УДК 517.947

*А. Г. Лавер, Н. Р. Сиденко*

# Асимптотика решения периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами

Будем изучать поведение при $\varepsilon \to 0$ решения краевой задачи

$$\varepsilon \partial u^\varepsilon/\partial t - \overline{\partial}(a_{ij}(x, t, \varepsilon^{-1}x)\partial u^\varepsilon/\partial x_j)/\partial x_i + a_0(x, t, \varepsilon^{-1}x)u^\varepsilon =$$
$$= f(x, t, \varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon), \quad x \in \Omega, \quad t \in R, \tag{1}$$
$$u^\varepsilon(x, t+T) = u^\varepsilon(x, t), \quad u^\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0,$$

где $\Omega$ — ограниченная область в $R^n$ с границей $\Gamma$, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до $n$, $\overline{\partial}/\partial x_i$ — вариационные производные, $T = \mathrm{const} > 0$, имея в виду, что выполняются условия

$$a_{ij}(x, t, y)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0|\xi|^2, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_0 \geqslant 0 \quad \forall \xi, \quad y \in R^n,$$
$$x \in \Omega, \quad t \in R; \quad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

Коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ и функция $f(x, t, y, u)$, $u \in R$, периодические по $y \in R^n$ с параллелепипедом периодичности $Y = \prod_{i=1}^{n}(0, y_i^0)$ и по $t$ с периодом $T$ (обозначения: $a_{ij}(x, t, \cdot) \in \mathscr{T}(Y)$, $a_{ij}(x, \cdot, y) \in \mathscr{T}(0, T)$ и т. д.).

1. Предполагаем, что данные задачи удовлетворяют условиям: 1) $\Omega$ — липшицева область; 2) коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ определены, измеримы и ограничены на $\Omega \times R \times R^n$, причем равномерно периодичны по $t$ с периодом $T$ и по $y$ — с параллелепипедом $Y$, и удовлетворяют условиям (2); 3) для почти всех (п. в.) $(t, y) \in (0, T) \times Y$, $\forall x \in \Omega$ существуют измеримые ограниченные производные $\partial a_{ij}(x, t, y)/\partial x_i$, $\partial a_{ij}/\partial y_i$, $\partial a_{ij}/\partial t$, $\partial a_0/\partial t$.

Функция $f(x, t, y, u)$: 4) $\forall u \in R$ измерима по $(x, t, y) \in \Omega \times R \times R^n$; 5) $\forall (x, u) \in \Omega \times R$ равномерно периодична по $t$ с периодом $T$ и по $y$ — с параллелепипедом $Y$; 6) равномерно непрерывна по $(x, u)$ на каждом ограниченном множестве $\{x \in \Omega, |u| < M\}$, причем равномерно относительно п. в. $(t, y) \in (0, T) \times Y$; 7) всюду в $\Omega \times (0, T) \times Y \times R$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, t, y, u)| \leqslant f_0(x, t) + c|u|^r, \quad f_0 \in L_{2r}(Q_T), \quad c = \mathrm{const},$$
$$Q_T = \Omega \times (0, T), \quad 1 < r < (n+1)/(n-1); \tag{3}$$

8) не возрастает по $u$ $\forall (x, t, y) \in \Omega \times (0, T) \times Y$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1) — 8). *Тогда при* $\varepsilon \neq 0$ *задача* (1) *имеет единственное решение* $u^\varepsilon \in \overset{0}{H}{}^1_T = \{u \in H^1(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T) \mid u|_\Gamma = 0\}$.

Доказательство. Положив $f^\varepsilon(u)(x, t) = f(x, t, \varepsilon^{-1}x, u(x, t))$, определяем оператор суперпозиции, действующий в силу условий 4), 6), 7) [1] из пространства $L_p(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$, $p = 2r$, в пространство $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$. Определим линейный оператор $A_\varepsilon$ на множестве

$$D(A_\varepsilon) = \{u \in \overset{0}{H}{}^1_T \mid \bar{\partial}(a^\varepsilon_{ij}(x, t)\,\partial u/\partial x_j)/\partial x_i \in L_2(Q_T)\},$$

$$a^\varepsilon_{ij}(x, t) \equiv a_{ij}(x, t, \varepsilon^{-1}x), \quad a^\varepsilon_0(x, t) \equiv a_0(x, t, \varepsilon^{-1}x),$$

совпадающий с левой частью уравнения (1) и действующий в пространство $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$. Ввиду (2) имеем неравенство

$$(A_\varepsilon u, u) \geqslant \alpha_0 \| u \|^2_{L_2(0, T; \overset{0}{H}{}^1(\Omega))}, \tag{4}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(Q_T)$. Следовательно, справедлива оценка

$$\| u \|_{L_2(0, T;\, \overset{0}{H}{}^1(\Omega))} \leqslant \alpha_0^{-1} \| A_\varepsilon u \|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leqslant c_1 \alpha_0^{-1} \| A_\varepsilon u \|_{L_2(Q_T)},$$

$$c_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Умножая равенство (1) скалярно в $L_2(Q_T)$ на $\partial u/\partial t$ и используя условия теоремы и неравенство Коши с малым $\nu$, получаем оценку

$$(1 - \nu/2) \| \partial u/\partial t \|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant (2\nu)^{-1} \| A_\varepsilon u \|^2_{L_2(Q_T)} + c_2 \| u \|^2_{L_2(0, T; \overset{0}{H}{}^1(\Omega))}. \tag{6}$$

В силу условий 2), 3) и оценок (5), (6) множество $D(A_\varepsilon)$ плотно в $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$, а область значений $A_\varepsilon$ совпадает с $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $A_\varepsilon^{-1} : L_2(Q_T) \cap \cap\, \mathscr{T}(0, T) \to D(A_\varepsilon)$, где $D(A_\varepsilon)$ рассматривается как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{D(A_\varepsilon)} = (u, v)_{\overset{0}{H}{}^1_T} + (\bar{\partial}(a^\varepsilon_{ij}\partial u/\partial x_j)/\partial x_i, \quad \bar{\partial}(a^\varepsilon_{ij}\partial v/\partial x_j)/\partial x_i).$$

Так что задаче (1) эквивалентно функциональное уравнение $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon)$ в $L_p(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$, разрешимость которого доказывается с помощью принципа Лере — Шаудера [2]. С этой целью рассматриваем уравнение с параметром $\alpha \in [0, 1]$

$$u^\varepsilon_\alpha = \alpha A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha). \tag{7}$$

В силу непрерывности $A_\varepsilon^{-1}$, ограниченности и непрерывности оператора суперпозиции, оператор в правой части (7) непрерывен по $(\alpha, u)$ на $[0, 1] \times \times (L_p(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T))$. Далее, поскольку вложение $H^1(Q_T) \subset L_p(Q_T)$ компактно, $A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u)$ — компактное преобразование $L_p(Q_T) \to L_p(Q_T)$. Умножив скалярно в $L_2(Q_T)$ уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon_\alpha = \alpha f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha)$ на $u^\varepsilon_\alpha |u^\varepsilon_\alpha|^{p-2}$, получаем

$$(p - 1) \int\limits_{Q_T} a^\varepsilon_{ij}(x, t)(\partial u^\varepsilon_\alpha/\partial x_j)(\partial u^\varepsilon_\alpha/\partial x_i) |u^\varepsilon_\alpha|^{p-2} + (p-1)^{-1} a^\varepsilon_0(x, t) |u^\varepsilon_\alpha|^p]\, dxdt =$$

$$= \alpha \int\limits_{QT} f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha) u^\varepsilon_\alpha |u^\varepsilon_\alpha|^{p-2} dxdt \leqslant \alpha \int\limits_{Q_T} f^\varepsilon(0) u^\varepsilon_\alpha |u^\varepsilon_\alpha|^{p-2} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \| f^\varepsilon(0) \|_{L_p(Q_T)} \| u^\varepsilon_\alpha \|^{p-1}_{L_p(Q_T)}.$$

С другой стороны, используя неравенство Пуанкаре, имеем

$$\int\limits_{Q_T} |u|^{p-2} |\nabla_x u|^2\, dxdt \geqslant \nu_0 p^{-2} \int\limits_{Q_T} |u|^p dxdt, \quad \nu_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Следовательно,

$$\| u_\alpha^\varepsilon \|_{L_p(Q_T)} \leqslant c_3 p^2 (p-1)^{-1} \| f^\varepsilon (0) \|_{L_p(Q_T)} \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{8}$$

Таким образом, для уравнения (7) выполнены все условия принципа Лере — Шаудера, и задача (1) имеет решение в $D(A_\varepsilon) \subset \overset{\circ}{H}{}^1_T$. Это решение единственно в $L_2(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$, поскольку

$$\alpha_0 \| u^\varepsilon - u_1^\varepsilon \|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \leqslant (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(u_1^\varepsilon),\ u^\varepsilon - u_1^\varepsilon) \leqslant 0.$$

Теорема доказана.

**2**. Исследуем поведение решения при $\varepsilon \to 0$. С этой целью определим функцию $\hat{u}(x, t)$ как решение гомогенизированной задачи [3]

$$-\partial (q_{ij}(x, t)\, \partial \hat{u}/\partial x_j)/\partial x_i + \bar{a}_0(x, t)\, \hat{u} = \bar{f}(x, t, \hat{u}),\ \hat{u}|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{a}_0(x, t) = [a_0(x, t, \cdot)],\ \bar{f}(x, t, u) \equiv \bar{f}(u)(x, t) = [f(x, t, \cdot, u)], \\ q_{ij} = [a_{ij}(x, t, \cdot) - a_{ik}(x, t, \cdot)\, \partial \chi^j(x, t, \cdot)/\partial y_k], \quad [u(x, t, \cdot)] = \\ = |Y|^{-1} \int_Y u(x, t, y)\, dy. \end{gathered} \tag{10}$$

Функции $\chi^k(x, t, y)$, $k = \overline{1, n}$, $(x, t) \in \Omega \times R$, определяются как решение задачи

$$\partial (a_{ij}(x, t, y)\, \partial (\chi^k - y_k)/\partial y_j)/\partial y_i = 0, \quad \chi^k(x, t, \cdot) \in V^\perp(Y), \tag{11}$$

где

$$V(Y) = H^1(Y) \cap \mathscr{T}(Y), \quad V^\perp(Y) = \{v \in V(Y) \mid [v] = 0\}.$$

Задача (11) имеет единственное решение, которое является ограниченной периодической по $t$ с периодом $T$ абстрактной функцией от $(x, t)$ со значениями в $V^\perp(Y)$. Задача (9) имеет единственное решение в $L_2(0, T; \overset{0}{H}{}^1(\Omega))$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим случай кусочно-гладких коэффициентов $a_{ij}$. Пусть $\overline{Y} = \bigcup_{i=1}^{s} \overline{Y}_i$, где $s \in N$, $Y_i$ — области с границами $\partial Y_i$, $\partial Y_i \setminus \partial Y \in C^2$. Обозначим $\vec{W}{}^l_q(Y) = \dot{+}_{i=\overline{1,s}} W^l_q(Y_i)$, $\vec{C}{}^1(Y) = \dot{+}_{i=\overline{1,s}} C^1(Y_i)$, $C^1_l(Y) = \vec{C}{}^1(Y) \cap C^0(Y)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и следующие*: 1²) *коэффициенты* $a_{ij}$, $a_0$ *равномерно непрерывны по* $x$; 2²) $a_{ij}(x, t, \cdot) \in C^0(Q_T; \vec{W}{}^1_\infty(Y))$, $\partial a_{ij}/\partial x_l \in C^0(Q_T; \vec{W}{}^1_{q_0}(Y))$, $q_0 > n$; 3²) *для п. в.* $(t, y)$, $\forall (x, u) \in \Omega \times R$ *существует измеримая производная* $f_t$, *удовлетворяющая оценке*

$$|f_t(x, t, y, u)| \leqslant f_1(x, t) + c|u|^r, \quad f_1 \in L_2(Q_T); \tag{12}$$

4²) *для п. в.* $(t, y)$ *и* $\forall x \in \Omega$ *функция* $f$ *абсолютно непрерывна по* $u$.

*Тогда при* $\varepsilon \to 0, \varepsilon \neq 0$, *решение* $u^\varepsilon \to \hat{u}$ *слабо в* $\overset{\circ}{V}_T = H^1(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)) \cap \mathscr{T}(0, T)$.

Доказательство проводим методом работы [3]. Обозначая $p_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon \partial u^\varepsilon/\partial x_j$, ввиду (2), (3) имеем равномерные оценки

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \leqslant c_4 \| f_0 \|_{L_2(Q_T)}, \quad \| p_i^\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant c_5 = \text{const} \quad \forall \varepsilon. \tag{13}$$

Выводя из (1) уравнение для разностного отношения $v_h^\varepsilon = h^- [u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)]$ и учитывая условия 3), 8), 4²) [4], получаем неравенство

$$\| v_h^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \leqslant c_6 \int\limits_0^1 (\| f_t(x, t+\tau h, \varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon(x, t)) \|^2_{L_2(Q_T)} + \| u^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))}) d\tau.$$

Используя условие 3²), периодичность функций по $t$ и оценки (8) и (13), из последнего неравенства получаем

$$\| v_h^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \leqslant c_6 (2 \| f_1 \|^2_{L_2(Q_T)} + 2c^2 \| u^\varepsilon \|^p_{L_p(Q_T)} + \| u^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))}) \leqslant$$
$$\leqslant c_7 (\| f_1 \|^2_{L_2(Q_T)} + \| f_0 \|^p_{L_p(Q_T)} + \| f_0 \|^2_{L_2(Q_T)}) \quad \forall \varepsilon, h. \tag{14}$$

Из (3), (13), (15) непосредственно вытекает, что имеет место равномерная оценка

$$\| u^\varepsilon \|_{\overset{\circ}{V}_T} \leqslant c_8 \quad \forall \varepsilon \tag{15}$$

и можно выделить такие подпоследовательности, по-прежнему обозначенные $u^\varepsilon$, $p_i^\varepsilon$, $f^\varepsilon(u^\varepsilon)$, что $u^\varepsilon \to u$ в $\overset{\circ}{V}_T$ слабо, $p_i^\varepsilon \to p_i$, $\partial p_i^\varepsilon / \partial x_i \to \partial p_i / \partial x_i$, $f^\varepsilon(u^\varepsilon) \to F$ в $L_2(Q_T)$ слабо. Поскольку вложение $\overset{\circ}{V}_T \subset L_p(Q_T)$ компактно, имеем

$$\| u^\varepsilon - u \|_{L_p(Q_T)} \to 0. \tag{16}$$

Переходя в уравнении (1) к слабому пределу в пространстве $L_2(Q_T)$, когда для определенности $\varepsilon \to +0$, получаем

$$- \partial p_i / \partial x_i + \bar{a}_0 u = F. \tag{17}$$

Покажем, что $F = \bar{f}(u)$. В силу условия (8)

$$0 \geqslant (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(w),\ u^\varepsilon - w) \qquad \forall w \in C^0(Q_T). \tag{18}$$

Используя (16) и условия 7), 8), переходим к пределу по $\varepsilon$:

$$0 \geqslant (F - \bar{f}(w),\ u - w).$$

Последнее неравенство справедливо $\forall w \in L_p(Q_T)$ ввиду непрерывности оператора $\bar{f}(u): L_p(Q_T) \to L_2(Q_T)$. Положив $w = u - \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in L_p(Q_T)$, получаем $(F - \bar{f}(u - \lambda v), v) \leqslant 0$. Следовательно, устремив $\lambda \to +0$, имеем $(F - \bar{f}(u), v) \leqslant 0$ $\forall v \in L_p(Q_T)$, откуда $F = \bar{f}(u)$.

Согласно [5], $\forall q < \infty$ и заданного $q_0 > n$ справедливы включения

$$\chi^k(x, t, y) \in C^0(Q_T;\ \vec{W}^2_q(Y)) \cap C^0(Q_T \times Y) \subset C^0(Q_T;\ C^1_l(Y)),$$
$$\partial \chi^k(x, t, y)/\partial x_l \in C^0(Q_T;\ \vec{W}^2_{q_0}(Y)) \cap C^0(Q_T \times Y) \subset C^0(Q_T;\ C^1_l(Y)), \quad l = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Далее, подобно тому, как это сделано в работе [3], доказываем, что $p_i = q_{ij} \partial u / \partial x_j$. Для этого уравнение (1) умножаем в $L_2(Q_T)$ на $\varphi(x, t) W_k^\varepsilon$, где $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q_T)$— произвольная функция, $W_k(x, t, y) = y_k - \chi^k(x, t, y)$, $W_k^\varepsilon(x, t) = x_k - \varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x)$, а равенство

$$\partial (a_{ij}^\varepsilon \partial W_k / \partial y_j |_{y=\varepsilon^{-1}x}) / \partial x_i = \{\partial (a_{ij}(x, t, y) \partial W_k / \partial y_j) / \partial x_i\}_{y=\varepsilon^{-1}x}$$

умножаем на $\varphi u^\varepsilon$, в результате чего приходим к равенству

$$\varepsilon (\partial u^\varepsilon / \partial t,\ \varphi W_k^\varepsilon) + (p_i^\varepsilon,\ W_k^\varepsilon \partial \varphi / \partial x_i) + \varepsilon (p_i^\varepsilon,\ \varphi \partial W_k / \partial x_i |_{y=\varepsilon^{-1}x}) -$$
$$- (a_{ij}^\varepsilon \partial W_k / \partial y_j |_{y=\varepsilon^{-1}x},\ u^\varepsilon \partial \varphi / \partial x_i) - (\{\partial (a_{ij} \partial W_k / \partial y_j) / \partial x_i\}_{y=\varepsilon^{-1}x},\ \varphi u^\varepsilon) +$$
$$+ (a_0^\varepsilon u^\varepsilon,\ \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon),\ \varphi W_k^\varepsilon). \tag{20}$$

Используя условие 2²) и свойства (16), (19), переходим в (20) к пределу по $\varepsilon \to +0$:

$$(p_i,\ x_k \partial\varphi/\partial x_i) - ([a_{ij}\partial W_k/\partial y_j],\ u\partial\varphi/\partial x_i) - (\partial [a_{ij}\partial W_k/\partial y_j]/\partial x_i + \varphi u) + \\ + (\bar{a}_0 u,\ \varphi x_k) = (\bar{f}(u),\ \varphi x_k). \tag{21}$$

Из сравнения (21) с (17) следует доказываемое равенство. При $\varepsilon \to -0$ результат тот же. Таким образом, $u \in \mathring{V}_T$ — решение задачи (9). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из условий теоремы 2 с учетом (19) имеем $q_{ij}$, $\partial q_{ij}/\partial x_l$, $\bar{a}_0 \in C^0(Q_T)$. Так как $\bar{f}(\hat{u}) \in L_2(Q_T)$, то из (9) при дополнительном условии $\Gamma \in C^2$ следует [6], что $\hat{u} \in L_2(0, T;\ H^2(\Omega)) \cap \mathring{V}_T$.

**3.** Вводя следующий член асимптотики $u^\varepsilon$ в виде

$$\chi^\varepsilon(x, t, \varepsilon^{-1}x) = -\varepsilon\chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x)\,\partial\hat{u}(x, t)/\partial x_k, \tag{22}$$

покажем, что при некоторых дополнительных условиях на данные $z^\varepsilon = u^\varepsilon - \hat{u} - \chi^\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(0, T;\ H^1(\Omega))$, когда $\varepsilon \to 0$. С этой целью для $n \geqslant 2$ докажем следующее утверждение.

Л е м м а. *Пусть* $\hat{u} \in L_2(0, T;\ W_s^2(\Omega))$, *где* $s > n-1$, $\Gamma \in C^2$, *а функции* $\chi^k$ *удовлетворяют условиям* (19). *В этих условиях при* $\varepsilon \to 0$ *справедлива оценка*

$$\| \chi^\varepsilon |_\Gamma \|_{L_2(0,T;W_s^{1-1/s}(\Gamma))} = O(\varepsilon^\nu), \quad 0 < \nu < 1 - (n-1)/s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду (19) очевидно, что $\chi^\varepsilon|_\Gamma \in L_2(0, T;\ W_s^{1-1/s}(\Gamma))$. Для $\Gamma \in C^2$ имеем

$$\| \chi^\varepsilon \|_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} = \| \chi^\varepsilon \|_{L_s(\Gamma)} + \langle\langle \chi^\varepsilon \rangle\rangle_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)},$$

$$\langle\langle \chi^\varepsilon \rangle\rangle_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} = \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{2-n-s} | \chi^\varepsilon(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \\ - \chi^\varepsilon(x', t, \varepsilon^{-1}x') |^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/s}. \tag{23}$$

Очевидно, что $\| \chi^\varepsilon \|_{L_2(0,T;L_s(\Gamma))} = O(\varepsilon)$. Оценим полунорму в (23) следующим образом:

$$\langle\langle \chi^\varepsilon \rangle\rangle_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} \leqslant \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{2-n-s}\ | \partial\hat{u}(x, t)/\partial x_k - \partial\hat{u}(x', t)/\partial x_k |^s \times \\ \times | \varepsilon\chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) |^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/s} + \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | \partial u(x', t)/\partial x_k |^s | x - x' |^{2-n-s} \times \\ \times | \varepsilon\chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon\chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x') |^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/s} \equiv I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \tag{24}$$

В силу условий (19) справедливо неравенство

$$\| I_1^\varepsilon \|_{L_2(0,T)} \leqslant c_9 | \varepsilon | \| \hat{u} \|_{L_2(0,T;W_s^2(\Omega))}.$$

К интегралу $I_2^\varepsilon$ применим неравенство Гельдера с показателями $p_1 = \tilde{p}/s$, $q_1 = (n-1)/(s-1)$, где $\tilde{p} = (n-1)s/(n-s)$, $W_s^{1-1/s}(\Gamma) \subset L_{\tilde{p}}(\Gamma)$. Имеем

$$| I_2^\varepsilon | \leqslant | \Gamma |^{1/\tilde{p}} \Big\{ \Big( \int_\Gamma | \partial\hat{u}(x', t)/\partial x_k |^{\tilde{p}} d\sigma_{x'} \Big)^{s/\tilde{p}} \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} | \varepsilon\chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \\ - \varepsilon\chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x') |^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/q_1} \Big\}^{1/s} \leqslant c_{10} \| \hat{u} \|_{W_s^2(\Omega)} \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | \dots |^{sq_1} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/q_1} \Big\}^{1/s} \leqslant$$

$$\leqslant c_{11} \| \hat{u} \|_{W^2_{s}(\Omega)} \sum_{k=1}^{n} \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | \dots |^{sq_1} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/sq_1}. \tag{25}$$

Интеграл в (25) оцениваем так же, как в случае неравенства (24):

$$\Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} | \varepsilon\chi^k (x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon\chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x') |^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/sq_1} \leqslant$$

$$\leqslant \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} | \varepsilon\chi^k (x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon\chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x) |^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/sq_1} +$$

$$+ \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | x - x' |^{(2-n-s)q_1} | \varepsilon\chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon\chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x') |^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/sq_1} \equiv$$

$$\equiv I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon.$$

Интеграл $I_3^\varepsilon = O(\varepsilon)$ при $(n-2) q_1 < n - 1$, т. е. при $s > n - 1$. Ввиду условий (19) интеграл $I_4^\varepsilon$ оценим так:

$$| I_4^\varepsilon | \leqslant c_{12} | \varepsilon |^{\delta/sq_1} \Big( \iint_{\Gamma\Gamma} | \varepsilon^{-1}x - \varepsilon^{-1}x' |^{\delta - sq_1} | \chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x) -$$

$$- \chi^k (x', t, \varepsilon^{-1}x') |^{sq_1 - \delta} | x - x' |^{(2-n)q_1 - \delta} d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/sq_1}, \tag{26}$$

где $0 < \delta < q_1 (s - n + 1)$. Из (26) следует, что $I_4^\varepsilon = O(\varepsilon^{\delta/sq_1})$ при $s > n - 1$. Таким образом,

$$\| I_2^\varepsilon \|_{L_2(0,T)} \leqslant c_{13} | \varepsilon |^{\delta/sq_1} \| \hat{u} \|_{L_2(0,T; W^2_{s}(\Omega))}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, причем в условии (3) $f_0 \in L_p(0, T; L_{ps/2}(\Omega))$, где $s > n - 1$ для $n \geqslant 3$, $s = 2$ для $n = 1,2$, а граница $\Gamma \in C^2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\| z^\varepsilon \|_{L_2(0,T; H^1(\Omega))} \to 0.$$

Доказательство. Обозначая

$$a^\varepsilon (u, v) = \int_{Q_T} [a_{ij}^\varepsilon (\partial u/\partial x_j) (\partial v/\partial x_i) + a_0^\varepsilon uv] \, dx dt, \; u, v \in L_2 (0, T; H^1 (\Omega)),$$

рассмотрим интеграл $B^\varepsilon = a^\varepsilon (z^\varepsilon, z^\varepsilon)$:

$$B^\varepsilon = a^\varepsilon (u^\varepsilon, u^\varepsilon) - 2a^\varepsilon (u^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon) + a^\varepsilon (\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon). \tag{27}$$

При этом $z^\varepsilon \in L_2 (0, T; H^1 (\Omega))$ ввиду свойств (19) функций $\chi^k$ и замечания Используя уравнение (1), перепишем равенство (27):

$$B^\varepsilon = (f^\varepsilon (u^\varepsilon), u^\varepsilon) - 2 (f^\varepsilon (u^\varepsilon), \hat{u}) + 2\varepsilon (\partial u^\varepsilon/\partial t, \hat{u}) - 2a^\varepsilon (u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) +$$

$$+ a^\varepsilon (\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon). \tag{28}$$

В силу формулы

$$\partial (\hat{u} + \chi^\varepsilon)/\partial x_j = \partial\hat{u}/\partial x_j - (\partial \chi^k / \partial y_j) (\partial\hat{u}/\partial x_k) -$$

$$- \varepsilon [(\partial \chi^k/\partial x_j) (\partial\hat{u}/\partial x_k) + \chi^k \partial^2 \hat{u}/\partial x_j \partial x_k], \tag{29}$$

вычисляя последний интеграл в (28), получаем

$$a^\varepsilon (\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon) = \int_{Q_T} \{ [a_{kl}^\varepsilon - a_{ik}^\varepsilon \partial \chi^l / \partial y_i - a_{lj}^\varepsilon \partial \chi^k / \partial y_j +$$

$$+ a_{ij}^\varepsilon (\partial \chi^k / \partial y_j) (\partial \chi^l / \partial y_i)] (\partial\hat{u}/\partial x_k) (\partial\hat{u}/\partial x_l) + a_0^\varepsilon (\hat{u})^2 \} \, dx dt + O(\varepsilon). \tag{30}$$

Функция $\hat{u}$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, учитывая ограничение на $f_0$, из задачи (9) получаем оценку, аналогичную (8):

$$\| \hat{u} \|_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))} \leqslant c_3 p^2 s^2 (ps-2)^{-1} \| f_0 \|_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))}. \tag{31}$$

Поскольку, в силу (3), справедливо неравенство

$$\| \bar{f}(\hat{u}) \|_{L_2(0,T;L_s(\Omega))} \leqslant \| f_0 \|_{L_2(0,T;L_s(\Omega))} + c \| \hat{u} \|^{p/2}_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))},$$

из (31) имеем $\bar{f}(\hat{u}) \in L_2(0, T; L_s(\Omega))$. На основании [6] отсюда следует, что $\hat{u} \in L_2(0, T; W_s^2(\Omega))$.

Выберем такую функцию $\varphi^\varepsilon \in L_2(0, T; W_s^1(\Omega))$, чтобы [7]

$$\varphi^\varepsilon |_\Gamma = \chi^\varepsilon |_\Gamma, \quad \| \varphi^\varepsilon \|_{L_2(0,T;W_s^1(\Omega))} \leqslant c_{14} \| \chi^\varepsilon |_\Gamma \|_{L_2(0,T;W_s^{1-1/s}(\Gamma))}. \tag{32}$$

Умножая уравнение (1) скалярно в пространстве $L_2(Q_T)$ на $v^\varepsilon = \chi^\varepsilon - \varphi^\varepsilon$, приходим к равенству

$$\varepsilon (\partial u^\varepsilon/\partial t, v^\varepsilon) + a^\varepsilon (u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) - a^\varepsilon (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = (f^\varepsilon (u^\varepsilon), \chi^\varepsilon) - (f^\varepsilon (u^\varepsilon), \varphi^\varepsilon). \tag{33}$$

Используя (13), (32) и лемму, получаем оценку

$$| a^\varepsilon (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) | \leqslant c_{15} \| u^\varepsilon \|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \| \varphi^\varepsilon \|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant c_{16} \| \varphi^\varepsilon \|_{L_2(0,T;W_s^1(\Omega))} = O(\varepsilon^\nu). \tag{34}$$

Аналогичная оценка справедлива для $(f^\varepsilon (u^\varepsilon), \varphi^\varepsilon)$. Таким образом, $a^\varepsilon(u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) = O(\varepsilon^\nu)$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon \to +0$ выражение (30) сходится к $\int\limits_Q [q_{ij} (\partial \hat{u}/\partial x_j)(\partial \hat{u}/\partial x_i) + \bar{a}_0 (\hat{u})^2]\, dxdt$, так что из (28) и (9) следует

$$B^\varepsilon \to (\bar{f}(\hat{u}), \hat{u}) - 2 (\bar{f}(\hat{u}), \hat{u}) + \int\limits_{Q_T} [q_{ij} (\partial \hat{u}/\partial x_j)(\partial \hat{u}/\partial x_i) + \bar{a}_0 (\hat{u})^2]\, dxdt = 0. \tag{35}$$

То же справедливо при $\varepsilon \to -0$. Из (35) имеем

$$\| \operatorname{grad} z^\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{36}$$

Так как $z^\varepsilon |_\Gamma = -\chi^\varepsilon |_\Gamma$, в силу (36) и леммы получаем при $\varepsilon \to 0$

$$\| z^\varepsilon \|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant c_{17} (\| \operatorname{grad} z^\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} + \| \chi^\varepsilon |_\Gamma \|_{L_2(\Gamma \times (0,T))}) =$$

$$= c_{17} \| \operatorname{grad} z^\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} + O(\varepsilon^\nu) \to 0.$$

Теорема доказана.


1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М. : Наука, 1966.— 496 с.
2. *Функциональный* анализ. СМБ.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
3. *Bensoussan A., Lions J.-L.* Homogeneization et perturbations singulieres.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск, 1976, № 1, с. 16—31.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
5. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Сибирск. мат. журн., 1965, 6, № 3, с. 636—669.
6. *Кошелев А. И.* Априорные оценки в $L_p$ и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Усп. мат. наук, 13, № 4, 1958, с. 29—88.
7. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— 480 с.


Ин-т матем. АН УССР, Киев
Поступила в редакцию 21.04.83