УДК 517.95

И. Г. Добротвор

Осицилляционные свойства решений уравнений с полигармоническим оператором в пространстве E^n

Настоящая статья является дополнением к работе [1]. В ней получены достаточные условия колеблемости уравнения относительно функции $U = U(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $n \neq 3$, с постоянными действительными коэффициентами a_j, $j = 1, 2, \ldots, p$,

$$\Delta^p U + a_1 \Delta^{p-1} U + \ldots + a_p U = 0, \tag{1}$$

где $\Delta^k U$ означает k-ю итерацию лапласиана $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ функции U.

Определение. *Нетривиальное решение $U(X) \in C^{2p}$ уравнения* (1) *в пространстве E^n называется колеблющимся, если вне каждой сферы с центром X_0 ($U(X_0) \neq 0$) функция $U(X)$ имеет нуль и множество нулей функции $U(X)$ не имеет внутренних точек* [1, 2, 5, 6].

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть задано уравнение*

$$\Delta U + bU = 0, \tag{2}$$

b — действительное число, $U = U(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

Тогда среднее значение $M = M[R, X_0, U]$ функции U по поверхности сферы с центром X_0 и радиусом $R > 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению и условиям

$$\begin{gathered} (R^{n-1} M')' + bR^{n-1} M = 0, \\ M(0) = U(X_0), \quad M'(0) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть задано уравнение*

$$\Delta^2 U + c_1 \Delta U + c_0 U = 0 \tag{4}$$

с постоянными действительными коэффициентами c_1 и c_0 относительно функции $U = U(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

Тогда для среднего значения $M = M[R, X_0, U]$ функции U по поверхности сферы с центром X_0 и радиусом $R > 0$ имеет место соотношение

$$RM[R, X_0, U] = f_0(R) U(X_0) + f_1(R) \Delta U(X_0), \tag{5}$$

где функции $f_0(R)$ и $f_1(R)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} (R^{3-n}(R^{n-3}(R^{3-n}(R^{n-3} f_1)')')')' + c_1 (R^{3-n}(R^{n-3} f_1)')' + c_0 f_1 = 0, \\ (R^{3-n}(R^{n-3} f_0)')' + c_0 f_1 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

и условиям

$$f_0(0) = 0,\ f_0'(0) = 1,\ f_1(0) = f_1'(0) = f_1''(0) = 0,\ f_1'''(0) = 3/n.$$

Уравнение (3) можно легко получить, применяя соотношение (см. [6])

$$(R^{n-1} M'(R))' = \sigma_n^{-1} \int_{\partial K} \Delta U(X)\, ds$$

к уравнению (2). Здесь σ_n — площадь n-мерной единичной сферы, ∂K — поверхность n-мерной сферы радиуса R.

Уравнение (6) получаем, выполнив преобразования, аналогичные проделанным в [1, с. 594].

Рассмотрим уравнение (2). С целью получения удобного для исследования выражения среднего значения решения $U(X)$ заменим дифференциальное уравнение (3) эквивалентной ему системой нормального вида. Введем обозначения $\varphi_1 = \mu$, $\varphi_2 = \varphi_1'$. Имеем

$$\varphi_1' = \varphi_2, \quad \varphi_2' = (1-n) R^{-1}\varphi_2 - b\varphi_1. \tag{7}$$

Систему (7) запишем в виде

$$\Phi' = (A + V(R))\Phi. \tag{8}$$

Здесь A — постоянная матрица с характеристическими корнями $\pm\mu$, $\mu = ib^{1/2}$, матрица $V(R)$ дифференцируема и удовлетворяет условиям $V(R) \to 0$ при $R \to \infty$,

$$\int_{R_0}^{\infty} |V'(R)|\, dR < \infty, \qquad 0 < R_0 < \infty.$$

Тогда (см. [3, с. 104]) для решений Φ_k, $k = 1, 2$, системы (7) будут выполняться соотношения

$$\lim_{R\to\infty} \Phi_k \exp - \int_{R_0}^{R} \lambda_k(\rho)\, d\rho = p_k, \tag{9}$$

где $\lambda_k(R)$, $k = 1, 2$, — корни уравнения

$$\det(A + V(R) - \lambda E) = 0, \tag{10}$$

пронумерованные так, что $\lim\limits_{R\to\infty} \lambda_k(R) = \mu_k$, $p_k \neq 0$ — характеристический вектор матрицы A, соответствующий μ_k.

Замечание 1. Из асимптотической формулы (9) видно, что если корни λ_k уравнения (10) взять постоянными, то результат будет отличаться от точного только членом $o(1)$ при $R \to \infty$.

В случае $b > 0$ уравнение (10) для больших R имеет два комплексных (не действительных) корня $(1-n)/2R \pm i\,(b - (1-n)^2/4R^2)$. Тогда

$$\lim_{R\to\infty} R^{(n-1)/2} M[R, X_0, U] = \lim_{R\to\infty} B \sin\Big(\int_{R_0}^{R} (b - (1-n)^2/4\rho^2)^{1/2}\, d\rho + \varphi\Big), \tag{11}$$

где B и φ — некоторые числа.

Аналогично проделанному находим асимптотические формулы для среднего значения решений $U(X)$ уравнения (4).

При $c_1^2/4 < c_0$ корнями уравнения (10) относительно уравнений (6) будут числа $\omega(R) \pm \xi(R) \pm i\eta(R)$, где

$$\begin{aligned} \omega(R) &= (3-n)/2R, \\ \xi(R) &= 2^{-1/2}((\omega^4(R) - c_1\omega^2(R) + c_0)^{1/2} + \omega^2(R) - c_1/2)^{1/2}, \\ \eta(R) &= 2^{-1/2}((\omega^4(R) - c_1\omega^2(R) + c_0)^{1/2} - \omega^2(R) + c_1/2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Находим

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} R^{(n-1)/2} M[R, X_0, U] &= \lim_{R\to\infty} H \exp\Big(\int_{R_0}^{R} \xi(\rho)\, d\rho\Big) \sin\Big(\int_{R_0}^{R} \eta(\rho)\, d\rho + \tau\Big) + \\ &+ \lim_{R\to\infty} G \exp\Big(-\int_{R_0}^{R} \xi(\rho)\, d\rho\Big) \sin\Big(\int_{R_0}^{R} \eta(\rho)\, d\rho + \theta\Big), \end{aligned} \tag{13}$$

где τ, θ — некоторые числа, H, G не зависят от R.

Рассмотрим алгебраическое уравнение относительно z

$$z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p = 0 \tag{14}$$

с теми же, что и в (1), числовыми коэффициентами.

Т е о р е м а. *Если уравнение* (14) *имеет только простые отрицательные, или только простые комплексные* (*т. е. невещественные*), *или только простые отрицательные и простые комплексные корни, то каждое нетривиальное аналитическое решение уравнения* (1) *обладает свойством колеблемости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда уравнение (14) имеет простые отрицательные корни $-b_1, -b_2, \ldots, -b_k$ и простые комплексные корни $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2l}$, $k + 2l = p$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{k}(\Delta + b_j)\prod_{j=1}^{l}(\Delta^2 + c_j^1\Delta + c_j^0)\,U = 0. \tag{15}$$

Пусть $U = U\,(X)$ — нетривиальное аналитическое решение уравнения (1) (или (15)). Тогда из определения среднего значения, леммы 4 [1] и замечания [4, с. 203] получим

$$M\,[R, X_0, U] = \sum_{j=1}^{k} M\,[R, X_0, U_j] + \sum_{j=1}^{l} M\,[R, X_0, U_j^*], \tag{16}$$

где U_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, — решение уравнения $\Delta U_j + b_j U_j = 0$, а U_j^*, $j = 1, 2, \ldots, k$, — решение уравнения

$$\Delta^2 U_j^* + c_j^1 \Delta U_j^* + c_j^0 U_j^* = 0, \qquad (c_j^1)^2 < 4c_j^0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Из (11), (13), (16) находим

$$\lim_{R\to\infty} R^{(n-1)/2} M\,[R, X_0, U] = \lim_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{k} B_j \sin\left(\int_{R_0}^{R}(b_j - (1-n)^2/4\rho^2)^{1/2}\,d\rho + \varphi_j\right) +$$
$$+ \lim_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{l} H_j \exp\left(\int_{R_0}^{R}\xi_j(\rho)\,d\rho\right)\sin\left(\int_{R_0}^{R}\eta_j(\rho)\,d\rho + \tau_j\right) +$$
$$+ \lim_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{l} G_j \exp\left(-\int_{R_0}^{R}\xi_j(\rho)\,d\rho\right)\sin\left(\int_{R_0}^{R}\eta_j(\rho)\,d\rho + \theta_j\right).$$

С помощью леммы 6 из [1] убеждаемся, что $M\,[R, X_0, U]$ меняет знак в произвольном интервале $(A, +\infty)$ изменения R. Отсюда следует, что функция $U = U\,(X)$ меняет знак вне каждой сферы с центром в точке X_0 и радиусом R. Функция $U\,(X)$ аналитическая [7, с. 406] в E^n, тогда из принципа аналитического продолжения получим, что множество нулей функции $U\,(X)$ не образует области пространства E^n. Следовательно, каждое нетривиальное решение $U\,(X)$ уравнения (1) в рассматриваемом случае обладает свойством колеблемости.

Аналогичные рассуждения проводятся и в случаях, когда уравнение (14) имеет только простые отрицательные или только простые комплексные корни. Теорема доказана.

1. *Горбайчук В. И., Добротвор И. Г.* Условия колеблемости решений одного класса эллиптических уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 5, с. 593—600.
2. *Горбайчук В. И., Добротвор И. Г.* Теоремы о среднем значении для решений одного класса уравнений с полигармоническим оператором и вопросы колеблемости.— В кн.: Второй республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям: Тез. докл. Одесса : Одесск. гос. ун-т, 1978, с. 45—46.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностран. лит., 1958.— 474 с.
4. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений.— М.—Л. : Гостехиздат, 1948.— 296 с.
5. *Baranski F.* O wlasnosciach oscylacyjnych i liniach wezluw rozwiazan pewnych rownan rozniczkowych czastkowych typu eliptucznego.— Prace matem., 1962, **7**, № 7, p. 71—96.
6. *Kitamura Y., Kusano T.* Nonlinear oscillation of a fourth order elliptic equation.— J. Diff. Equat., 1978, N 2, p. 280—286.
7. *Maurin K.* Analiza. Cz. 2. Wstep do analizy globalnej.— Warszawa : PWN, 1971.— 490 p.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию
16.08.83