УДК 517.9

Кан Ван Туат

Об устойчивости интегральных многообразий для дифференциальных систем с запаздывающим аргументом

Изучению существования и устойчивости интегральных многообразий для дифференциальных систем с запаздывающим аргументом за последние годы посвящены работы [1—4].

В настоящей работе рассматриваются существование и устойчивость интегральных многообразий дифференциальных систем с запаздывающими аргументами, имеющих решения с экспоненциальной дихотомией.

1. Пусть дана система

$$dx/dt = A(t)\,x(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\,x(t-\tau_j) + f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $j=\overline{1-m}$, —$(n \times n)$-матрицы, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant t_0$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$, $\tau_j = \mathrm{const}$, $j = \overline{1-m}$. Функция f непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условиям $f(t, 0) = 0$, $t \geqslant t_0$,

$$\| f(t, x_1(t), \ x_1(t-\tau_1), \ldots, x_1(t-\tau_m)) - f(t, x_2(t), x_2(t-\tau_1), \ldots, x_2(t -$$

$$- \tau_m)) \| \leqslant l \sum_{j=0}^{m} \| x_1(t-\tau_j) - x_2(t-\tau_j) \|, \qquad \tau_0 = 0,$$

где $l > 0$ достаточно мало, если $\sum_{j=0}^{m} \| x_i(t-\tau_j) \|$, $i = 1, 2$.

Вместе с дифференциальной системой (1) будем рассматривать

$$dy/dt = A(t)\, y, \tag{2}$$

$$dg/dt = A(t)\, g(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\, g(t-\tau_j). \tag{3}$$

Множество вещественных чисел $\{\rho\}$ назовем блочным разделением матрицы $X(t, t_0) = [X_r(t, t_0), X_{n-r}(t, t_0)]$, $1 \leqslant r \leqslant n$, если при каждом числе $\rho \in \in \{\rho\}$ существуют:

а) такие числа N_ρ, что

$$\| X_r(t, s) \| \leqslant N_\rho \exp \rho(t-s), \qquad t \geqslant s; \tag{4}$$

б) такие числа M_ρ, что

$$\| X_{n-r}(t, s) \| \leqslant M_\rho \exp(-\rho(t-s)), \qquad t \leqslant s. \tag{5}$$

Система (3) называется системой, имеющей решения с экспоненциальной дихотомией, если существуют два многообразия M^+ (r-мерное) и M^- ($(n-r)$-мерное) такие, что

1) для решения $g(t)$ с начальным условием, удовлетворяющим $g(t_0) \in \in M^+$, справедлива оценка

$$\| g(t) \| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s)) \||\, g(s) \||, \qquad s \leqslant t \tag{6}$$

(C зависит только от $\nu_1 > 0$);

2) для решения $g(t)$ с начальным условием $g(t_0) \in M^-$ справедлива оценка

$$\| g(t) \| \leqslant \overline{C} \exp(\nu_2(t-s)) \||\, g(s) \||, \qquad s \geqslant t \tag{7}$$

($\overline{C}$ зависит только от $\nu_2 > 0$),

$$\||\, g(t) \|| = \sup_{t-\tau_m \leqslant \xi \leqslant t} \| g(\xi) \|.$$

Теорема 1. *Пусть*

1) *система* (2) *имеет фундаментальную матрицу* $X(t, t_0)$ ($X(t_0, t_0) = E$), *удовлетворяющую* (4), (5) *при всех* r, $1 \leqslant r \leqslant n$, *и*

$$\inf_t G(X)/(G(X_r)\, G(X_{n-r})) = \mu > 0, \tag{8}$$

где $G(X)$ — *детерминант Грама матрицы* X [5];

2) *система* (3) *имеет решения с экспоненциальной дихотомией относительно пары чисел* $\nu_1, \nu_2 \in \{\rho\}$;

3)

$$\sum_{i=1}^{m} \sup_t \| B_i(t) \| < \eta a \exp(-b\tau_m)/(C(2 + a\tau_m)), \tag{9}$$

где $0 < \eta < 1$, C — *постоянная, определенная в* (6);

$$a = \min(\nu_1 - \alpha, \nu_2 - \alpha), \qquad 0 < \alpha < \min(\nu_1, \nu_2),$$

$$b = \max\{D, \nu_1, \nu_2\},$$

$$D = \sup_t \| A(t) \|.$$

Тогда:

а) *существует многообразие* S^r (*r-мерное*)

$$v = \psi(t, u), \tag{10}$$

удовлетворяющее условиям

$$\psi(t, 0) = 0,$$
$$\| \psi(t, \bar{u}) - \psi(t, \bar{\bar{u}}) \| \leqslant C_0 l \||| \bar{u} - \bar{\bar{u}} \||| \exp(-\alpha(t - t_0)) \tag{11}$$

(C_0 — *некоторая положительная постоянная*);

б) *для решения* $x(t)$ *системы* (1) *с начальным условием, удовлетворяющим уравнению* (10) *при* $t = t_0$, *справедлива оценка*

$$\| x(t) \| \leqslant (C + \varepsilon) \exp(-\alpha(t - t_0)) \||| x(t_0) \|||, \qquad t \geqslant t_0, \tag{12}$$

где ε — *некоторое положительное постоянное число.*

Доказательство. Согласно условию 1) [5] систему (2) с помощью преобразования Ляпунова можно привести к системе с треугольной блочной матрицей. Для упрощения выкладок допустим, что система (2) имеет треугольную блочную матрицу

$$A(t) = \operatorname{diag}[A_r(t), \ A_{n-r}(t)]. \tag{13}$$

Следовательно, ее фундаментальная система решений имеет вид

$$X(t, t_0) = \operatorname{diag}[X_r(t, t_0), X_{n-r}(t, t_0)]. \tag{14}$$

Поэтому систему (1) можно представить в виде

$$du/dt = A_r(t) u(t) + \sum_{j=1}^{m} [B_j^{(11)}(t) u(t - \tau_j) + B_j^{(12)}(t) v(t - \tau_j)] +$$
$$+ f_r(t, x(t), x(t - \tau_1), \ldots, x(t - \tau_m)), \ dv/dt = A_{n-r}(t) v(t) + \tag{15}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} [B_j^{(21)}(t) u(t - \tau_j) + B_j^{(22)}(t) v(t - \tau_j)] +$$
$$+ f_{n-r}(t, x(t), x(t - \tau_1), \ldots, x(t - \tau_m)),$$

где

$$B_j(t) = \begin{bmatrix} B_j^{(11)} & B_j^{(12)} \\ B_j^{(21)} & B_j^{(22)} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_r \\ f_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Наряду с системой (15) будем рассматривать систему интегральных уравнений

$$u = X_r(t, s) p + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t X_r(t, t_1) [B_j^{(11)}(t_1) u(t_1 - \tau_j) +$$
$$+ B_j^{(12)}(t_1) v(t_1 - \tau_j)] dt_1 + \int_s^t X_r(t, t_1) f_r(t_1, x(t_1), x(t_1 - \tau_1), \ldots, x(t_1 - \tau_m)) dt_1, \tag{16}$$
$$v = -\sum_{j=1}^{m} \int_t^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1) [B_j^{(21)}(t_1) u(t_1 - \tau_j) + B_j^{(22)}(t_1) v(t_1 - \tau_j)] dt_1 -$$
$$- \int_t^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1) f_{n-r}(t_1, x(t_1), x(t_1 - \tau_1), \ldots, x(t_1 - \tau_m)) dt_1,$$

где $X = \operatorname{diag}[X_r, X_{n-r}]$ — фундаментальная система решений системы (2), p — r-мерный постоянный вектор. Так как система имеет решения с экспоненциальной дихотомией относительно пары чисел ν_1, ν_2, то

$$\Big\| X_r(t,s)\,p + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t X_r(t,t_1)\,[B_j^{(11)}(t_1)\,u(t_1-\tau_j) +$$

$$+ B_j^{(12)}(t_1)\,v(t_1-\tau_j)]\,dt_1 \Big\| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s))\,|||\,x(s,p)\,|||, \quad t \geqslant s, \tag{17}$$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} \int_t^{+\infty} X_{n-r}(t,t_1)\,[B_j^{(21)}(t_1)\,u(t_1-\tau_j) + B_j^{(22)}(t_1)\,v(t_1-\tau_j)]\,dt_1 \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant C \exp(-\nu_1(t-s))\,|||\,x(s,p)\,|||, \quad t \geqslant s, \ (x(t_0,p)=p).$$

Методом последовательных приближений найдем решения системы (16).

Пусть $\varphi(t)$, $t \in [t_0-\tau_m, t_0]$ — такая начальная функция решения $x(t)$, что $\varphi(t_0)=p$ и $\sup\|\varphi(t)\|$, $t_0-\tau_m \leqslant t \leqslant t_0$, — достаточно малая величина. Тогда, полагая $u_k(t)=\varphi(t)$, $v_k=0$, $k \geqslant 0$, имеем

$$\|x_k\| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s))\,|||\,x(s)\,|||, s, t \in [t_0-\tau_m, t_0], \qquad s \leqslant t, \tag{18}$$

и

$$u_0 = X_r(t,s)\,p, \quad v_0 = 0, \qquad t \geqslant s \geqslant t_0.$$

Далее находим

$$\|x_0\| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s))\,|||\,x(s,p)\,|||, \tag{19}$$

$$u_k = X_r(t,s)\,p + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t X_r(t,t_1)\,[B_j^{(11)} u_{k-1}(t_1-\tau_j) + B_j^{(12)} v_{k-1}(t_1-t_j)]\,dt_1 +$$

$$+ \int_s^t X_r(t,t_1)\,f_r(t_1, x_{k-1}(t_1), s_{k-1}(t_1-\tau_1), \ldots, x_{k-1}(t_1-\tau_m))\,dt_1,$$

$$\tag{20}$$

$$v_k = -\sum_{j=1}^{m} \int_t^{+\infty} X_{n-r}(t,t_1)\,[B_j^{(21)} u_{k-1}(t_1-\tau_j) + B_j^{(22)} v_{k-1}(t_1-\tau_j)]\,dt_1 -$$

$$- \int_t^{+\infty} X_{n-r}(t,t_1)\,f_{n-r}(t_1, x_{k-1}(t_1), x_{k-1}(t_1-\tau_1), \ldots, x_{k-1}(t_1-\tau_m))\,dt_1, \quad k \geqslant 1.$$

Методом индукции докажем, что

$$\|x_k(t,p)\| \leqslant (C+\varepsilon) \exp(-\alpha(t-s))\,|||\,x(s,p)\,|||, \qquad t \geqslant s, \tag{21}$$

для любых p, если l достаточно мало́.

Зная, что нулевое приближение верно, допустим, что верно и $(k-1)$-е приближение. Анализируя k-е приближение, видим, что

$$\|u_k\| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s))\,|||\,x(s,p)\,||| + lC(C+\varepsilon)\,|||\,x(s,p)\,||| \times$$

$$\times \int_s^t \exp(-\nu_1(t-t_1)) \exp(-\alpha(t_1-s))\,dt_1 + \sum_{i=1}^{m} lC \exp b\tau_j \times$$

$$\times \Big[C \int_{s-\tau_i}^{s} \exp(-\nu_1(t-t_1)) \exp(-\nu_1(t_1-s))\,|||\,x(s,p)\,|||\,dt_1 +$$

$$+ (C+\varepsilon) \int_s^t \exp(-\nu_1(t-t_1)) \exp(-\alpha(t_1-s))\,|||\,x(s,p)\,|||\,dt_1 \Big].$$

Следовательно,

$$\|u_k\| \leqslant \exp(-\alpha(t-s))\,|||\,x(s,p)\,||| \times$$

$$\times \Big[C + l \sum_{i=0}^{m} C\,(C\tau_j + (\varepsilon + C)/(\nu_1-\alpha) \exp b\tau_j \Big]. \tag{22}$$

Аналогично имеем

$$\| v_k \| \leqslant C \exp(-\nu_1 (t-s)) \||| x(s,p) \||| +$$

$$+ lC(C+\varepsilon) \||| x(s,p) \||| \int_s^t \exp(-\nu_2(t-t_1)) \exp(-\alpha(t_1-s))\, dt_1 +$$

$$+ l \sum_{j=1}^{m} \int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| X_{n-r}(t, t_1+\tau_j) \| \| x_{k-1}^{(j)}(t_1) \| \, dt_1 \quad (x_{k-1}^{(j)} = x_{k-1}(t-\tau_j)),$$

или

$$\| v_k \| \leqslant C \exp(-\nu_1(t-s)) \||| x(s,p) \||| + lC(C+\varepsilon)/(\nu_2+\alpha) \times$$

$$\times \exp(-\alpha(t-s)) \||| x(s,p) \||| + l \sum_{j=1}^{m} \mathbb{R}_j,$$

$$\mathbb{R}_j = \int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| X_{n-r}(t, t_1+\tau_j) \| \| x_{k-1}^{(j)}(t_1) \| \, dt_1.$$

При $t-s \geqslant \tau_j$ имеем

$$\mathbb{R}_j \leqslant \int_{t-\tau_j}^{+\infty} C \exp(\nu_2(t-t_1-\tau_j))(C+\varepsilon) \exp(-\alpha(t_1-s)) \||| x(s,p) \||| \, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant C(C+\varepsilon)(\exp \alpha\tau_j)(\nu_2+\alpha)^{-1} \exp(-\alpha(t-s)) \||| x(s,p) \|||.$$

При $0 \leqslant t-s \leqslant \tau_j$ имеем

$$\mathbb{R}_j \leqslant \int_{t-\tau_j}^{s} C^2 \exp(\nu_2(t-t_1-\tau_j)) \exp(-\alpha(t_1-s)) \||| x(s,p) \||| \, dt_1 +$$

$$+ \int_s^{+\infty} C(C+\varepsilon) \exp(\nu_2(t-t_1-\tau_j)) \exp(-\alpha(t_1-s)) \||| x(s,p) \||| \, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant (C^2 \exp \alpha\tau_j + C(C+\varepsilon))(\nu_2+\alpha)^{-1} \exp(-\alpha(t-s)) \||| x(s,p) \|||.$$

Таким образом, во всех случаях выполняется неравенство

$$\mathbb{R}_j \leqslant (C^2 + C(C+\varepsilon))(\nu_2+\alpha)^{-1} \exp(\nu_2\tau_j) \exp(-\alpha(t-s)) \||| x(s,p) \|||.$$

Следовательно,

$$\| v_k \| \leqslant \exp(-\alpha(t-s)) \||| x(s,p) \||| \times$$

$$\times \Big[C + l \sum_{j=0}^{m} (C^2 + C(C+\varepsilon))(\nu_2+\alpha)^{-1} \exp(b\tau_j). \tag{23}$$

Если выбрать l достаточно малым, чтобы

$$\begin{gathered} l \sum_{j=0}^{m} (C^2\tau_j + (C(C+\varepsilon)))\, a^{-1} \exp b\tau_j < \varepsilon, \\ l \sum_{j=0}^{m} (C^2 + C(C+\varepsilon))\, a^{-1} \exp b\tau_j < \varepsilon, \end{gathered} \tag{24}$$

то неравенство (21) можно получить из (22) и (23).

Докажем, что

$$\| x_k(t, \bar{x}(s,p)) - x_k(t, \bar{\bar{x}}(s,p)) \| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_0 \exp(-\alpha(t-s)) \||| \bar{x}(s,p) - \bar{\bar{x}}(s,p) \|||. \tag{25}$$

Для этого требуется доказать неравенства

$$\| u_k (t, \overline{x} (s, p)) - u_k (t_2 \overline{\overline{x}} (s, p)) \| \leqslant C_0 ||| \overline{x} (s, p) - \overline{\overline{x}} (s, p) ||| \times \\ \times \exp (-\alpha (t-s)), \tag{26}$$

$$\| v_k (t, \overline{x} (s, p)) - v_k (t, \overline{\overline{x}} (s, p)) \| \leqslant lC_0 ||| \overline{x} (s, p) - \overline{\overline{x}} (s, p) ||| \exp (-\alpha (t-s)),$$

где

$$C_0 = C \left(1 - \left[\eta + l \sum_{j=0}^{m} 2C (\tau_j + (1+M_j) a^{-1}) \exp (b\tau_j)\right]\right)^{-1}, \; M_0 = 0, \tag{27}$$

при выбранной величине l такой, что

$$\eta + l \sum_{j=0}^{m} 2C (\tau_j + (1+M_j) a^{-1}) \exp b\tau_j < 1, \tag{28}$$

а $\overline{x} (t_0, p) = \overline{p}$, $\overline{\overline{x}} (t_0, p) = \overline{\overline{p}}$.

Неравенства (26) могут быть доказаны методом индукции. Докажем равномерную сходимость функциональных последовательностей u_k, v_k (и, следовательно, последовательностей x_k) при $t \geqslant t_0$, $k \to +\infty$. Для этого докажем неравенство

$$\| x_{k+1} (t, s, p) - x_k (t, s, p) \| \leqslant C\delta^k \exp (-\alpha (t-s)) ||| x (s, p) |||, \tag{29}$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\| u_{k+1} (t, s, p) - u_k (t, s, p) \| \leqslant C\delta^k \exp (-\alpha (t-s)) ||| x (s, p) |||, \\ &\| v_{k+1} (t, s, p) - v_k (t, s, p) \| \leqslant C\delta^k \exp (-\alpha (t-s)) ||| x (s, p) |||, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$x (t, s, x (s, p)) = x (t, s, p), \;\; \delta = \eta + l \sum_{j=0}^{m} 2C (\tau_j + (1+M_j) a^{-1}) \exp (b\tau_j). \tag{31}$$

Неравенства (29) и (30) тоже доказываются методом индукции с учетом формулы (28).

Полагая, что

$$x (t, s, p) = \begin{bmatrix} u (t, s, p) \\ v (t, s, p) \end{bmatrix} = \lim_{k \to +\infty} x_k (t, s, p),$$

имеем

$$\| x (t, s, p) \| \leqslant (C + \varepsilon) \exp (-\alpha (t-s)) ||| x (s, p) |||, \qquad t \geqslant s, \tag{32}$$

и

$$\| x (t, s, \overline{p}) - x (t, s, \overline{\overline{p}}) \| \leqslant 2C_0 ||| \overline{x} (s, p) - \overline{\overline{x}} (s, p) ||| \exp (-\alpha (t-s)), \tag{33}$$

$$\| v (t, s, \overline{p}) - v (t, s, \overline{\overline{p}}) \| \leqslant lC_0 ||| \overline{x} (s, p) - \overline{\overline{x}} (s, p) ||| \exp (-\alpha (t-s)). \tag{34}$$

Очевидно, что для какого-нибудь p последовательность функций x_k (t, s, p) сходится к решению рассматриваемой системы.

Подставляя $t = s = t_0$ в систему (16), имеем

$$u (t_0, t_0, p) = p,$$

$$v (t_0, t_0, p) = - \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} X_{n-r} (t_0, t_1) [B_j^{(21)} (t_1) u (t_1 - \tau_j, t_0, p) + \\ + B_j^{(22)} (t_1) v (t_1 - \tau_j; t_1, p)] dt_1 -$$

$$- \int_{t_0}^{+\infty} X_{n-r} (t_0, t_1) f_{n-r} (t_1, x (t_1, t_0, p), x (t_1 - \tau_1, t_0, p), \ldots, x (t_1 - \tau_m, t_0, p)) dt_1.$$

Поэтому из доказанного, подставив $v(t, t_0, u) = \psi(t, u)$, видим, что функция $\psi(t, u)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

Замечания.

1. Многообразие S^r, определенное формулой (10), единственно.

2. Заменив t на $-t$, аналогичными рассуждениями можно получить:

а) существование $(n-r)$-мерного многообразия S^{n-r},

$$u = \chi(t, v), \tag{35}$$

удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} \chi(t, 0) = 0, \\ \| \chi(t, \bar{v}) - \chi(t, \bar{\bar{v}}) \| \leqslant C^* l \, \||\, \bar{v} - \bar{\bar{v}} \,\|| \exp(-\alpha^*(t - t_0)), \end{gathered} \tag{36}$$

где $t \leqslant t_0$, C^* — положительная постоянная, $0 < \alpha^* < \min(\nu_1, \nu_2)$;

б) оценку для решения системы (1), имеющего начальную точку в многообразии S^{n-r}:

$$\| x(t) \| \leqslant (\bar{C} + \varepsilon) \exp(-\alpha^*(s - t)) \||\, x(s) \,\||, \qquad t < s, \tag{37}$$

где $\bar{C}$ — постоянная из (7), $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число.

2. Исследуем устойчивость интегрального многообразия. Покажем, что все многообразия, определенные в теореме 1, интегральные. Для этого нужно доказать, что любое решение системы (1) с начальной точкой, лежащей вне S^r, не ограничено при $t \to +\infty$.

Лемма. *Пусть имеют место все условия теоремы 1.*

Тогда для каждого p и фиксированного t_0 система интегральных уравнений (16) *имеет единственное решение, ограниченное при $t \geqslant t_0$.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что при $t \geqslant t_0$ система (16) имеет два ограниченных решения

$$x_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

Перепишем систему (16) в виде

$$\begin{gathered} u = X_r(t, t_0)\, p + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1)\, B_j^{(r)}(t_1)\, x(t_1 - \tau_j)\, dt_1 + \\ + \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1)\, f_r(t_1, x(t_1), x(t_1 - \tau_1), \ldots, x(t_1 - \tau_m))\, dt_1, \\ v = -\sum_{j=1}^{m} \int_{t}^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1)\, B_j^{(n-r)}(t_1)\, x(t_1 - \tau_j)\, dt_1 - \\ - \int_{t}^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1)\, f_{n-r}(t_1, x(t_1), x(t_1 - \tau_1), \ldots, x(t_1 - \tau_m))\, dt_1. \end{gathered} \tag{38}$$

Рассмотрим

$$u_1 - u_2 = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1)\, B_j^{(r)}(t_1)\, [x_1(t_1 - \tau_j) - x_2(t_1 - \tau_j)]\, dt_1 + \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1)\, [f_r^{(1)} -$$

$$- f_r^{(2)}]\, dt_1, \; (f_r^{(i)} = f_r(t_1, x_i(t_1), x_i(t_1 - \tau_1), \ldots, x_i(t_1 - \tau_m)), \quad i = 1, 2.$$

Согласно условиям теоремы 1 имеем:

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \| B_j \| \int_{t_0 - \tau_j}^{t} C \exp(-\nu_1(t - t_1)) \exp D\tau_j \, \| x_1 - x_2 \| \, dt_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{m} lC\int_{t_0}^{t}\exp(-\nu_1(t-t_1))\exp D\tau_j\|x_1-x_2\|dt_1\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{m} C\exp(D-\nu_1)\tau_j\nu_1^{-1}(\|B_j\|+l)\sup_t\|x_1-x_2\|. \tag{39}$$

Аналогично находим

$$\|v_1-v_2\|\leqslant\sum_{j=0}^{m} C\nu_2^{-2}(\|B_j\|+l)\sup_t\|x_1-x_2\|. \tag{40}$$

Из формул (9), (39) и (40) находим

$$\sup_t\|x_1-x_2\|\leqslant[\eta(\exp(-\nu_1\tau_m)+\exp(-b\tau_m))(2+a\tau_m)^{-1}+$$

$$+lC_m(\exp(b\tau_m-\nu_1\tau_1)+1)a^{-1}\sup_t\|x_1-x_2\|.$$

Положим

$$\theta=\eta(\exp(-\nu_1\tau_m)+\exp(-b\tau_m))(2+a\tau_m)^{-1}+lC_m\times$$
$$\times(\exp(b\tau_m-\nu_1\tau_1)+1)a^{-1}. \tag{41}$$

Выбирая достаточное малое l таким, чтобы $\theta<1$, из неравенства $\sup_t\|x_1-x_2\|\leqslant\theta\sup_t\|x_1-x_2\|$, видим, что $\sup_t\|x_1-x_2\|=0\Rightarrow x_1=x_2$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.*

Тогда любое решение системы 1, начальная точка которого при $t=t_0$ лежит вне многообразия S^r, не ограничено при $t\to+\infty$.

Доказательство. Пусть при $t=t_0$ $x_0\notin S^r$. Предположим обратное, т. е. что решение $x(t)$ ограничено при $t\geqslant t_0$. Полагая

$$x=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},$$

имеем

$$u=X_r(t,t_0)u_0+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}X_r(t,t_1)B_j^{(r)}(t_1)x(t_1-\tau_j)dt_1+$$

$$+\int_{t_0}^{t}X_r(t,t_1)f_r(t_1,x(t_1),x(t_1-\tau_1),\dots,x(t_1-\tau_m))dt_1, \tag{42}$$

$$v=X_{n-r}(t,t_1)q-\sum_{j=1}^{m}\int_{t}^{+\infty}X_{n-r}(t,t_1)B_j^{(n-r)}(t_1)x(t_1-\tau_j)dt_1-$$

$$-\int_{t}^{+\infty}X_{n-r}(t,t_1)f_{n-r}(t,x(t_1),x(t_1-\tau_1),\dots,x(t_1-\tau_m))dt_1,$$

где постоянный вектор q определяется из равенства

$$q=v_0+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{+\infty}X_{n-r}(t_0,t_1)B_j^{(n-r)}(t_1)x(t_1-\tau_j)dt_1+$$

$$+\int_{t_0}^{+\infty}X_{n-r}(t_0,t_1)f_{n-r}(t_1,x(t_1),x(t_1-\tau_1),\dots,x(t_1-\tau_m))dt_1. \tag{43}$$

Из ограниченности решения при $t\geqslant t_0$ и условия (5) можно получить сходимость и ограниченность несобственных интегралов (42). Далее имеем: $X_{n-r}(t,s)X_{n-r}(s,t)=E$. Отсюда

$$\|X_{n-r}(t,s)\|\geqslant\|X_{n-r}(s,t)\|^{-1}>Q^{-1}\exp\nu_2(t-s),$$

где Q — положительная постоянная, $t \geqslant s$. В силу последней оценки заключаем, что $v(t)$ ограничено только в случае, когда $q = 0$, а поэтому решение удовлетворяет системе (16) при $p = u_0$. Согласно лемме эта система имеет единственное решение, ограниченное при $t \geqslant t_0$. Значения t_0, u_0, v_0 удовлетворяют уравнению (10), т. е. $x_0 \in S^r$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.

Тогда интегральное многообразие S^r, определенное уравнением (10), *устойчиво. Иными словами, пусть $x(t, t_0, x_0)$— решение системы, удовлетворяющей начальным условиям $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$, $x_0 = x(t_0) = \varphi(t_0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, $\sup\limits_{t_0 - \tau_m \leqslant t \leqslant t_0} \|\varphi(t)\|$ — достаточно малая величина. Положим*

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{bmatrix} u(t, t_0, x_0) \\ v(t, t_0, x_0) \end{bmatrix}.$$

Тогда будет существовать решение

$$\tilde{x}(t, t_0, p) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(t, t_0, p) \\ \tilde{v}(t, t_0, p) \end{bmatrix},$$

где p — r-мерный постоянный вектор, лежащее в S^r такое, что

$$\|u(t, t_0, x_0) - \tilde{u}(t, t_0, p)\| \to 0, \quad \|v(t, t_0, x_0) - \tilde{v}(t, t_0, p)\| \to 0 \tag{44}$$

при $t \to +\infty$.

Доказательство. В пространстве (t, x) рассмотрим функцию $\tilde{x} = \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}(t_0)) = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ при

$$\tilde{u} = X_r(t, t_0)\tilde{x}_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1)[B_j^{(11)} u(t_1 - \tau_j, t_0, \tilde{x}_0) +$$

$$+ B_j^{(12)} v(t_1 - \tau_j, t_0, \tilde{x}_0)]\, dt_1 + \int_{t_0}^{t} X_r(t, t_1) f_r(t_1, x(t_1, t_0, \tilde{x}_0), \ldots)\, dt_1,$$

$$\tilde{v} = - \sum_{j=1}^{m} \int_{t}^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1)[B_j^{(21)} u(t_1 - \tau_j, t_0, \tilde{x}_0) + B_j^{(22)} v(t_1 - \tau_j, t_0, \tilde{x}_0)]\, dt_1 -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} X_{n-r}(t, t_1) f_{n-r}(t_1, x(t_1, t_0, \tilde{x}_0), \ldots)\, dt_1, \tag{45}$$

удовлетворяющую условиям $\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t)$ для $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$, $\sup\limits_{t_0 - \tau_m \leqslant t \leqslant t_0} \|\tilde{\varphi}(t)\|$ — достаточно малая величина,

$$\tilde{x}_0 = \tilde{\varphi}(t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 = \psi(t_0, \tilde{u}_0) \end{bmatrix}, \tag{46}$$

где $\tilde{u}_0$ — постоянный r-мерный вектор, $\tilde{v}_0 = \psi(t_0, \tilde{u}_0)$ — $(n - r)$-мерный вектор, удовлетворяющий уравнению (10) для $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$.

Очевидно, что функции (45), удовлетворяющие условиям (46), являются решением системы (1). Это решение лежит в S^r, определенном уравнением (10). Надо доказать, что

$$\|x(t, t_0, x_0) - \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)\| \to 0 \tag{47}$$

при $t \to +\infty$. Используя в системе (15) преобразование $y = u - \tilde{u}$, $g = v - \tilde{v}$, получим

$$dy/dt = A_r(t)\,y(t) + \sum_{j=1}^{m}[B_j^{(11)}y(t-\tau_j) + B_j^{(12)}g(t-\tau_j)] + F_r, \tag{48}$$

$$dg/dt = A_{n-r}(t)\,g(t) + \sum_{j=1}^{m}[B_j^{(21)}y(t-\tau_j) + B_j^{(22)}g(t-\tau_j)] + F_{n-r},$$

где

$$F = \begin{cases} F_r = f_r(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots) - f_r(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau_1), \ldots), \\ F_{n-r} = f_{n-r}(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots) - f_{n-r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau_1), \ldots). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что система (48) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому существует многообразие $\tilde{S}^r$,

$$g = \tilde{\psi}(t, y, \tilde{u}_0), \tag{49}$$

удовлетворяющее условиям

$$\tilde{\psi}(t, 0, \tilde{u}_0) = 0,$$

$$\|\tilde{\psi}(t, \bar{y}, \tilde{u}_0) - \tilde{\psi}(t, \bar{\bar{y}}, \tilde{u}_0)\| \leqslant Kl\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| \exp(-\alpha(t-t_0)), \quad K \geqslant C_0. \tag{50}$$

Более того, для решения системы (48) с начальной функцией, удовлетворяющей уравнению (49) при $t = t_0$, $y = y_0$, $g = \tilde{\psi}(t_0, y_0, \tilde{u}_0)$ имеет место оценка

$$\begin{gathered} \|y(t)\| \leqslant \tilde{C}\,|||y_0|||\exp(-\alpha(t-t_0)), \\ \|g(t)\| \leqslant \tilde{C}\,|||\tilde{\psi}(t_0, y_0, \tilde{u}_0)|||\exp(-\alpha(t-t_0)) \end{gathered} \tag{51}$$

при $t \geqslant t_0$, где $\tilde{C}$ — некоторая положительная постоянная.

Можно показать, что решения $x(t, t_0, x_0)$ и $y(t)$, $g(t)$ системы (48) при $t \geqslant t_0$ удовлетворяют равенствам

$$y(t) = u(t, t_0, x_0) - \tilde{u}(t, t_0, \tilde{x}_0), \quad g(t) = v(t, t_0, x_0) - \tilde{v}(t, t_0, \tilde{x}_0). \tag{52}$$

Тогда из (51) будет следовать, что (52) справедливо только при $t = t_0$. В самом деле, полагая $t = t_0$, получаем

$$y_0 = u_0 - \tilde{u}_0, \quad \tilde{\psi}(t_0, y_0, \tilde{u}_0) = v_0 - \psi(t_0, \tilde{u}_0). \tag{53}$$

В силу (53) y_0 полностью определена. Теорема доказана.

Замечания.

3. Интегральное многообразие S^r асимптотически устойчиво в целом.

4. Аналогично можно доказать, что интегральное многообразие системы (1) тоже асимптотически устойчиво в целом.

1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
2. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 5, с. 611—620.
3. *Фодчук В. И.* Интегральные многообразия для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 5, с. 798—808.
4. *Ордынская З. П.* К вопросу о дихотомии решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 3, с. 394—399.
5. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман А. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.

Ханойский пед. ин-т, Вьетнам

Поступила в редакцию 06.09.82