УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

СТАБІЛЬНІ КВАЗІПОРЯДКИ НА ДЕЯКИХ ПЕРЕСТАВНИХ ІНВЕРСНИХ МОНОЇДАХ

Let G be an arbitrary group of bijections on a finite set. By $I(G)$ we denote the set of all injections each of which is included in a bijection from G. The set $I(G)$ forms an inverse monoid with respect to the ordinary operation of composition of binary relations . We investigate different properties of the semigroup $I(G)$. In particular, we establish necessary and sufficient conditions for the inverse monoid $I(G)$ to be permutable (i.e., $\xi \circ \varphi = \varphi \circ \xi$ for any pair of congruences ξ, φ on $I(G)$). In this case, we describe the structure of each congruence on $I(G)$. We also describe stable orders on $I(A_n)$, where A_n is alternating group.

Пусть G — произвольная группа биекций на конечном множестве. Обозначим через $I(G)$ множество всех инъекций, каждая из которых включается в биекцию из G. Множество $I(G)$ относительно обычной операции композиции бинарных отношений образует инверсный моноид. В данной статье изучаются различные свойства полугруппы $I(G)$. В частности, установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы инверсный моноид $I(G)$ был перестановочным (т. е. $\xi \circ \varphi = \varphi \circ \xi$ для любой пары конгруэнций ξ, φ на $I(G)$), и в этом случае описана структура каждой конгруэнции на $I(G)$. Приведено описание стабильных порядков на $I(A_n)$, где A_n — альтернативная группа.

Нехай G — довільна група бієкцій на скінченній множині $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, а IS_n — симетрична інверсна напівгрупа на $\mathbf{N}$. Розглянемо множину $I(G) = \{\varphi \in IS_n \colon \varphi \subseteq \eta$ для деякого $\eta \in G\}$. Легко перевірити, що таким чином відносно операції композиції ми одержуємо інверсний моноїд, в якому група оборотних елементів збігається з G. Зокрема, якщо взяти симетричну групу S_n, то очевидно, що моноїд $I(S_n)$ — це симетрична інверсна напівгрупа на множині $\mathbf{N}$. З означення інверсного моноїда $I(G)$ безпосередньо випливає, що він є розкладним, тобто $I(G) = G \circ E$, де E — напіврешітка ідемпотентів моноїда $I(G)$. Моноїд $I(G)$ є простим прикладом інверсної алгебри в сенсі статті [1]. В роботі [2] досліджуються деякі властивості інверсної напівгрупи $I(A_n)$, де A_n— альтернативна група. В статті [3] наведено опис групи автоморфізмів скінченного моноїда $I(G)$, а також встановлено необхідні і достатні умови, за яких будь-який стабільний порядок на $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним. У даній статті ми продовжуємо вивчати властивості моноїда $I(G)$. Зокрема, у пункті 1 встановлено необхідні і достатні умови, за яких інверсний моноїд $I(G)$ буде переставним (тобто для будь-яких конгруенцій θ і ξ на $I(G)$ виконується рівність $\theta \circ \xi = \xi \circ \theta$). У пункті 3 вивчаються властивості стабільних квазіпорядків на переставному моноїді $I(G)$. У пункті 4 дано опис конгруенцій на $I(G)$, а у пункті 5 з'ясовано структуру будь-якого стабільного порядку на інверсному моноїді $I(A_n)$.

1. Необхідна і достатня умова для того, щоб інверсний моноїд $I(G)$ був переставним. Напівгрупа називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень. У цьому пункті ми встановимо необхідні і достатні умови, за яких інверсний моноїд $I(G)$ є переставним. Перед тим як сформулювати відповідну теорему наведемо кілька означень.

Означення. *Скінченну групу G бієкцій на множині $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ назвемо глобально-транзитивною, якщо для довільних підмножин A і B множини $\mathbf{N}$ таких, що $|A| = |B|$, існує бієкція $\xi \in G$ така, що $(A)\xi = B$.*

Очевидно, що скінченна симетрична група є глобально-транзитивною. До глобально-транзитивних груп також належить альтернативна група A_n. Цей факт відмічено в [2] (лема 6). Чи існують глобально-транзитивні групи, відмінні від S_n і A_n? Відповідь ствердна. Наведемо приклад.

Приклад. Нехай S_5 — симетрична група на множині $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Розглянемо підгрупу групи S_5, що породжується двома перестановками $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & 3 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Перелічимо всі 20 елементів цієї підгрупи:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\5 & 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 1 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\4 & 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & 3 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\4 & 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & 4 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\4 & 1 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\5 & 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\3 & 1 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\5 & 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 5 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Безпосередня перевірка показує, що дана група є глобально-транзитивною. Зазначимо, що ця група є максимальною (за включенням) підгрупою симетричної групи S_5.

Проблема. *Знайти джерело скінченних глобально-транзитивних груп.*

Для $\alpha \in I(G)$ число $|\operatorname{im}(\alpha)|$ називають рангом перетворення α і позначають через $\operatorname{rank}(\alpha)$. Далі через $\operatorname{dom}(\varphi)$ і $\operatorname{im}(\varphi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень ін'єкції $\varphi \in I(G)$. Нехай S_n — симетрична група на множині $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Якщо G — підгрупа групи S_n, то зрозуміло, що кожний ідемпотент напівгрупи $I(G)$ має вигляд Δ_A — відношення рівності на множині A ($A \subseteq \mathbf{N}$).

Наступне твердження нам знадобиться в подальших викладках.

Твердження 1 (див. [4], теорема 2)**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі дві умови*:

1) *для будь-яких $a, b \in S$, якщо $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$, то $SaS = SbS$*;

2) *для будь-якого $e \in E(S)(\operatorname{rank}(e) \geq 2)$ існують ідемпотенти f і g такі, що $f \neq g, f < e$, $g < e$ і $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(g) = \operatorname{rank}(e) - 1$.*

Зазначимо, що умова 1 *твердження* 1 *еквівалентна лінійній впорядкованості* (*відносно включення*) *ідеалів напівгрупи S.*

Тепер сформулюємо і доведемо основну теорему першого пункту.

Теорема 1. *Нехай G — підгрупа симетричної групи S_n. Наступні властивості є еквівалентними*:

(a) *G — глобально-транзитивна група*;

(b) *ідеали інверсного моноїда $I(G)$ утворюють ланцюг відносно включення*;

(c) *моноїд $I(G)$ є переставним.*

Доведення. Спочатку обґрунтуємо еквівалентність (a) $\Leftrightarrow$ (b). Отже, припустимо, що група G є глобально-транзитивною. Доведемо, що ідеали інверсного моноїда $I(G)$ утворюють ланцюг відносно включення. Позначимо через Id довільний ідеал напівгрупи $I(G)$. Нехай Δ_A — ідемпотент найбільшого рангу серед усіх ідемпотентів, що належать ідеалу Id. Доведемо, що $I(G) \circ \Delta_A \circ I(G) = \mathrm{Id}$. Включення $I(G) \circ \Delta_A \circ I(G) \subseteq \mathrm{Id}$ є очевидним. Обґрунтуємо зворотне включення. Нехай $\psi \in \mathrm{Id}$, $\operatorname{dom}(\psi) = D, \operatorname{im}(\psi) = R$. Легко зрозуміти, що

$\mathrm{rank}\,(\psi) \leq \mathrm{rank}\,(\Delta_A)$. Тоді існує підмножина B множини A така, що $|B| = |D| = |R|$. Оскільки група G глобально-транзитивна, то існує $\xi \in G$ таке, що $(D)\xi = B$. Звідси легко випливає, що існує ін'єкція $\eta \in I(G)$ така, що $\mathrm{dom}\,(\eta) = D$ і $\mathrm{im}\,(\eta) = B$. Аналогічно доводимо, що існує ін'єкція $\varphi \in I(G)$ така, що $\mathrm{dom}\,(\varphi) = B$ і $\mathrm{im}\,(\varphi) = R$. Зрозуміло, що $\mathrm{dom}\,(\eta \circ \Delta_A \circ \varphi) = D$. Кожний ідеал інверсної напівгрупи є інверсною піднапівгрупою. Оскільки $\eta \circ \Delta_A \circ \varphi \in I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$, то $(\eta \circ \Delta_A \circ \varphi)^{-1} \in I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$. Очевидно, що $(\eta \circ \Delta_A \circ \varphi) \circ (\eta \circ \Delta_A \circ \varphi)^{-1} = \Delta_D$. Оскільки $\Delta_D \in I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$ і $\Delta_D \circ \psi = \psi$, то $\psi \in I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$. Отже, $\mathrm{Id} \subseteq I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$. Враховуючи справедливість зворотного включення, робимо висновок, що $\mathrm{Id} = I(G) \circ \Delta_A \circ I(G)$. Таким чином, кожний ідеал інверсного моноїда $I(G)$ є головним, а отже (див. [5], теорема 2), ідеали інверсного моноїда $I(G)$ лінійно впорядковані відносно включення.

Припустимо тепер, що ідеали інверсного моноїда $I(G)$ утворюють ланцюг відносно включення. Нехай B і C — підмножини множини $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, причому $|B| = |C|$. Зрозуміло, що $\Delta_B \in I(G)$ і $\Delta_C \in I(G)$. Крім того, $\mathrm{rank}\,(\Delta_B) = \mathrm{rank}\,(\Delta_C)$. Тоді (див. [5], теорема 2) має місце рівність $I(G) \circ \Delta_B \circ I(G) = I(G) \circ \Delta_C \circ I(G)$. Звідси випливає, що існують $\beta \in I(G)$ і $\mu \in I(G)$ такі, що $\Delta_B = \beta \circ \Delta_C \circ \mu$. Зрозуміло, що $\Delta_C \circ \mu \in I(G)$, $\mathrm{dom}\,(\Delta_C \circ \mu) = C$, $\mathrm{im}\,(\Delta_C \circ \mu) = B$. Нехай перестановка $\phi \in G$ така, що $\Delta_C \circ \mu \subseteq \phi$. Очевидно, що $(C)\phi = B$. Отже, група G є глобально-транзитивною.

Еквівалентність (a) $\Leftrightarrow$ (b) доведено.

Далі, відомо (див. [6], теорема 4), що ідеали будь-якої переставної напівгрупи утворюють ланцюг відносно включення, тобто виконується імплікація (c) $\Rightarrow$ (b).

Нарешті обґрунтуємо імплікацію (b) $\Rightarrow$ (c).

Оскільки ідеали інверсного моноїда $I(G)$ утворюють ланцюг відносно включення, то виконується умова 1 твердження 1. Далі, нехай A — довільна підмножина множини $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Очевидно, що відношення рівності на множині A (ми його позначаємо через Δ_A) є ідемпотентом моноїда $I(G)$. Інших ідемпотентів в $I(G)$ немає. Отже, зрозуміло, що напіврешітка ідемпотентів інверсного моноїда $I(G)$ ізоморфна напіврешітці усіх підмножин множини $\mathbf{N}$ відносно операції перетину. Звідси робимо висновок, що виконується і умова 2 твердження 1. До того ж очевидно, що моноїд $I(G)$ містить нуль (порожнє перетворення). Отже, має місце імплікація (b) $\Rightarrow$ (c).

Теорему доведено.

2. Деякі властивості переставного інверсного моноїда $I(G)$. У цьому пункті ми перелічимо низку властивостей переставного інверсного моноїда $I(G)$. Спочатку наведемо кілька означень. Частковий порядок Φ на довільній напівгрупі S називається *стабільним*, якщо з умови $(x, y) \in \Phi$ випливає $(zx, zy) \in \Phi$ і $(xz, yz) \in \Phi$ для будь-якого $z \in S$. Частковий порядок Ω на довільній напівгрупі S називається *фундаментальним* (див. [7] і [8] або [9]), якщо існує гомоморфізм ξ напівгрупи S у напівгрупу $\mathcal{PT}(X)$ усіх часткових перетворень деякої множини X такий, що виконується еквівалентність $(a, b) \in \Omega \Leftrightarrow (a)\xi \subseteq (b)\xi$. Легко показати, що за цих умов частковий порядок Ω є стабільним, а гомоморфізм ξ — ізоморфізмом. Якщо ζ — фундаментальне відношення порядку на напівгрупі S, то відношення порядку ζ^{-1} називається антифундаментальним.

Твердження 2. *Якщо група G є глобально-транзитивною, то будь-який стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним.*

Доведення. Очевидно, що глобально-транзитивна група є транзитивною. Отже, згідно з твердженням 3 (див. [3]) будь-який стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним.

Далі, нехай $S = (S, \cdot)$ — довільна напівгрупа. Зафіксуємо елемент $a \in S$ і визначимо на S нову операцію $\star_a$ згідно з правилом $x \star_a y = x \cdot a \cdot y$. Легко перевірити, що операція $\star_a$ є асоціативною. Напівгрупа $(S, \star_a)$ називається *варіантом напівгрупи* $(S, \cdot)$ (див. [10, с. 237]). Одне з найважливіших питань, яке виникає при вивченні варіантів напівгрупи, формулюється таким чином: нехай a і b — елементи напівгрупи $(S, \cdot)$. За яких умов напівгрупи $(S, \star_a)$ і $(S, \star_b)$ будуть ізоморфними? Для скінченної симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ відповідний результат одержано в [11] (див. також [10, с. 237]). Сформулюємо його.

Теорема 2 ([11], теорема 1)**.** *Напівгрупи* $(\mathcal{IS}_n, \star_\alpha)$ *і* $(\mathcal{IS}_n, \star_\beta)$ *ізоморфні тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{rank}\,(\alpha) = \mathrm{rank}\,(\beta)$.

Має місце аналогічний, але більш загальний результат.

Теорема 3 (див. [12], теорема 1)**.** *Нехай інверсний моноїд* S *з групою оборотних елементів* G *задовольняє такі умови*:

1) *напівґратка ідемпотентів моноїда має скінченну довжину*;

2) *ідеали моноїда* S *лінійно впорядковані відносно включення*;

3) *для будь-якого* $x \in S$ *існує такий елемент* $g \in G$, *що* $x \leq g$.

Тоді для будь-яких a *і* b *напівгрупи* $(S, \star_a)$ *і* $(S, \star_b)$ *ізоморфні тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{rank}\,(a) = \mathrm{rank}\,(b)$.

Твердження 3. *Нехай* G *— глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи* S_n. *Напівгрупи* $(I(G), \star_\alpha)$ *і* $(I(G), \star_\beta)$ *ізоморфні тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{rank}\,(\alpha) = \mathrm{rank}\,(\beta)$.

Доведення. Оскільки інверсний моноїд $I(G)$ є скінченним, то виконується умова 1 теореми 3. Позаяк група G є глобально транзитивною, то, згідно з теоремою 1, ідеали моноїда $I(G)$ лінійно впорядковані відносно включення, тобто виконується умова 2 теореми 3. Умова 3 теореми 3 також виконується. Це безпосередньо випливає з означення інверсного моноїда $I(G)$.

Інверсна напівгрупа називається *фундаментальною*, якщо будь-яка конгруенція, яка включається в H-відношення Гріна, є відношенням рівності.

Твердження 4. *Інверсний моноїд* $I(G)$ *є фундаментальним.*

Доведення є безпосереднім наслідком твердження 1 статті [3].

Щодо групи автоморфізмів інверсного моноїда $I(G)$, то має місце наступне твердження.

Твердження 5 (див. [3], твердження 5)**.** *Нехай* G *— довільна підгрупа симетричної групи* S_n, *тоді* $\mathrm{Aut}\,(I(G)) \cong N(G)$, *де* $N(G)$ *— нормалізатор групи* G *в симетричній групі* S_n.

Для симетричної інверсної напівгрупи $I(S_n)$ опис відношення Гріна $\mathcal{J}$ є відомим (див., наприклад, [10], теорема 4.5.1). Аналогічна характеристика відношення Гріна $\mathcal{J}$ має місце для моноїда $I(G)$ у випадку, коли група G є глобально-транзитивною. Оскільки $I(G)$ — скінченна напівгрупа, то відношення Гріна $\mathcal{D}$ і $\mathcal{J}$ на ній збігаються.

Твердження 6. *Нехай* G *— глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи* S_n. *В інверсному моноїді* $I(G)$ (α, β) *належить* $\mathcal{D}$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{rank}\,(\alpha) = \mathrm{rank}\,(\beta)$.

Доведення. Нехай $\mathrm{rank}\,(\alpha) = \mathrm{rank}\,(\beta)$. Позначимо $\mathrm{dom}\,(\alpha)$ і $\mathrm{dom}\,(\beta)$ відповідно через A і B. Оскільки група G є глобально-транзитивною, то знайдеться елемент $\varphi \in I(G)$ такий, що $\mathrm{dom}\,(\varphi) = B$ і $\mathrm{im}\,(\varphi) = A$. Оскільки $\varphi \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \varphi^{-1} = \Delta_B$, то $\beta = \Delta_B \circ \beta = \varphi \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \beta$. Отже, $\beta \in I(G) \circ \alpha \circ I(G)$. Звідси $I(G) \circ \beta \circ I(G) \subset I(G) \circ \alpha \circ I(G)$. Зворотне включення доводиться аналогічно. Таким чином, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$.

Нехай тепер $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$, тоді $I(G) \circ \alpha \circ I(G) = I(G) \circ \beta \circ I(G)$. Отже, знайдуться елементи $\lambda, \tau \in I(G)$ такі, що $\alpha = \lambda \circ \beta \circ \tau$. Звідси $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{rank}(\lambda \circ \beta \circ \tau) \leq \operatorname{rank}(\lambda \circ \beta) \leq \operatorname{rank}(\beta)$. Аналогічно, $\operatorname{rank}(\beta) \leq \operatorname{rank}(\alpha)$. Таким чином, $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{rank}(\beta)$.

3. Стабільні квазіпорядки на переставному інверсному моноїді $I(G)$. Рефлексивне і транзитивне бінарне відношення на множині X називають *квазіпорядком*. Зрозуміло, що на алгебраїчних системах розглядають переважно стабільні квазіпорядки, тобто такі, які узгоджуються з операціями алгебраїчної системи. Серед стабільних квазіпорядків особливе місце займають конгруенції і порядки.

В цьому пункті ми вимагаємо, щоб група G була глобально-транзитивною.

Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на $I(G)$. Легко перевірити, що $I^l = \{f \in I(G) \colon (f, 0) \in \in \Sigma\}$ і $I^r = \{f \in I(G) \colon (0, f) \in \Sigma\}$ є ідеалами напівгрупи $I(G)$. Отже, кожному стабільному квазіпорядку на $I(G)$ відповідає пара ідеалів (I^l, I^r). Згідно з теоремою 1 ідеали інверсного моноїда $I(G)$ утворюють ланцюг відносно включення. Тому (див. [5], теорема 2) кожний ідеал напівгрупи $I(G)$ має форму $I_t = \{f \in I(G) \colon \operatorname{rank}(f) \leq t\}$ (тут t — невід'ємне ціле число). Отже, існують невід'ємні цілі числа k і m такі, що $I^l = \{f \in I(G) \colon \operatorname{rank}(f) \leq k\} = I_k$ і $I^r = \{f \in I(G) \colon \operatorname{rank}(f) \leq m\} = I_m$. Впорядковану пару чисел (k, m) назвемо *індексом квазіпорядку* Σ і позначимо через $\operatorname{ind}(\Sigma)$.

Лема 1. *Стабільний квазіпорядок Σ на інверсному моноїді $I(G)$ є відношенням рівності тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (0, 0)$.

Доведення. Якщо Σ є відношенням рівності, то, очевидно, $\operatorname{ind}(\Sigma) = (0, 0)$.

Нехай тепер $\operatorname{ind}(\Sigma) = (0, 0)$. Припустимо, що квазіпорядок Σ не є рівністю, тобто існує пара $(\varphi, \xi) \in \Sigma$ така, що $\varphi \neq \xi$. Розглянемо два можливі випадки.

1-*й випадок*: $\operatorname{dom}(\varphi) = \operatorname{dom}(\xi)$.

Оскільки $\varphi \neq \xi$, то існує елемент $a \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ такий, що $(a)\varphi \neq (a)\xi$. Тоді $\left(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \varphi, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \xi\right) \in \Sigma$ або $\left(\begin{pmatrix} a \\ (a)\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ (a)\xi \end{pmatrix}\right) \in \Sigma$. Нехай $(a)\varphi = b$ і $(a)\xi = c$. Оскільки $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right) \in \Sigma$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}\right) \in \Sigma$. Позаяк $b \neq c$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, 0\right) \in \Sigma$, тоді $\operatorname{ind}(\Sigma) \neq (0, 0)$. Суперечність.

2-*й випадок*: $\operatorname{dom}(\varphi) \neq \operatorname{dom}(\xi)$.

Нехай для конкретності $a \in \operatorname{dom}(\varphi)$ і $a \notin \operatorname{dom}(\xi)$. Тоді $\left(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \varphi, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \xi\right) \in \Sigma$. Оскільки $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \xi = 0$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \varphi, 0\right) \in \Sigma$. Суперечність.

Лема 2. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = = (k, m)$. *Відношення Σ є порядком тоді і лише тоді, коли $k = 0$ або $m = 0$.*

Доведення. Нехай Σ — стабільний порядок на $I(G)$. Покажемо, що $k = 0$ або $m = 0$. Припустимо протилежне, тобто $k \neq 0$ і $m \neq 0$. Оскільки $k \neq 0$, то існує елемент $\varphi \in I(G)$ такий, що $\operatorname{rank}(\varphi) = 1$ і $(\varphi, 0) \in \Sigma$. Аналогічно, позаяк $m \neq 0$, то існує $\rho \in I(G)$ такий, що $\operatorname{rank}(\rho) = 1$ і $(0, \rho) \in \Sigma$. Оскільки $I_1 = I(G) \circ \varphi \circ I(G)$, то існують $\alpha, \beta \in I(G)$ такі, що $\alpha \circ \varphi \circ \beta = \rho$. Таким чином, якщо $(\varphi, 0) \in \Sigma$, то $(\alpha \circ \varphi \circ \beta, 0) \in \Sigma$, тобто $(\rho, 0) \in \Sigma$, а отже, бінарне відношення Σ не є антисиметричним. Суперечність.

Доведемо зворотне твердження.

Якщо $k = 0$ і $m = 0$, то згідно з попередньою лемою Σ є відношенням рівності.

Нехай тепер $k = 0$ і $m \neq 0$. Доведемо, що відношення Σ є антисиметричним. Припустимо протилежне, тобто існують $\eta, \xi \in I(G)$ такі, що $(\eta, \xi) \in \Sigma$, $(\xi, \eta) \in \Sigma$ і $\eta \neq \xi$.

Якщо $\eta = 0$ або $\xi = 0$, то відразу одержуємо суперечність.

Нехай тепер $\eta \neq 0$ і $\xi \neq 0$. Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо $\operatorname{dom}(\eta) = \operatorname{dom}(\xi)$, то існує $a \in \operatorname{dom}(\eta)$ такий, що $(a)\eta \neq (a)\xi$. Позначимо $(a)\eta$ і $(a)\xi$ відповідно через b і c. Оскільки $(\eta, \xi) \in \Sigma$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \eta, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \xi\right) \in \Sigma$. Отже, $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right) \in$ $\in \Sigma$. Позаяк $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = 0$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, 0\right) \in \Sigma$. З останнього випливає, що $k \neq 0$. Суперечність.

2. Нехай $\operatorname{dom}(\eta) \neq \operatorname{dom}(\xi)$. Припустимо, що $x \in \operatorname{dom}(\eta)$ і $x \notin \operatorname{dom}(\xi)$, тоді $\left(\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \eta, 0\right) \in$ $\in \Sigma$. До того ж $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \eta \neq 0$. Отже, $k \neq 0$. Суперечність.

Припустимо тепер, що $z \in \operatorname{dom}(\xi)$ і $z \notin \operatorname{dom}(\eta)$. Оскільки $(\xi, \eta) \in \Sigma$, то $\left(\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \circ \xi, 0\right) \in \Sigma$. Позаяк $\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \circ \xi \neq 0$, то $k \neq 0$. Суперечність.

Лема 3. *Якщо A і B — непорожні скінченні множини, причому $A \subsetneq B$, то існує множина C така, що $|B \cap C| = |B| - 1$ і $|A \cap C| = |A| - 1$.*

Доведення. Нехай a — довільний елемент множини A. Для множини $C = B - \{a\}$ очевидно виконуються рівності $|B \cap C| = |B| - 1$ і $|A \cap C| = |A| - 1$.

Лема 4. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma$ *і* $\operatorname{rank}(\eta) > k$, *то* $\operatorname{rank}(\eta) \leq \operatorname{rank}(\xi)$.

Доведення. Припустимо, що $\operatorname{rank}(\eta) > \operatorname{rank}(\xi)$. Позначимо $\operatorname{dom}(\eta)$ через A. Позаяк $(\eta, \xi) \in \Sigma$, то $(\Delta_A \circ \eta, \Delta_A \circ \xi) \in \Sigma$. Очевидно, що $\operatorname{rank}(\Delta_A \circ \eta) = \operatorname{rank}(\eta)$. Якщо $\operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi) \leq k$, то одержуємо суперечність.

Нехай тепер $\operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi) > k$. Очевидно, що $\operatorname{dom}(\Delta_A \circ \xi) \subsetneq \operatorname{dom}(\Delta_A \circ \eta) = \operatorname{dom}(\eta)$. Тоді згідно з попередньою лемою існує множина C (звісно, що $C \subset \{1, 2, \ldots, n\}$) така, що $|\operatorname{dom}(\Delta_A \circ \eta) \cap C| = |\operatorname{dom}(\Delta_A \circ \eta)| - 1$ і $|\operatorname{dom}(\Delta_A \circ \xi) \cap C| = |\operatorname{dom}(\Delta_A \circ \xi)| - 1$. Оскільки $(\Delta_A \circ \eta, \Delta_A \circ \xi) \in \Sigma$, то $(\Delta_C \circ \Delta_A \circ \eta, \Delta_C \circ \Delta_A \circ \xi) \in \Sigma$. До того ж $\operatorname{rank}(\Delta_C \circ \Delta_A \circ \eta) = \operatorname{rank}(\Delta_A \circ \eta) - 1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_C \circ \Delta_A \circ \xi) = \operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi) - 1$. Якщо $\operatorname{rank}(\Delta_C \circ \Delta_A \circ \xi) \leq k$, то одержуємо суперечність. У випадку, коли $\operatorname{rank}(\Delta_C \circ \Delta_A \circ \xi) > k$, повторюємо попередню дію, і так далі, аж поки не приходимо до суперечності.

Лема 5. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma$ *і* $\operatorname{rank}(\xi) > m$, *то* $\operatorname{rank}(\xi) \leq \operatorname{rank}(\eta)$.

Доведення аналогічне доведенню попередньої леми.

Лема 6. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma$ *і* $\operatorname{rank}(\eta) > \max\{k, m\}$, *то* $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$.

Доведення. Згідно з лемою 4

$$\operatorname{rank}(\eta) \leq \operatorname{rank}(\xi). \tag{1}$$

Припустимо, що $\operatorname{rank}(\xi) \leq m$, тоді $\operatorname{rank}(\eta) > \operatorname{rank}(\xi)$. Повторюючи міркування, що мали місце при доведенні леми 4, приходимо до суперечності. Таким чином, $\operatorname{rank}(\xi) > m$, а отже, згідно з лемою 5

$$\operatorname{rank}(\xi) \leq \operatorname{rank}(\eta). \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає рівність $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$.

Лема 7. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma$ *і* $\operatorname{rank}(\xi) > \max\{k, m\}$, *то* $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$.

Доведення аналогічне доведенню леми 6.

Лема 8. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma \cap (D_r \times D_r)$ *(тут D_r — множина елементів моноїда $I(G)$ рангу r) і $r > \min\{k, m\}$, то* $\operatorname{im}(\eta) = \operatorname{im}(\xi)$.

Доведення. Нехай для конкретності $k \leq m$. Позначимо $\operatorname{im}(\eta)$ через B. Припустимо, що $\operatorname{im}(\xi) \neq B$. Оскільки $(\eta, \xi) \in \Sigma$, то $(\eta \circ \Delta_B, \xi \circ \Delta_B) \in \Sigma$. Звідки $\operatorname{rank}(\eta) > \operatorname{rank}(\xi \circ \Delta_B)$, що суперечить лемі 4.

Якщо ж припустити, що $m \leq k$, то аналогічним чином ми приходимо до суперечності з лемою 5.

Лема 9. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma \cap (D_r \times D_r)$ *(тут D_r — множина елементів моноїда $I(G)$ рангу r) і $r > \min\{k, m\}$, то* $\operatorname{dom}(\eta) = \operatorname{dom}(\xi)$.

Доведення. Нехай для конкретності $k \leq m$. Позначимо $\operatorname{dom}(\eta)$ через A. Припустимо, що $\operatorname{dom}(\xi) \neq A$. Оскільки $(\eta, \xi) \in \Sigma$, то $(\Delta_A \circ \eta, \Delta_A \circ \xi) \in \Sigma$. Звідси $\operatorname{rank}(\eta) > \operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi)$, що суперечить лемі 4.

Якщо ж припустити, що $m \leq k$, то аналогічним чином приходимо до суперечності з лемою 5.

Лема 10. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma \cap (D_r \times D_r)$ *(тут D_r — множина елементів моноїда $I(G)$ рангу r) і $r > \min\{k, m\}$, то $(\eta, \xi) \in H$.*

Доведення є безпосереднім наслідком двох попередніх лем.

Лема 11. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Sigma \cap (D_r \times D_r)$ *(тут D_r — множина елементів моноїда $I(G)$ рангу r) і $r \geq \min\{k, m\} + 2$, то $\eta = \xi$.*

Доведення. З лем 8 і 9 випливає $\operatorname{dom}(\eta) = \operatorname{dom}(\xi)$ і $\operatorname{im}(\eta) = \operatorname{im}(\xi)$. Нехай x — довільний елемент, що належить $\operatorname{dom}(\eta)$. Позначимо множину $\operatorname{dom}(\eta) - \{x\}$ через B. Оскільки $(\Delta_B \circ \eta, \Delta_B \circ \xi) \in \Sigma$ і $\operatorname{rank}(\Delta_B \circ \eta) = r - 1 > \min\{k, m\}$, то згідно з лемою 8 $\operatorname{im}(\Delta_B \circ \eta) = \operatorname{im}(\Delta_B \circ \xi)$. Крім того, очевидно, що $\operatorname{im}(\eta) = \operatorname{im}(\Delta_B \circ \eta) \cup \{(x)\eta\}$ і $\operatorname{im}(\xi) = \operatorname{im}(\Delta_B \circ \xi) \cup \{(x)\xi\}$. Звідси випливає, що $(x)\eta = (x)\xi$. Отже, $\eta = \xi$.

Лема 12. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$ *і $k \neq m$. Якщо $(\eta, \xi) \in \Sigma$,* $\operatorname{rank}(\eta) > \max\{k, m\}$ *або* $\operatorname{rank}(\xi) > \max\{k, m\}$, *то $\eta = \xi$.*

Доведення. З лем 6 і 7 випливає $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$. Оскільки $k \neq m$, то $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi) \geq \min\{k, m\} + 2$. Отже, згідно з лемою 11 $\eta = \xi$.

Лема 13. *Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Sigma) = (k, m)$. *Якщо $(\eta, \xi) \in \Sigma$ і $k + 2 \leq \operatorname{rank}(\eta) < \operatorname{rank}(\xi) \leq m$, то $\eta \subset \xi$.*

Доведення. Позначимо $\operatorname{dom}(\eta)$ через A. Оскільки $(\eta, \xi) \in \Sigma$, то $(\Delta_A \circ \eta, \Delta_A \circ \xi) \in \Sigma$. Згідно з лемою 4 $\operatorname{rank}(\eta) \leq \operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi)$. Крім того, $\operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi) \leq \operatorname{rank}(\Delta_A) = \operatorname{rank}(\eta)$. Отже, $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\Delta_A \circ \xi)$. Тепер, застосовуючи лему 11, одержуємо $\eta = \Delta_A \circ \xi$. З останньої рівності випливає $\eta \subset \xi$.

Лема 14. *Нехай* Ω — *стабільне бінарне відношення на інверсному моноїді* $I(G)$. *Якщо* $(\alpha, \beta) \in \Omega$ *і* $\alpha \subseteq \beta$, *то* $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \in \Omega$.

Доведення. Оскільки $(\alpha, \beta) \in \Omega$, то $(\beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta^{-1}, \beta^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, тобто $(\beta^{-1} \circ \alpha \circ \circ \beta^{-1}, \beta^{-1}) \in \Omega$. Позаяк $\alpha \subseteq \beta$, то $\beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta^{-1} = \alpha^{-1}$. Отже, $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \in \Omega$.

Лема 15. *Нехай* Ω — *стабільний квазіпорядок на інверсному моноїді* $I(G)$. *Якщо* $(\alpha, \beta) \in \Omega$ *і* $\alpha \subseteq \beta$, *то* $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$.

Доведення. Оскільки $(\alpha, \beta) \in \Omega$, то $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \alpha^{-1}) \in \Omega$. За попередньою лемою $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \in \Omega$. Звідси $(\beta \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$. Враховуючи транзитивність Ω, одержуємо $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$.

4. Конгруенції на переставному інверсному моноїді $I(G)$. В цьому пункті наведемо опис конгруенцій на переставному інверсному моноїді $I(G)$. Отже, нехай G — глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи S_n. Позначимо через Θ довільну конгруенцію на $I(G)$, індекс якої дорівнює (k, m). Оскільки конгруенція є симетричним бінарним відношенням, то, очевидно, $k = m$. Тому далі замість $\operatorname{ind}(\Theta) = (k, k)$ будемо писати $\operatorname{ind}(\Theta) = k$. Якщо $k = n$, то, очевидно, конгруенція Θ є тотальною, тобто $\Theta = I(G) \times I(G)$. Нехай тепер $k < n$. Оскільки інверсний моноїд $I(G)$ є переставним і містить нуль, то згідно з теоремою 4 (див. [5]) конгруенція Θ має форму $\Theta = I_k \times I_k \cup \Omega$, де I_k — ідеал напівгрупи $I(G), \Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна).

Лема 16. *Нехай* G — *глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи* S_n *і* Θ — *конгруенція на* $I(G)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Theta) = k$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Theta$ *і* $\operatorname{rank}(\eta) = k + 1$, *то* $(\eta, \xi) \in H$, *де* H— *відношення Гріна.*

Доведення. Згідно з лемою 6 $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$. Застосовуючи лему 10, одержуємо $(\eta, \xi) \in \in H$.

Лема 17. *Нехай* G — *глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи* S_n *і* Θ — *конгруенція на* $I(G)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Theta) = k$. *Якщо* $(\eta, \xi) \in \Theta$ *і* $\operatorname{rank}(\eta) \geq k + 2$, *то* $\eta = \xi$.

Доведення. Згідно з лемою 6 $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\xi)$. Застосовуючи лему 11, одержуємо рівність $\eta = \xi$.

Нехай G — глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи S_n. Розглянемо інверсний моноїд $I(G)$. Нехай k — невід'ємне ціле число таке, що $k < n$. Легко перевірити, що фактор-напівгрупа I_{k+1}/I_k є напівгрупою Брандта. Нехай σ — конгруенція, відмінна від універсальної на фактор-напівгрупі I_{k+1}/I_k. Зазначимо, що опис конгруенцій на напівгрупі Брандта є відомим (див. [13]). На моноїді $I(G)$ визначимо бінарне відношення Σ таким чином:

$$\Sigma = I_k \times I_k \cup ((D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma) \cup \triangle,$$

де $D_{k+1} = \{\varphi \in I(G) \colon \operatorname{rank}(\varphi) = k + 1\}$ і Δ — відношення рівності на $I(G)$.

Теорема 4. *Нехай* G — *глобально-транзитивна підгрупа симетричної групи* S_n. *Бінарне відношення* Σ *є конгруенцією на інверсному моноїді* $I(G)$. *Кожна відмінна від універсальної конгруенція на* $I(G)$ *має таку форму.*

Доведення. Легко перевірити, що бінарне відношення Σ є еквівалентністю на інверсному моноїді $I(G)$. Покажемо стабільність еквівалентності Σ. Нехай $(\psi, \varphi) \in \Sigma$. У випадку, коли $\psi = \varphi$ або $(\psi, \varphi) \in I_k \times I_k$, зрозуміло, що $(\psi \circ \eta, \varphi \circ \eta) \in \Sigma$ і $(\eta \circ \psi, \eta \circ \varphi) \in \Sigma$ для довільного $\eta \in I(G)$. Припустимо тепер, що $(\psi, \varphi) \in (D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma$. Тоді згідно з теоремою 4 (див. [5]) $\operatorname{dom}(\psi) = \operatorname{dom}(\varphi)$ і $\operatorname{im}(\psi) = \operatorname{im}(\varphi)$. Якщо елемент $\xi \in I(G)$ такий, що $\operatorname{rank}(\psi \circ \xi) \leq k$, то $\operatorname{rank}(\varphi \circ \xi) \leq k$. Отже, $(\psi \circ \xi, \varphi \circ \xi) \in I_k \times I_k \subset \Sigma$. Аналогічно $(\xi \circ \psi, \xi \circ \varphi) \in \Sigma$. Тепер розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank}(\psi \circ \xi) = k+1$. Тоді і $\operatorname{rank}(\varphi \circ \xi) = k+1$. Очевидно, що $\psi \circ \xi = \psi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \xi$ і $\varphi \circ \xi = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \xi$. До того ж $\psi^{-1} \circ \psi \circ \xi = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \xi$ і $\operatorname{rank}(\psi^{-1} \circ \psi \circ \xi) = k+1$. Враховуючи, що $(\psi, \varphi) \in (D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma$, робимо висновок, що $(\psi \circ \xi, \varphi \circ \xi) \in (D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma$. Аналогічно, $(\xi \circ \psi, \xi \circ \varphi) \in (D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma$. Таким чином, Σ — конгруенція на $I(G)$.

Нехай тепер Θ — конгруенція, відмінна від універсальної на інверсному моноїді $I(G)$. Нехай $\operatorname{ind}(\Theta) = k$. Тоді $I_k \times I_k \subset \Theta$. Далі, якщо $(\rho, \tau) \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(\rho) > k+1$, то згідно з лемою 17 $\rho = \tau$. Крім того, конгруенція Θ індукує конгруенцію Θ^* на фактор-напівгрупі I_{k+1}/I_k, а саме, $\Theta^* = (\Theta \cap (D_{k+1} \times D_{k+1})) \cup \{(0,0)\}$, де 0 – нуль фактор-напівгрупи I_{k+1}/I_k. Отже, $\Theta = I_k \times I_k \cup ((D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \Theta^*) \cup \triangle$.

Теорему доведено.

Таким чином, у випадку, коли група G є глобально-транзитивною підгрупою симетричної групи S_n, опис конгруенцій інверсного моноїда $I(G)$ аналогічний опису конгруенцій на скінченній симетричній інверсній напівгрупі (див. [14]). У свою чергу результат Лібера [14] є аналогом результату Мальцева, одержаного в [15] для симетричної напівгрупи усіх повних перетворень довільної множини.

5. Стабільні порядки на інверсному моноїді $I(A_n)$. Як і в попередньому пункті, вважаємо, що група $G (G \subset S_n)$ є глобально-транзитивною, а отже, згідно з теоремою 1 інверсний моноїд $I(G)$ є переставним. Нехай Ω — стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$ і $\operatorname{ind}(\Omega) = (k, m)$. Тоді згідно з лемою 2 $k = 0$ або $m = 0$. Якщо $k = 0$ і $m = 0$, то згідно з лемою 1 стабільний порядок Ω є відношенням рівності.

Лема 18. *Нехай Ω — стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Якщо $(\eta, \tau) \in \Omega$ і* $\operatorname{rank}(\eta) > m$, *то $\eta = \tau$.*

Доведення. Якщо $m = 0$, то згідно з лемою 1 відношення Ω є рівністю. Отже, $\eta = \tau$. Якщо ж $0 \neq m$, то за лемою 12 знову $\eta = \tau$.

Лема 19. *Нехай Ω — стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$. Якщо* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$, *де $(m \neq 0)$ і $(\eta, \tau) \in \Omega$, то $\eta \subset \tau$.*

Доведення. Якщо $\operatorname{rank}(\eta) = 0$, то $\eta = \varnothing$. Отже, $\eta \subset \tau$. Нехай тепер $\operatorname{rank}(\eta) \neq 0$. Припустимо, що $\eta \nsubseteq \tau$. Тоді існує елемент $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I(G)$ такий, що $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \eta$ і $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \notin \tau$. Оскільки $(\eta, \tau) \in \Omega$, то $\left(\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \eta, \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \tau \right) \in \Omega$ або $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \tau \right) \in \Omega$.

Якщо $x \notin \operatorname{dom}(\tau)$, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \tau = \varnothing$. Отже, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \varnothing \right) \in \Omega$, а це суперечить умові (адже $k = 0$).

Якщо ж $x \in \operatorname{dom}(\tau)$, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \circ \tau = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ (де за припущенням $z \neq y$). Отже, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right) \in \Omega$. Тому $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \right) \in \Omega$. Звідси $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \varnothing \right) \in \Omega$, що суперечить умові. Таким чином, $\eta \subseteq \tau$.

Лема 20. *Нехай Ω — стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$, причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Якщо $(\eta, \varphi) \in \Omega$, то $(\eta \circ \eta^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1}) \in \Omega$ і $(\eta^{-1} \circ \eta, \varphi^{-1} \circ \varphi) \in \Omega$.*

Доведення. Згідно з лемою 19 $\eta \subset \varphi$. Застосовуючи лему 15, одержуємо $(\eta \circ \eta^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1}) \in \Omega$. Аналогічно $(\eta^{-1} \circ \eta, \varphi^{-1} \circ \varphi) \in \Omega$.

Далі будемо розглядати стабільні порядки на інверсному моноїді $I(A_n)$, де A_n — альтернативна група, причому $n \geq 4$.

Лема 21. *Нехай* Ω *— стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Припустимо, що* $(\Delta_B, \Delta_{B^*}) \in \Omega$. *Якщо* $|B| = |X|, |B^*| = |X^*|$ *і* $X \subset X^*$, *то* $(\Delta_X, \Delta_{X^*}) \in \Omega$.

Доведення. Оскільки $(\Delta_B, \Delta_{B^*}) \in \Omega$, то згідно з лемою 19 має місце включення $\Delta_B \subset \Delta_{B^*}$. Звідси $B \subset B^*$. Нехай елемент $\alpha \in S_n$ такий, що $(X)\alpha = B$ і $(X^*)\alpha = B^*$. Розглянемо можливі випадки.

1-*й випадок*: $\alpha \in A_n$, тобто α — парна перестановка. Тоді $(\alpha \circ \Delta_B, \alpha \circ \Delta_{B^*}) \in \Omega$. Згідно з лемою 20 $(\alpha \circ \Delta_B \circ \alpha^{-1}, \alpha \circ \Delta_{B^*} \circ \alpha^{-1}) \in \Omega$. Легко перевірити, що $\alpha \circ \Delta_B \circ \alpha^{-1} = \Delta_X$ і $\alpha \circ \Delta_{B^*} \circ \alpha^{-1} = \Delta_{X^*}$. Отже, $(\Delta_X, \Delta_{X^*}) \in \Omega$.

2-*й випадок*: $\alpha \notin A_n$, тобто α — непарна перестановка.

a) Нехай $|X| \geq 2$. Тоді існують $x_1, x_2 \in X$ і $x_1 \neq x_2$. Позначимо $(x_1)\alpha$ через b_1 і $(x_2)\alpha$ через b_2. Визначимо перестановку $\xi \in S_n$ таким чином: $(x)\xi = (x)\alpha$, якщо $x \notin \{x_1, x_2\}$. Крім того, $(x_1)\xi = b_2$ і $(x_2)\xi = b_1$. Іншими словами, перестановку ξ ми одержали з перестановки α, помінявши місцями два елементи другого рядка перестановки α. Як відомо, при такій дії парність перестановки змінюється на протилежну, тобто перестановка ξ є парною. До того ж очевидно, що $(X)\xi = B$ і $(X^*)\xi = B^*$. Далі діємо так само, як і в першому випадку.

b) Нехай $|X^* - X| \geq 2$. Тоді існують $x_1, x_2 \in X^* - X$ і $x_1 \neq x_2$. Далі міркуємо так само, як і у випадку a).

c) Нехай $|X| < 2$ і $|X^* - X| < 2$. Оскільки ми припустили, що $n \geq 4$, то $|\mathbf{N} - X^*| \geq 2$ (нагадаємо, що $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). Отже, існують $a_1, a_2 \in \mathbf{N} - X^*$ і $a_1 \neq a_2$. Далі діємо так само, як і в пункті a).

Зазначимо, що при $n = 3$, тобто для інверсного моноїда $I(A_3)$, щойно доведена лема не виконується.

Лема 22. *Нехай* Ω *— стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Припустимо, що* $(\alpha, \beta) \in \Omega$. *Якщо* $\operatorname{rank}(\eta) = \operatorname{rank}(\alpha)$, $\operatorname{rank}(\tau) = \operatorname{rank}(\beta)$ *і* $\eta \subset \tau$, *то* $(\eta, \tau) \in \Omega$.

Доведення. Згідно з лемою 20 $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$. Оскільки $\eta \subset \tau$, то $\Delta_{\operatorname{dom}(\eta)} \subset \Delta_{\operatorname{dom}(\tau)}$. До того ж, $|\operatorname{dom}(\eta)| = |\operatorname{dom}(\alpha)|$ і $|\operatorname{dom}(\tau)| = |\operatorname{dom}(\beta)|$. Отже, згідно з лемою 21 $(\Delta_{\operatorname{dom}(\eta)}, \Delta_{\operatorname{dom}(\tau)}) \in \Omega$. Звідси випливає, що $(\Delta_{\operatorname{dom}(\eta)} \circ \tau, \Delta_{\operatorname{dom}(\tau)} \circ \tau) \in \Omega$. Оскільки $\Delta_{\operatorname{dom}(\eta)} \circ \tau = \eta$ і $\Delta_{\operatorname{dom}(\tau)} \circ \tau = \tau$, то $(\eta, \tau) \in \Omega$.

Лема 23. *Нехай* Ω *— стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Якщо* $(\Delta_A, \Delta_B) \in \Omega$ *і* $(\Delta_C, \Delta_F) \in \Omega$, *крім того* $|B| = |C|$, *то існує множина* $M (M \subset \mathbf{N})$ *така, що* $|M| = |F|$ *і* $(\Delta_A, \Delta_M) \in \Omega$.

Доведення. Оскільки група A_n є глобально-транзитивною і $|B| = |C|$, то існує перестановка $\varphi \in A_n$ така, що $(B)\varphi = C$. Позаяк $(\Delta_C, \Delta_F) \in \Omega$, то $(\varphi \circ \Delta_C, \varphi \circ \Delta_F) \in \Omega$. Зрозуміло, що $\operatorname{dom}(\varphi \circ \Delta_C) = B$ і $\operatorname{rank}(\varphi \circ \Delta_F) = |F|$. Згідно з лемою 19 $\varphi \circ \Delta_C \subset \varphi \circ \Delta_F$. Тепер, застосовуючи лему 15, одержуємо $(\varphi \circ \Delta_C \circ (\varphi \circ \Delta_C)^{-1}, \varphi \circ \Delta_F \circ (\varphi \circ \Delta_F)^{-1})) \in \Omega$. Оскільки $\operatorname{dom}(\varphi \circ \Delta_C) = B$, то $\varphi \circ \Delta_C \circ (\varphi \circ \Delta_C)^{-1} = \Delta_B$. Отже, $(\Delta_B, \varphi \circ \Delta_F \circ \varphi^{-1}) \in \Omega$. Крім того, $\operatorname{rank}(\varphi \circ \Delta_F \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{rank}(\varphi \circ \Delta_F) = |F|$. Оскільки відношення Ω є транзитивним, то $(\Delta_A, \varphi \circ \Delta_F \circ \varphi^{-1}) \in \Omega$. Позначимо $\operatorname{dom}(\varphi \circ \Delta_F \circ \varphi^{-1})$ через M. Очевидно, що $\Delta_M = \varphi \circ \Delta_F \circ \varphi^{-1}$. Отже, $(\Delta_A, \Delta_M) \in \Omega$.

Лема 24. *Нехай* Ω — *стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Якщо* $(\alpha, \beta) \in \Omega, (\tau, \rho) \in \Omega$, *де* $\operatorname{rank}(\alpha) = a, \operatorname{rank}(\beta) = \operatorname{rank}(\tau) = b$ *і* $\operatorname{rank}(\rho) = r$, *то* $(D_a \times D_r) \cap \omega \subset \Omega$, *де* ω — *канонічний порядок на* $I(A_n)$.

Доведення. Нехай $(\varphi, \psi) \in (D_a \times D_r) \cap \omega$, тобто $\operatorname{rank}(\varphi) = a, \operatorname{rank}(\psi) = r$ і $\varphi \subseteq \psi$. Згідно з лемою 19 $\alpha \subset \beta$ і $\tau \subset \rho$. Використовуючи лему 15, одержуємо $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$ і $(\tau \circ \tau^{-1}, \rho \circ \rho^{-1}) \in \Omega$. Позначимо $\operatorname{dom}(\alpha \circ \alpha^{-1})$ через A, тоді $\alpha \circ \alpha^{-1} = \Delta_A$. Згідно з лемою 23 існує множина R ($R \subset \mathbf{N}$) така, що $(\Delta_A, \Delta_R) \in \Omega$, причому $\operatorname{rank}(\Delta_A) = \operatorname{rank}(\alpha \circ \alpha^{-1}) = \operatorname{rank}(\alpha) = a$ і $\operatorname{rank}(\Delta_R) = \operatorname{rank}(\rho) = r$. Залишається скористатися лемою 22, щоб одержати $(\varphi, \psi) \in \Omega$.

Лема 25. *Нехай* Ω — *стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$, *причому* $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. *Якщо* $(\alpha, \beta) \in \Omega$ *і* $\operatorname{rank}(\alpha) = r, \operatorname{rank}(\beta) = r + k$ $(k \neq 0)$, *то* $(I_r \times I_{r+k}) \cap \omega \subset \Omega$, *де* ω — *канонічний порядок на інверсному моноїді* $I(A_n)$.

Доведення. По-перше, зрозуміло, що $(\{0\} \times I_m) \subset \Omega$. Далі будемо вважати, що $r \neq 0$. Згідно з лемами 19 і 20 $\alpha \subset \beta$ і $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$. Нехай $\operatorname{dom}(\alpha) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ і $\operatorname{dom}(\beta) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}\}$. Припустимо, що $\tau, \eta \in I(A_n)$, причому $\tau \subset \eta$, $\operatorname{rank}(\tau) = s$, $\operatorname{rank}(\eta) = l$ (де $s \leq r, s < l \leq r + k \leq m$). Покажемо, що $(\tau, \eta) \in \Omega$. Якщо $\operatorname{rank}(\tau) = r$ і $\operatorname{rank}(\eta) = r + k$, то згідно з лемою 22 $(\tau, \eta) \in \Omega$. Позначимо через $B_{s,t}$ множину $\{x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{r+1}, \ldots, x_{r+t}\}$, де $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \subset \operatorname{dom}(\alpha)$ і $1 \leq t \leq k$. Очевидно, $B_{s,t} \subset \operatorname{dom}(\beta)$.

Нехай $\operatorname{rank}(\tau) = r - 1$. Позаяк $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, то $(\Delta_{B_{r-1,t}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-1,t}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, де $1 \leq t \leq k$. Зрозуміло, що $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,t}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,t}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r - 1 + t$. Отже, якщо $\operatorname{rank}(\eta) = r - 1 + t$ (де $1 \leq t \leq k$), то, застосовуючи лему 22, одержуємо $(\tau, \eta) \in \Omega$. Розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank}(\eta) = r + k$. Оскільки $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, то

$$(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-1,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega. \tag{3}$$

Очевидно, що $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r$. Використовуючи співвідношення 3 і умову ($\operatorname{rank}(\alpha) = r$ і $\operatorname{rank}(\beta) = r + k$), а також лему 24, одержуємо $(\tau, \eta) \in \Omega$.

Нехай тепер $\operatorname{rank}(\tau) = r - 2$. Оскільки $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, то $(\Delta_{B_{r-2,t}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-2,t}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$. Зрозуміло, що $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-2,t}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 2$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-2,t}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r - 2 + t$. Отже, якщо $\operatorname{rank}(\eta) = r - 2 + t$ (де $1 \leq t \leq k$), то, застосовуючи лему 22, одержуємо $(\tau, \eta) \in \Omega$. Тепер розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank}(\eta) = r - 1 + k$. Оскільки $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, то

$$(\Delta_{B_{r-2,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-2,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega. \tag{4}$$

Очевидно, що $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-2,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 2$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-2,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r - 1$. Використовуючи співвідношення (4) і співвідношення

$$(\Delta_{B_{r-1,k}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-1,k}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega \tag{5}$$

(зазначимо, що $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,k}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,k}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r - 1 + k$) і застосовуючи лему 24, одержуємо $(\tau, \eta) \in \Omega$. Розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank}(\eta) = r + k$. Зрозуміло, що $(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}, \Delta_{B_{r-1,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) \in \Omega$, $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = r - 1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{B_{r-1,1}} \circ \beta \circ \beta^{-1}) = r$. Крім того, за умовою $\operatorname{rank}(\alpha) = r$ і $\operatorname{rank}(\beta) = r + k$. З огляду на леми 22 і 24 одержуємо $(D_{r-2} \times D_r) \cap \omega \subset \Omega$ і $(D_r \times D_{r+k}) \cap \omega \subset \Omega$. Звідси $(\tau, \eta) \in \Omega$.

Всі інші випадки (тобто, коли $\operatorname{rank}(\tau) = r - 3, r - 4, \ldots, 1$) обґрунтовуються аналогічно.

Тепер можемо сформулювати основний результат цього пункту.

Теорема 5. *Кожній послідовності невід'ємних цілих чисел* $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_r < l_r < < l_{r-1} < \ldots < l_1 < m \leq n$, $m \geq 1$, *на інверсному моноїді* $I(A_n)$, $n \geq 4$, *відповідає стабільний порядок* $\Sigma = (\Delta \cup (\{0\} \times I_m) \cup (I_{k_1} \times I_{l_1}) \cup (I_{k_2} \times I_{l_2}) \cup \ldots \cup (I_{k_r} \times I_{l_r})) \cap \omega$ *(де* ω *— канонічний порядок на* $I(A_n)$.

Будь-який відмінний від відношення рівності стабільний порядок на $I(A_n)$, *індекс якого дорівнює* $(0, m)$, *має таку форму.*

Доведення. Спочатку покажемо, що бінарне відношення Σ є стабільним відношенням порядку. Рефлексивність і антисиметричність відношення Σ є очевидними. Покажемо його транзитивність. Нехай $(\alpha, \beta) \in (I_{k_i} \times I_{l_i}) \cap \omega$ і $(\beta, \xi) \in (I_{k_j} \times I_{l_j}) \cap \omega$. Припустимо, що $k_i < k_j < l_j < l_i$. Оскільки $\xi \in I_{l_j}$, то $\operatorname{rank}(\xi) \leq l_j < l_i$. Отже, $(\alpha, \xi) \in (I_{k_i} \times I_{l_i}) \cap \omega$. Розглянемо тепер випадок, коли $k_j < k_i < l_i < l_j$. Позаяк $\beta \in I_{k_j}$, то $\operatorname{rank}(\beta) \leq k_j$. Оскільки $\alpha \subset \beta$, то $\operatorname{rank}(\alpha) \leq k_j$. Звідси $(\alpha, \xi) \in (I_{k_j} \times I_{l_j}) \cap \omega$. Легко встановити, що порядок Σ є стабільним.

Тепер покажемо, що будь-який стабільний порядок (відмінний від рівності) на інверсному моноїді $I(A_n)$ має форму Σ. Отже, нехай Ω — стабільний порядок на інверсному моноїді $I(A_n)$, причому $\operatorname{ind}(\Omega) = (0, m)$. Нагадаємо (див. лему 1), якщо $m = 0$, то Ω є відношенням рівності. Далі будемо вважати, що $m \neq 0$. Серед усіх бінарних відношень, які мають форму $(I_a \times I_b) \cap \omega$ (де $0 \leq a < b \leq m$) і включаються в Ω, розглянемо максимальні: $\{0\} \times I_m$, $(I_{k_1} \times I_{l_1}) \cap \omega$, $(I_{k_2} \times \times I_{l_2}) \cap \omega, \ldots, (I_{k_r} \times I_{l_r}) \cap \omega$, де $0 < k_1 < k_2, \ldots, < k_r < l_r < l_{r-1} <, \ldots, < l_1 < m$. Тоді бінарне відношення $\Delta \cup (\{0\} \times I_m) \cup \bigcup_{i=1}^{r} ((I_{k_i} \times l_{l_i}) \cap \omega)$ збігається з Ω. Дійсно, якщо $(\tau, \zeta) \in \Omega$, де $\tau \neq \zeta, \operatorname{rank}(\tau) = t, \operatorname{rank}(\zeta) = z$, то згідно з лемою 25 $(I_t \times I_z) \cap \omega \subset \Omega$. Зрозуміло, що бінарне відношення $(I_t \times I_z) \cap \omega$ включається в деяке максимальне відношення $(I_{k_i} \times I_{l_i}) \cap \omega$. Отже, $(\tau, \zeta) \in \Omega$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Конструкція будь-якого стабільного порядку на інверсному моноїді $I(A_n)$ цілком аналогічна конструкції довільного порядку на скінченній симетричній інверсній напівгрупі $\mathcal{IS}_n$ (див. [16]), однак доведення різняться (див. лему 21), оскільки при доведенні основної теореми статті [16] неявно використано той факт, що симетрична група S_n є n-транзитивною. Як відомо, альтернативна група A_n є $(n-2)$-транзитивною.

***Зауваження* 2.** Стабільний порядок Ψ на $I(A_n)$, індекс якого $(m, 0)$, є оберненим до стабільного порядку Ψ^{-1}, індекс якого $(0, m)$.

1. *Leech J.* Inverse monoids with a natural semilattice ordering // Proc. London Math. Soc. – 1995. – **70**, № 3. – P. 146 – 182.
2. *Lipscomb S. L.* The alternating semigroups: generators and congruences //Semigroup Forum. – 1992. – **44**. – P. 96 – 106.
3. *Дереч В. Д.* Про один клас розкладних і фундаментальних інверсних моноїдів // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 6. – С. 780 – 786.
4. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
5. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
6. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
7. *Вагнер В. В.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1956. – **38**, № 2. – С. 203 – 240.
8. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 2. – С. 188 – 197.
9. *Goberstein S. M.* Fundamental order relations on inverse semigroups and on their generalizations // Semigroup Forum. – 1980. – **21**. – P. 285 – 328.

10. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical finite transformation semigroups. An introduction. – Springer-Verlag, 2009. – xii + 314 p.
11. *Цяпута Г. Ю.* Напівгрупи перетворень із деформованим множенням // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2003. – № 3. – С. 82 – 88.
12. *Дереч В. Д.* Варіанти інверсних напівгруп скінченного рангу // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 19/20. – С. 80 – 83.
13. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с; Т. 2. – 422 с.
14. *Либер А. Е.* О симметрических обобщенных группах // Мат. сб. – 1953. – **33**, № 3. – С. 531 – 544.
15. *Мальцев А. И.* Симметрические группоиды // Мат. сб. – 1952. – **31**, № 1. – С. 136 – 151.
16. *Могилевский М. Г.* Отношения порядка на симметрической инверсной полугруппе // Теория полугрупп и ее приложения. – 1974. – Вып. 3. – С. 63 – 70.

Одержано 05.06.13