УДК 512.552.1

Б. В. Забавский, П. С. Казимирский

Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований

Пусть R — адекватное кольцо [1], т. е. коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, в котором каждый конечно-порожденный идеал главный и, кроме того, выполняется следующее условие: для всяких a, $b \in R$, $a \neq 0$, мы можем записать $a = rs$, где элементы r и b взаимно простые и для всякого необратимого делителя s' элемента s элементы s' и b имеют общий необратимый делитель. Для всяких a, $b \in R$ обозначим через (a, b) наибольший общий делитель элементов a и b.

Лемма 1. *Пусть a, b, $c \in R$, причем $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тогда существует такой элемент $r \in R$, что $(a + br, cr) = (a, b, c)$ и $(r, (a, b, c)) = 1$.*

Доказательство. Пусть $(a, b, c) = 1$. Тогда в силу адекватности R, представим $c = ms$, где $(m, a) = 1$ и $(s', a) \neq 1$ для s'/s. Легко проверить, что при $m = r$ справедливо утверждение леммы. Если же $(a, b, c) = d$, $a = a_0d$, $b = b_0d$, $c = c_0d$, то лемма доказывается аналогичными рассуждениями для элементов a_0, b_0, c_0.

Лемма 2. *Пусть A_1 и A_2 — матрицы над R размера $2 \times k_1$ и $2 \times k_2$ соответственно, при этом хотя бы одна из них не является правым делителем нуля.*

Тогда существуют такие обратимые матрицы P и Q_i, $i = 1, 2$, что

$$PA_iQ_i = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \\ * & \varepsilon_2^{(i)} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_j^{(i)}$ — элементарные делители матриц A_i, $i = 1, 2$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что A_2 не является правым делителем нуля, тогда $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 2$. Так как над R справедлива теорема об элементарных делителях [1], то существуют такие обратимые матрицы S, M_1, M_2 над R, что

$$SA_1M_1 = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad SA_2M_2 = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

$\varepsilon_1^1/\varepsilon_2^1$ и $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Согласно утверждению леммы 1, для элементов a, b, $c \in R$ существует такой элемент $r \in R$, что $(a + br, cr) = (a, b, c)$.

Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что матрицы TSA_iM_i умножением справа на обратимые матрицы приводятся к виду

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^{(i)} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть A_i, $i = 1, 2$,— матрицы над R размера $m \times k_i$ и хотя бы одна из них не является правым делителем нуля.*

Тогда существуют такие обратимые матрицы P, Q_i, $i = 1, 2$, над R, что

$$PA_iQ_i = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{(i)} & & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & * & & & & \\ & & & \varepsilon_m^{(i)} & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_i^{(i)}$ — элементарные делители матриц A_i.

Доказательство. Пусть A_2 не является правым делителем нуля. Доказательство будем проводить индукцией по числу строчек матриц. В случае числа строчек $m = 2$ теорема справедлива ввиду леммы 2. Предположим, что утверждение теоремы верно для матриц с числом строчек $m - 1$. В силу адекватности кольца R существуют такие обратимые матрицы S, Q_i, $i = 1, 2$, что

$$SA_1Q_1 = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{(1)} & & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & \varepsilon_m^{(1)} & & 0 \end{Vmatrix} = B_1,$$

$$SA_2Q_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} & & 0 \end{Vmatrix} = B_2,$$

где $\varepsilon_i^{(1)}$ — элементарные делители матрицы A_1.

Рассмотрим подматрицы B_i', $i = 1, 2$, матриц B_i, которые мы получаем путем вычеркивания последних строчек соответствующих матриц B_i. Для них по предположению индукции существуют обратимые матрицы M, N_i такие, что

$$MB_1'N_1 = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(1)} & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & \varepsilon_2^{(1)} & & \vdots & & \\ * & & \ddots & & & \\ & & & \varepsilon_{m-1}^{(1)} & & 0 \end{Vmatrix}, \quad MB_2'N_2 = \begin{Vmatrix} \varphi_1^{(2)} & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & \varphi_2^{(2)} & & \vdots & & \\ * & & \ddots & & & \\ & & & \varphi_{m-1}^{(2)} & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varphi_j^{(2)}$ — элементарные делители матрицы B_2'. Тогда

$$C_1 = \begin{Vmatrix} & & & 0 \\ & M & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix} B_1 \begin{Vmatrix} & & 0 \\ & N_1 & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(1)} & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & \varepsilon_2^{(1)} & & 0 & & 0 \\ * & & \ddots & \vdots & & \\ 0 \dots 0 & & & \varepsilon_m^{(1)} & & 0 \end{Vmatrix}$$

$$C_2 = \begin{Vmatrix} & & & 0 \\ & M & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix} B_2 \begin{Vmatrix} & & & 0 \\ & N_2 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_1^{(2)} & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \varphi_{m-1}^{(2)} & & & \\ & & & & & 0 \\ a_{m1}' & \dots & & a_{mm}' & & 0 \end{Vmatrix}$$

По утверждению леммы 1, существует $r \in R$ такое, что для элементов $\varphi_1^{(2)} a_{m1}'$, a_{mm}'

$$(\varphi_1^{(2)} + ra_{m1}',\ ra_{mm}) = (\varphi_1^{(2)},\ a_{m1}',\ a_{mm}), \quad (r, (\varphi_1^{(2)},\ a_{m1}',\ a_{mm}')) = 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим матрицу размера $m \times m$ вида

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & r \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

Умножим матрицы C_i, $i = 1, 2$, слева на обратимую матрицу T:

$$TC_1 = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(1)} & 0 \dots r\varepsilon_m^{(1)} & 0 \dots 0 \\ & * & \end{Vmatrix}, \quad TC_2 = \begin{Vmatrix} \varphi_1^{(2)} + ra_{m1}', & ra_{m2}', \dots ra_{mm}', & 0 \dots 0 \\ & * & \end{Vmatrix}.$$

Используя условие (1) видим, что наибольший общий делитель элементов первой строки матрицы TC_2 является наибольшим общим делителем всех элементов матрицы C_2. Ввиду того что $\varepsilon_1^{(1)}/\varepsilon_m^{(1)}$, мы имеем аналогичную ситуацию для элементов первой строки матрицы TC_1. Таким образом, матрицы TC_i умножением справа на обратимые матрицы L_i, $i = 1, 2$, приведем к виду

$$TC_iL_i = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & b_{22}^{(i)} & & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & b_{mm}^{(i)} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_1^{(i)}$ — первый элементарный делитель матрицы A_i.

Рассмотрим подматрицы матриц TC_iL_i, которые мы получаем путем вычеркивания первых столбцов и первых строчек. Эти матрицы имеют число строчек $m - 1$, они удовлетворяют условию теоремы, и для них на основании предположения индукции справедливо утверждение теоремы. Тем самым мы завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть $C = AB$ и A, B — неособенные матрицы над R. Тогда элементарные делители матрицы C делятся на соответствующие элементарные делители матриц A и B.*

Следствие [2, 3, 4]. *Пусть $C = AB$ и A, B — неособенные матрицы над коммутативной областью главных идеалов.*

Тогда элементарные делители матрицы C делятся на соответствующие элементарные делители матриц A и B.

1. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain canditions.— Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 236—255.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. К. : Наук. думка, 1981.— 222 с.
3. *Newman M.* On the Smith normal form.— J. Res. Bur. Stand. Sect., 1971, **75**, p. 81—84.
3. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над областью главных идеалов к треугольному виду с формой Смита по главной диагонали применением идентичных левосторонних преобразований.— В кн.: XVI Всесоюз. алгебр. конф. Тез. докл.— Л.: Изд-во ЛОМИ АН СССР, 1981, с. 196.

Ин-т прикл. проблем мех. и матем.
АН УССР, Львов

Поступила в редакцию
10.05.83