УДК 517.988.63

С. Атдаев

К теории решений нелинейных уравнений с вольтерровым на полуоси оператором

Пусть E — некоторое банахово пространство, ${}_TE$, $T=(T^1, \ldots, T^p)$, — пространство непрерывных и ограниченных абстрактных функций $x(t)$, $T \leqslant t \leqslant \infty$, $t=(t^1, \ldots, t^p)$, со значениями из E и нормой $\| x \|_{TE} = \sup\limits_{T \leqslant t \leqslant \infty} \| x(t) \|_E$. Пусть $F(t, x_t, y)$ — нелинейный вольтерров на полуоси оператор при фиксированном x, т. е. при каждом фиксированном $t \in [0, \infty]$ он действует из ${}_tE$ в E, а при фиксированном t и ${}_ty$ — обычный нелинейный оператор (оператор, действующий в E).

В работе приводятся достаточные условия однозначной нелокальной разрешимости уравнения

$$x(t) = F[t, x(t), {}_tx] \tag{1}$$

в пространстве ${}_0E$ и сходимости к решению последовательных приближений, постороенных по методу Пирака и его видоизменению.

Локальные теоремы для уравнения (1) доказаны в [1, 2]. Подобные вопросы для уравнений с обычным вольтерровым оператором изучались в [3].

Теорема 1. *Пусть непрерывный оператор* $F(t, x, {}_ty)$: $[t, \infty] \times E \times {}_tE \to E$ *ограничен и удовлетворяет условию*

$$\| F(t, \bar{x}, {}_t\bar{y}) - F(t, x, {}_ty) \|_E \leqslant L \| \bar{x} - x \|_E + \\ + \int\limits_{t^1}^{\infty} \cdots \int\limits_{t^p}^{\infty} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \| \bar{y}(s) - y(s) \|_E \, ds^1 \ldots ds^p, \tag{2}$$

где $0 \leqslant L < 1$ — *постоянная,* $K_i(s^i)$, $0 \leqslant s^i \leqslant \infty$; $i = \overline{1, p}$, — *суммируемые на* $[0, \infty]$ *функции.*

Тогда уравнение (1) *имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, определенное на всем отрезке* $[0, \infty]$.

Доказательство. В пространстве ${}_0E$ введем норму равенством

$$\| x \|^{*}_{{}_0E} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \left\{ \| x(t) \|_E \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{t^i}^{\infty} K_i(s^i) ds^i \right) \right\}, \tag{3}$$

где $\lambda > 0$ — постоянная. Пусть $Ax(t) \equiv F[t, x(t), {}_tx]$. Очевидно, что оператор A действует в пространстве ${}_0E$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что в (3) параметр λ можно выбрать так, чтобы A был сжимающим.

Для произвольных $x(t)$, $y(t) \in {}_0E$, учитывая условие (2), имеем

$$\| Ax - Ay \|^{*}_{{}_0E} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \{ \| F[t, x(t), {}_tx] - F[t, y(t), {}_ty] \|_E \times \\ \times \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{t^i}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \} \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \left\{ \left[L \| x(t) - y(t) \|_E + \right.\right. \\ \left.\left. + \int\limits_{t^1}^{\infty} \cdots \int\limits_{t^p}^{\infty} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \| x(s) - y(s) \|_E \, ds^1 \ldots ds^p \right] \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{t^i}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant L \| x - y \|^*_{0E} + \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \left[\exp \left(-\lambda \sum_{i=1}^{p} \int_{t^i}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{t^1}^{\infty} \cdots \int_{t^p}^{\infty} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \exp \left(\lambda \sum_{i=1}^{p} \int_{s^i}^{\infty} K_i(\tau^i)\, d\tau^i \right) ds^1 \ldots ds^p \right] \| x - y \|^*_{0E} =$$

$$= L \| x - y \|^*_{0E} + \frac{1}{\lambda^p} \prod_{i=1}^{p} \ 1 - \exp \left(-\lambda \int_{0}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \Big] \| x - y \|^*_{0E} =$$

$$= \left\{ L + \frac{1}{\lambda^p} \prod_{i=1}^{p} \left[1 - \exp \left(-\lambda \int_{0}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \right] \right\} \| x - y \|^*_{0E}.$$

Таким образом, $\| Ax - Ay \|^*_{0E} \leqslant q \ \| x - y \|^*_{0E}$, где

$$q = L + \frac{1}{\lambda^p} \prod_{i=1}^{p} \left[1 - \exp \left(-\lambda \int_{0}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right) \right].$$

Если положить $\lambda = (1/(1 - L))^{1/p}$, то оператор A будет сжимающим. Следовательно, утверждение теоремы 1 является следствием принципа сжимающих отображений [4].

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При условиях доказанной теоремы единственное непрерывное и ограниченное решение уравнения (1) является пределом приближений Пикара

$$x^{(n)}(t) = F[t, x^{(n-1)}(t), \ _t x^{(n-1)}], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где в качестве $x^{(0)}(t)$ можно взять любую функцию из $_0E$. Скорость сходимости $x^{(n)}(t)$ к решению $x(t)$ уравнения (1) определяется неравенством

$$\| x^{(n)}(t) - x(t) \|_E \leqslant \| x - x^{(0)} \|_{0E} \times$$

$$\times \left[L^n + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(m!)^{p+1}} L^{n-m} \prod_{i=1}^{p} \left(\int_{0}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right)^m \right]. \tag{5}$$

Легко доказывается, что при этих же условиях к решению уравнения (1) сходятся также приближения

$$y^{(n)}(t) = F[t, y^{(n)}(t), \ _t y^{(n-1)}], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

при этом

$$\| y^{(n)}(t) - x(t) \|_E \leqslant \frac{\| x - x^{(0)} \|_{0E}}{(1 - L)^n} \ \frac{\prod_{i=1}^{p} \left(\int_{0}^{\infty} K_i(s^i)\, ds^i \right)^n}{(n!)^p}. \tag{7}$$

Из оценок (5) и (7) следует, что приближения (6) сходятся к решению уравнения (1) быстрее, чем приближения (4).

Рассмотрим некоторые примеры уравнения (1).

Пусть $E = R^m$. Тогда примером уравнения (1) может служить уравнение

$$x(t) = \Phi \left\{ t, x(t), \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} K[t, s, x(s), x(t)]\, ds^1 \ldots ds^p \right\}, \tag{8}$$

где $x, \Phi, K \in R^m$, $t = (t^1, \ldots, t^p)$.

Из теоремы 1 в качестве следствия получается утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть вектор-функции* $\Phi(t, x, z)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$; $x, z \in R^m$, *и* $K(t, s, x, y)$, $0 \leqslant t, s \leqslant \infty$; $x, y \in R^m$, *непрерывны по совокупности* *переменных, ограничены и удовлетворяют соответственно условиям*

$$|\Phi(t, \bar{x}, \bar{z}) - \Phi(t, x, z)| \leqslant L_1 |\bar{x} - x| + L_2 |\bar{z} - z|,$$

$$|K(t, s, \bar{x}, \bar{y}) - K(t, s, x, y)| \leqslant \prod_{i=1}^{p} a_i(s^i) |\bar{x} - x| + \prod_{i=1}^{p} b_i(s^i) |\bar{y} - y|,$$

(через $|\cdot|$ *обозначается любая норма в пространстве* R^m*), где* L_1, L_2 *— положительные постоянные,* $a_i(s^i)$ *и* $b_i(s^i)$, $0 \leqslant s^i \leqslant \infty$; $i = \overline{1, p}$, *— суммируемые на отрезке* $[0, \infty]$ *функции, при этом*

$$L_1 + L_2 \prod_{i=1}^{p} \left(\int_0^\infty b_i(s^i)\, ds^i \right) < 1.$$

Тогда уравнение (6) *имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, определенное при всех* $t \in [0, \infty]$.

Для доказательства этой теоремы достаточно в теореме 1 положить $E = R^m$ и

$$F(t, x, {}_ty) \equiv \Phi \left\{ t, x, \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} K[t, s, y(s), x]\, ds^1 \ldots ds^p \right\}.$$

При указанных условиях решение уравнения (8) является пределом последовательных приближений

$$x_n(t) = \Phi \left\{ t, x_{n-1}(t), \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} K[t, s, x_{n-1}(s), x_{n-1}(t)]\, ds^1 \ldots ds^p \right\} \qquad (9)$$

и

$$y_n(t) = \Phi \left\{ t, y_n(t), \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} K[t, s, y_{n-1}(s), y_n(t)]\, ds^1 \ldots ds^p \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

при этом последние сходятся быстрее, чем приближения (9).

Пусть $E = C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$, $a = (a^1, \ldots, a^p)$, $b = (b^1, \ldots, b^p)$, m-мерных вектор-функций $u(s)$, $s = (s^1, \ldots, s^p)$, с нормой $\| u \| = \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} |u(s)|$. В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$x(t, s) = \Phi_1 \left\{ t, s \int_{a^1}^{b^1} \ldots \int_{a^p}^{b^p} K_1[t, s, \sigma, x(t, \sigma), x(t, s)]\, d\sigma^1 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots d\sigma^p, \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} K_2[t, s, \tau, x(\tau, s), x(t, s)]\, d\tau^1 \ldots d\tau^p \right\},$$

где x, Φ_1, K_1, $K_2 \in R^m$, $t = (t^1, \ldots, t^p)$.

Замечание 2. Если непрерывный оператор $F(t, x, {}_ty, u) : [t, \infty] \times \times E \times {}_tE \times E_1 \to E$, E_1 — банахово пространство, ограничен и удовлетворяет условию

$$\| F(t, \bar{x}, {}_t\bar{y}, \bar{u}) - F(t, x, {}_ty, u) \|_E \leqslant L \| \bar{x} - x \|_E +$$

$$+ \int_{t^1}^{\infty} \ldots \int_{t^p}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \| \bar{y}(s) - y(s) \|_E + a(s) \| \bar{u} - u \|_{E_1} \right) ds^1 \ldots ds^p,$$

где $0 \leqslant L < 1$ — постоянная, $K_i(s^i)$, $0 \leqslant s^i \leqslant \infty$; $i = \overline{1, p}$, и $a(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \infty$, — неотрицательные суммируемые функции, то непрерывное и ограниченное на $[0, \infty]$ решение уравнения

$$x(t) = F[t, x(t), {}_tx, u]$$

непрерывно зависит от параметра $u \in E_1$.

1. *Атдаев С., Аширов С.* Некоторые итерационные процессы для решения нелинейных операторных уравнений на полуоси.— Изв. АН ТуркмССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1975, № 6, с. 9—17.
2. *Мамедов Я. Д., Аширов С. А.* Нелинейные уравнения Вольтерра.— Ашхабад: Ылым, 1977.— 176 с.
3. *Атдаев С.* Об однозначной разрешимости одного класса уравнений с вольтерровым оператором.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 1, с. 94—97.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 456 с.

Туркм. гос. ун-т

Поступила в редакцию 06.02.83