a)|\gamma_\Delta|^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)}\widetilde{\chi}_+^{X\setminus\Lambda_\eta}(\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta})\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}), \tag{A.5}$$

де

$$R_0^\Lambda=\int\limits_{\Gamma_{X\cap\Lambda_\eta}} e^{\sum_{\Delta\subset X\cap\Lambda_\eta}\beta\left(-A(a)(|\eta_\Delta|+|\gamma_\Delta|)^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)}\times$$
$$\times\widetilde{\chi}_+^{X\cap\Lambda_\eta}(\eta\cup\gamma_{X\cap\Lambda_\eta})\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{X\cap\Lambda_\eta})=$$

$$= \prod_{\Delta \in X\cap\Lambda_\eta} \int_{\Gamma_\Delta} e^{\beta\left(-A(a)(|\eta_\Delta|+|\gamma_\Delta|)^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)} \chi_+^\Delta(\eta_\Delta \cup \gamma_\Delta)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta).$$

Оцінюючи максимальне значення експоненти, отримуємо

$$R_0^\Lambda(\eta_{X\cap\Lambda_\eta}; z,\beta,a) \le e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))} \prod_{\Delta\subset X\cap\Lambda_\eta} \int_{\Gamma_\Delta} \lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta) \le$$

$$\le e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))} e^{za^d|\eta|} \tag{A.6}$$

Використавши (A.5), (A.6), легко оцінити $R_2^\Lambda$ зверху виразом

$$R_2^\Lambda \le e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))} e^{za^d|\eta|} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\varnothing\neq X\subseteq\Lambda,\\ X\cap\Lambda_\eta\neq\varnothing}} \int_{\Gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}} e^{\sum\limits_{\Delta\subset(X\setminus\Lambda_\eta)} \beta\left(-A(a)|\gamma_\Delta|^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)} \times$$

$$\times \widetilde{\chi}_+^{X\setminus\Lambda_\eta}(\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta})\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}). \tag{A.7}$$

Враховуючи, що для довільної $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірної функції $F(\gamma)$ виконується нерівність

$$\sum_{\substack{\varnothing\neq X\subseteq\overline{\Delta}_a\cap\Lambda,\\ X\cap\Lambda_\eta\neq\varnothing}} \int_{\Gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}} F(\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta})\lambda_{z\sigma}(d\gamma_{X\setminus\Lambda_\eta}) \le$$

$$\le (2^{|\eta|}-1) \sum_{X\subseteq\overline{\Delta}_a\cap\Lambda\setminus\Lambda_\eta} \int_{\Gamma_X} F(\gamma_X)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_X),$$

і нескінченну подільність міри Лебега – Пуассона, з виразу (A.7) одержуємо нерівність

$$R_2^\Lambda \le e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))} e^{a^d|\eta|}(2^{|\eta|}-1)\times$$

$$\times \sum_{X\subseteq\Lambda\setminus\Lambda_\eta} \prod_{\Delta\subset X} \int_{\Gamma_\Delta} e^{\beta\left(-A(a)|\gamma_\Delta|^2/2+(B(a)+\upsilon_*(a))|\gamma_\Delta|\right)} \chi_+^\Delta(\gamma_\Delta)\lambda_{z\sigma}(d\gamma_\Delta) \le$$

$$\le e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))} e^{za^d|\eta|}(2^{|\eta|}-1)(1+\epsilon_1(a))^{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|/a^d}. \tag{A.8}$$

З (A.3), (A.4), (A.8) випливає, що

$$R^\Lambda(\eta; z,\beta,a) \le (ze^{\beta(B(a)+\upsilon_*(a))})^{|\eta|}\,(1+\epsilon_1(a))^{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|/a^d-1} \times$$

$$\times\left(\epsilon_1(a)\frac{|\Lambda\setminus\Lambda_\eta|}{a^d} + (2^{|\eta|}-1)(1+\epsilon_1(a))e^{-\beta(2A(a)-B(a)-\upsilon_*(a))}e^{za^d|\eta|}\right) \to 0,$$

$$\text{якщо} \quad a\to 0,$$

що й завершує доведення леми 5.1.

1. *Rebenko A. L., Tertychnyi M. V.* Quasicontinuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2007. – **4**, № 3. – P. 172 – 182.
2. *Петренко С. М.* Квазінеперервна апроксимація статистичних систем з багаточастинковою взаємодією // Наук. вісн. Львів. НЛТУ України. – 2008. – Вип. 9. – Р. 287 – 296.

3. *Rebenko A. L. , Tertychnyi M. V.* Quasilattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions: Correlation functions // J. Math. Phys. – 2009. – **50**, № 3. – P. 333301 – 10.
4. *Rebenko A. L.* New proof of Ruelle's superstability bounds // J. Stat. Phys. – 1998. – **91**. – P. 815 – 826.
5. *Petrenko S. N., Rebenko A. L.* Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2007. – **13**. – P. 50 – 61.
6. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **59**. – P. 219 – 239.
7. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II // Ibid. – 1975. – **59**. – P. 241 – 256.
8. *Albeverio S. , Kondratiev Yu. G. , Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154(2)**. – P. 444 – 500.
9. *Ruelle D.* Superstable interactions in classical statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1970. – **18**. – P. 127 – 159.
10. *Rebenko A. L., Tertychnyi M. V.* On stability, superstability and strong superstability of classical systems of Statistical Mechanics // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 3. – P. 287 – 296.
11. *Tertychnyi M. V.* Sufficient conditions for superstability of many-body interactions // Ibid. – 2008. – **14**, № 4. – P. 386 – 396.
12. *Kutoviy O. V. , Rebenko A. L.* Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection // J. Math. Phys. – 2004. – **45(4)**. – P. 1593 – 1605.
13. *Petrenko S. N., Rebenko A. L.* Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction II: many-body potentials // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 191 – 208.
14. *Рюэль Д.* Статистическая механика (строгие результаты). – Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 368 с.


Одержано 19.07.10