УДК 517.948

С. А. Бойцун

О двусторонних приближениях к решениям интегральных уравнений

В заметке исследован один из способов построения двусторонних приближений к решениям интегральных уравнений Вольтерра

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t, s, x(s))\, ds \tag{1}$$

с немонотонной правой частью. Результаты работы близки к некоторым результатами из [1—3].

Будем предполагать, что $f(t) : [a, b] \to E$, $K(t, s, x) : [a, b] \times [a, b] \times E \to E$, f и K непрерывны по совокупности аргументов, E — полуупорядоченное банахово пространство, в котором полуупорядоченность введена с помощью некоторого конуса $\tilde{K}$. Соотношение $x \leqslant y$ при этом означает, что $y - x \in E$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) задан непрерывный по совокупности аргументов оператор $(K(t, s, y, z)$ такой, что $K(t, s, x, x) = K(t, s, x)$;

2) определены линейные по w положительные при $y, z \in [a, b]$ неубывающие по y, невозрастающие по z и непрерывные по совокупности аргументов операторы $A_1(t, s, y, z)\, w$, $B_2(t, s, y, z)\, w$, обладающие тем свойством, что при $t, s \in [a, b]$, $x, y, z \in E$, $y \leqslant z$, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}- A_1(t, s, z, y)(z - y) \leqslant K(t, s, z, x) - K(t, s, y, x), \quad K(t, s, x, z) - \\ - K(t, s, x, y) \leqslant B_2(t, s, z, y)(z - y);\end{gathered} \tag{2}$$

3) решение $x(t) \in C(E, [a, b])$, где $C(E, [a, b])$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций со значениями в E, существует;

4) решение системы

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int_a^t K(t, s, y(s), z(s))\, ds - \int_a^t [A_1(t, s, z(s), y(s)) + \\ &\quad + B_2(t, s, z(s), y(s))](z(s) - y(s))\, ds, \\ z(t) &= f(t) + \int_a^t K(t, s, z(s), y(s))\, ds + \int_a^t [A_1(t, s, z(s), y(s)) + \\ &\quad + B_2(t, s, z(s), y(s))](z(s) - y(s))\, ds \end{aligned} \tag{3}$$

единственно в $C(E, [a, b]) \times C(E, [a, b])$;

5) заданы $u(t),\ v(t) \in C(E, [a, b])$, удовлетворяющие при $t \in [a, b]$ неравенствам

$$u(t) \leqslant f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), v(s))\, ds - \int_a^t [A_1(t, s, v(s), u(s)) + B_2(t, s, v(s), u(s))](v(s) - u(s))\, ds, \tag{4}$$

$$v(t) \geqslant f(t) + \int_a^t K(t, s, v(s), u(s))\, ds + \int_a^t [A_1(t, s, v(s), u(s)) + B_2(t, s, v(s), u(s))](v(s) - u(s))\, ds,$$

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t); \tag{5}$$

6) полуупорядоченность в E обладает свойством правильности, т. е. всякая монотонная ограниченная последовательность имеет в E предел.

Теорема 1. *Процесс последовательных приближений*

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, y_n(s), z_n(s))\, ds - \int_a^t [A_1(t, s, z_n(s), y_n(s)) + B_2(t, s, z_n(s), y_n(s))](z_n(s) - y_n(s))\, ds,$$

$$z_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, z_n(s), y_n(s)\, ds + \int_a^t [A_1(t, s, z_n(s), y_n(s)) + B_2(t, s, z_n(s), y_n(s))](z_n(s) - y_n(s))\, ds \tag{6}$$

с начальными приближениями

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t) \tag{7}$$

сходится на $[a, b]$ *к единственному решению* $x(t) \in C(E, [a, b])$ *уравнения* (1), *т. е. сходятся равномерно на* $[a, b]$ *к* $x(t)$ *последовательности* $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$. *При этом справедливы соотношения*

$$y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t) \leqslant x(t) \leqslant z_{n+1}(t) \leqslant z_n(t) \tag{8}$$

при $t \in [a, b]$, $n = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Введем обозначение

$$Q_n = A_1(t, s, z_n(s), y_n(s)) + B_2(t, s, z_n(s), y_n(s)).$$

В силу (4) — (7) имеем $y_0(t) \leqslant y_1(t),\ z_0(t) \geqslant z_1(t),\ t \in [a, b]$. Из (6) находим

$$y_2(t) - y_1(t) = -\int_a^t Q_1(z_1(s) - y_1(s))\, ds + \int_a^t K(t, s, y_1(s), z_1(s))\, ds + \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\, ds - \int_a^t K(t, s, y_0(s), z_0(s))\, ds \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s)) \times (z_0(s) - z_1(s))\, ds + \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(y_1(s) - y_0(s))\, ds \geqslant \theta,$$

$$z_1(t) - z_2(t) = \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\, ds + \int_a^t K(t, s, z_0(s), y_0(s))\, ds - \int_a^t Q_1(z_1(s) - y_1(s))\, ds - \int_a^t K(t, s, z_1(s), y_1(s))\, ds \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s)) \times (y_1(s) - y_0(s))\, ds + \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(z_0(s) - z_1(s))\, ds \geqslant \theta,$$

где θ — нулевой элемент пространства E. Очевидно, что $x(t)$ — единственное в $C(E, [a, b])$ решение уравнения (1), а $(x(t), x(t))$ — единственное в $C(E, [a, b] \times C(E, [a, b])$ решение системы (3). Поэтому из (6) имеем

$$x(t) - y_1(t) = \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\,ds + \int_a^t [K(t, s, x(s), x(s)) -$$

$$- K(t, s, y_0(s), z_0(s))]\,ds \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s))(z_0(s) - x(s))\,ds +$$

$$+ \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(x(s) - y_0(s))\,ds \geqslant \theta,$$

$$z_1(t) - x(t) = \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\,ds + \int_a^t [K(t, s, z_0(s), y_0(s)) -$$

$$- K(t, s, x(s), x(s))]\,ds \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s))(x(s) - y_0(s))\,ds +$$

$$+ \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(z_0(s) - x(s))\,ds \geqslant \theta.$$

Таким образом, установлены соотношения

$$y_0(t) \leqslant y_1(t) \leqslant x(t) \leqslant z_1(t) \leqslant z_0(t), \quad t \in [a, b].$$

Используя принцип индукции, можно считать установлеными соотношения (8) для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Для доказательства сходимости последовательностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, как и в [4], достаточно доказать компактность этих последовательностей на некотором сегменте $[a, b_1] \subseteq [a, b]$ (см. [4, лемма 1]; ср. также [3]), откуда будет следовать их равномерная сходимость к $x(t)$ на $[a, b_1]$. Используя стандартные рассуждения (см. [4]), можно это решение продолжить на $[a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, задана вещественная функция* $\beta_1(t)$, $0 \leqslant \beta_1(t) \leqslant 1$, такая, что

$$y_1(t) - y_0(t) \geqslant \beta_1(t)(z_0(t) - z_1(t)), \quad z_0(t) - z_1(t) \geqslant \beta_1(t)(y_1(t) - y_0(t)),$$
$$t \in [a, b]. \tag{9}$$

Тогда будут выполняться соотношения

$$y_1(t) \leqslant u_1(t) \leqslant x(t) \leqslant v_1(t) \leqslant z_1(t), \quad t \in [a, b], \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y_1(t) + (1 + \beta_1(t))^{-1}\beta_1(t)(z_1(t) - y_1(t)), \\ v_1(t) &= z_1(t) - (1 + \beta_1(t))^{-1}\beta_1(t)(z_1(t) - y_1(t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. В доказательстве нуждаются только соотношения $x(t) - u_1(t) \geqslant \theta$, $v_1(t) - x(t) \geqslant \theta$. Но в силу сделанных допущений

$$x(t) - u_1(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s))\,ds - \left[- \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\,ds + \right.$$

$$\left. + f(t) + \int_a^t K(t, s, y_0(s), z_0(s))\,ds \right] \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s))(z_0(s) - x(s))\,ds +$$

$$+ \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(x(s) - y_0(s))\,ds \geqslant \theta,$$

$$v_1(t) - x(t) = \int_a^t Q_0(z_0(s) - y_0(s))\,ds + f(t) + \int_a^t K(t, s, z_0(s), y_0(s))\,ds -$$

$$- f(t) - \int_a^t K(t, s, x(s), x(s))\,ds \geqslant \int_a^t A_1(t, s, z_0(s), y_0(s))(x(s) - y_0(s))\,ds +$$

$$+ \int_a^t B_2(t, s, z_0(s), y_0(s))(z_0(s) - (s))\,ds \geqslant \theta.$$

Этим теорема доказана, так как неравенства $u_1(t) - y_1(t) \geqslant \theta$, $z_1(t) - v_1(t) \geqslant \theta$ очевидны.

Принимая $u_1(t)$, $v_1(t)$ в качестве $y_1(t)$ и $z_1(t)$, процесс ускорения сходимости (11) можно продолжить, если задана $\beta_2(t)$ такая, что удовлетворены соотношения, получающиеся из (9) увеличением всех индексов на единицу.

Заметим, не останавливаясь на более детальных выкладках, что результат теоремы 2 можно распространить на более общий случай, если предполагать, что $\beta(t)$ — оператор с некоторыми специальными свойствами.

Если конус $\tilde{K}$, с помощью которого полуупорядочено банахово пространство E, телесный, т. е. непусто множество $\operatorname{int} \tilde{K}$, то несколько видоизменяя рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 1, можно доказать соотношения (5), сохранив остальные условия теоремы 1. Точнее, имеет место следующая теорема о двусторонних операторных неравенствах.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *за исключением соотношений* (5). *Если конус* $\tilde{K}$ *телесный, то утверждения теоремы* 1 *сохраняют силу, в частности справедливы оценки* (5).

Доказательство этой теоремы близко к доказательству соответствующего результата из [4] (см. также [3]).

Пример. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$x(t) = c + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(x(s))\,ds, \tag{12}$$

где $c = \text{const}$, $c \geqslant 0$, $\beta(t) \geqslant 0$, $\varphi(x) > 0$ — вещественные непрерывные функции. Пусть $a(y, z)$ — такая неубывающая по y, невозрастающая по z функция, что при $y \leqslant z$

$$-a(y, z)(z - y) \leqslant \varphi(z) - \varphi(y). \tag{13}$$

Если система уравнений

$$y(t) = c - \int_0^t \beta(s)\,a(z(s), y(s))(z(s) - y(s))\,ds + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(y(s))\,ds,$$

$$z(t) = c + \int_0^t \beta(s)\,a(z(s), y(s))(z(s) - y(s))\,ds + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(z(s))\,ds$$

однозначно разрешима на $[0, T)$, $T \leqslant \infty$, и на $[0, T)$ для некоторых непрерывных функций $u(t)$, $v(t)$ выполнены неравенства

$$u(t) \leqslant c - \int_0^t \beta(s)\,a(v(s), u(s))(v(s) - u(s))\,ds + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(u(s))\,ds,$$

$$v(t) \geqslant c + \int_0^t \beta(s)\,a(v(s), u(s))(v(s) - u(s))\,ds + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(v(s))\,ds,$$

то единственное непрерывное решение $x(t)$ уравнения (12) удовлетворяет оценке

$$u(t) \leqslant \Phi^{-1}\left(\Phi(s) + \int_0^t \beta(s)\,ds\right). \tag{14}$$

Здесь Φ^{-1} — функция, обратная к функции $\Phi(x) = \int\limits_c^t \frac{ds}{\varphi(s)}$. Предполагается, что $\Phi(c) + \int\limits_0^t \beta(s)\,ds$ принадлежит области определения функции Φ^{-1}.

Рассмотренный пример несколько обобщает известное неравенство Бихари (см., напр., [3, 5, 6]).

1. *Балуев А. Н.* К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина.— Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 6, с. 781—784.
2. *Слугин С. Н.* Видоизменение абстрактного аналога метода Чаплыгина.— Докл. АН СССР, **120**, № 2, с. 256—258.
3. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения.— К. : Наук. думка, 1980.— 267 с.
4. *Бондаренко В. А.* Интегральные неравенства для уравнения Вольтерра в банаховом пространстве с конусом.— Мат. заметки, 1971, **9**, № 3, с. 151—160.
5. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства.— М. : Мир, 1965.— 276 с.
6. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.— 152 с.

Львов. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 24.05.83