УДК 517.95

С. А. Ломов, В. Ф. Сафонов

Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора

При асимптотическом анализе решений сингулярно возмущенных задач вида

$$\varepsilon y' = A(x)\, y + h(x), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \tag{1}$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $h(x) = \{h_1, \ldots, h_n\}$ — известная вектор-функция, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in [0, a]$, особую роль играет характер спектра $\{\lambda_j(x), j = \overline{1, n}\}$ предельного оператора $A(x)$. Если спектр стабилен, т. е. $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, $i \neq j$, $\lambda_j(x) \neq 0$ $\forall x \in [0, a]$, все $\operatorname{Re} \lambda_j(x)$ не меняют знак на отрезке $[0, a]$, $i, j = \overline{1, n}$, то построение регуляризованных асимптотических решений [1] проводится по известной схеме метода регуляризации, в основе которого лежит идея выделения существенно особых многообразий задачи (1) при помощи спектра предельного оператора.

Положение значительно усложняется, когда условия стабильности спектра нарушаются. Например, уже в случае $n = 2$ [2], если $\lambda_1(x) = 0$ лишь в одной точке $x \in [0, a]$, выделение существенно особых многообразий производится не только при помощи спектра оператора $A(x)$, но и по траекториям некоторого уравнения, учитывающего влияние точечной особенности спектра (в данном случае нуля функции $\lambda_1(x)$). Переход от случая $n = 2$ задачи (1) к случаю $n > 2$ нуждается в серьезном обосновании.

В настоящей работе рассматривается простейший случай нестабильности спектра оператора $A(x)$, описываемый следующими условиями:

1) функции $A(x)$, $h(x) \in C^\infty [0, a]$; 2) $\lambda_1(x) = -xk(x)$, $k(x) > 0$ $\forall x \in [0, a]$; 3) $\operatorname{Re} \lambda_j(x) \leqslant 0$, $\lambda_j(x) \neq 0$, $j = \overline{2, n}$, $\forall x \in [0, a]$; 4) $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, $i \neq j$, $\forall x \in [0, a]$; 5) существует матрица $\mathbb{C}(x) \in C^\infty [0, a]$ такая, что при каждом $x \in [0, a]$ справедливо равенство

$$\mathbb{C}^{-1}(x)\, A(x)\, \mathbb{C}(x) = \Lambda(x) \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)).$$

Выделение существенно особых многообразий и регуляризация задачи (1) проводятся с помощью регуляризирующей системы (см. ниже систему (2)), имеющей вид «нормальной» формы. Структура этой системы такова, что она допускает применение к ней метода [1] (см. также [2, 3]). Отметим, что алгоритм построения асимптотических решений, развиваемый ниже, может быть применен к более сложным типам сингулярно возмущенных систем с нестабильным спектром. Эффективность развиваемого алгоритма находится в прямой зависимости от возможности построения регуляризованных асимптотических решений для соответствующей регуляризирующей системы.

1. Регуляризация задачи. Обозначим через $c_i(x)$ собственный вектор матрицы $A(x)$, соответствующий собственному значению $\lambda_i(x)$. Тогда матрица $\mathbb{C}(x)$ будет состоять из столбцов $c_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, а матрица $(\mathbb{C}^*(x))^{-1}$ — из столбцов $d_j(x)$, являющихся собственными векторами оператора $A^*(x)$, соответствующих собственным значениям $\overline{\lambda}_j(x)$, $j = \overline{1, n}$. При построении регуляризирующей системы важную роль играет вектор $q = \mathbb{C}^{-1}(0)\, y^0$ (в рассматриваемом случае — его первая компонента q_1). Введем вектор $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ регуляризирующих функций, удовлетворяющих системе уравнений в «нормальной» форме

$$\begin{gathered} \varepsilon u_1' = \lambda_1(x)\, u_1 + \sum_{j=0}^{m+1} g_j(x)\, \varepsilon^j, \quad u_1(0, \varepsilon) = 1, \\ \varepsilon u_j' = \lambda_j(x)\, u_j, \quad u_j(0, \varepsilon) = 1, \quad j = \overline{2, n}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $g_j(x)$ — некоторые функции класса $C^\infty[0, a]$, определяемые в процессе построения формального асимптотического решения задачи (1). При этом расширенная система, соответствующая задаче (1), принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u}\left[\Lambda(x) u + \sum_{j=0}^{m+1} g_j(x)\varepsilon^j e_1\right] - A(x)\tilde{y} = h(x), \quad \tilde{y}(0, \bar{1}, \varepsilon) = y^0, \quad (3)$$

где $\bar{1} = \{1, \ldots, 1\}$, $e_j = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$ — j-й орт в $\mathbb{C}^n$, $j = \overline{1, n}$. Если $\tilde{y} = \tilde{y}(x, u, \varepsilon)$ — решение системы (3), то его сужение $y = \tilde{y}(x, u(x, \varepsilon), \varepsilon)$ будет, очевидно, точным решением исходной задачи (1). Определяя решение задачи (3) в виде ряда

$$\tilde{y}(x, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x, u), \quad (A)$$

получаем следующие итерационные задачи:

$$\mathcal{L} y_0(x, u) \equiv (\partial y_0/\partial u)\Lambda(x) u - A(x) y_0 = -(\partial y_0/\partial u) g_0(x) e_1 + h(x), \quad (\varepsilon^0)$$

$$y_0(0, \bar{1}) = y^0;$$

$$\mathcal{L} y_1(x, u) = -(\partial y_0/\partial x) - (\partial y_0/\partial u) g_1(x) e_1 - (\partial y_1/\partial u) g_0(x) e_1, \quad (\varepsilon^1)$$

$$y_1(0, \bar{1}) = 0;$$

. . . .

$$\mathcal{L} y_{k+1}(x, u) = -(\partial y_k/\partial x) - (\partial y_0/\partial u) g_{k+1}(x) e_1 - \sum_{j=1}^{k+1} (\partial y_j/\partial u) g_{k+1-j}(x) e_1, \quad (\varepsilon^{k+1})$$

$$y_{k+1}(0, \bar{1}) = 0, \quad k \geqslant 1,$$

Построение асимптотического решения исходной задачи (1) теперь сводится к построению регуляризирующей системы (2), т. е. к вычислению функций $g_j(x)$, $j = \overline{0, m+1}$, к решению итерационных задач (ε^k) и построению точного (или асимптотического) решения системы (2).

2. Разрешимость итерационных задач. Будем предполагать пока, что $q_1 \neq 0$. Опишем класс V правых частей систем (ε^k), $k \geqslant 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $v(x, u)$ принадлежит классу V, если она представима в виде суммы*

$$v(x, u) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) u_j + v_0(x), \quad (4)$$

в которой все коэффициенты $v_j(x) \in C^\infty([0, a], \mathbb{C}^n)$. В пространстве V (при каждом $x \in [0, a]$) вводится скалярное произведение

$$\langle v^{(1)}(x, u), v^{(2)}(x, u)\rangle \equiv \langle \sum_{j=1}^{n} v_j^{(1)}(x) u_j + v_0^{(1)}(x),$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^{(2)}(x) u_j + v_0^{(2)}(x)\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} (v_j^{(1)}(x), v_j^{(2)}(x)),$$

где $(,)$ — скалярное умножение в пространстве $\mathbb{C}^n_x$. Для итерационных задач (ε^k) определим следующее пространство решений.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $v(x, u)$ является элементом пространства U, если она принадлежит пространству V и в ее представлении в виде* (4) *функция v удовлетворяет условию*

$$(v_0(x), d_1(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, a]. \quad (4')$$

Найдем решение задачи (ε^0) в пространстве U. Определяя ее решение в виде функции

$$y_0(x, u) = Y_0(x) u + y_0(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} y_j(x) u_j + y_0(x), \quad (5)$$

получаем системы

$$-A(x)y_0(x) = -Y_0(x)g_0(x)e_1 + h(x), \tag{6_0}$$

$$[\lambda_j(x)I - A(x)]y_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{6_j}$$

Системы (6_j) имеют решения в виде функции $y_j(x) = \alpha_j(x)c_j(x)$, где $c_j(x)$ — собственный вектор матрицы $A(x)$, $\alpha_j(x) \in C^\infty[0, a]$ — пока произвольные скалярные функции, $j = \overline{1, n}$. При этом система (6_0) принимает вид

$$A(x)y_0(x) = \alpha_1(x)g_0(x)c_1(x) - h(x) \equiv v_0(x). \tag{6'}$$

Предполагая, что функция $\alpha_1(x)$ не обращается в нуль на отрезке $[0, a]$, подчиним $v_0(x)$ условию (4'). Получим

$$(\alpha_1(x)g_0(x)c_1(x) - h(x), d_1(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, a].$$

Выбирая системы $\{c_i(x)\}$, $\{d_j(x)\}$ собственных векторов биортонормированными, найдем отсюда функцию $g_0(x)$:

$$g_0(x) = (h(x), d_1(x))/\alpha_1(x). \tag{7}$$

Покажем, что при таком выборе функции $g_0(x)$ система (6_0) (или эквивалентная ей система (6')) разрешима в $C^\infty([0, a], \mathbb{C}^n)$. Сделаем для этого преобразование $y_0(x) = \mathbb{C}(x)\xi$, $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. После умножения слева на $\mathbb{C}^{-1}(x)$ система (6') преобразуется к виду

$$xk(x)\xi_1 = 0,$$
$$\lambda_j(x)\xi_j = -(\mathbb{C}^{-1}(x)h(x))_j, \quad j = \overline{2, n}.$$

Отсюда видно, что единственным гладким решением системы (6_0) является функция

$$y_0(x) = \mathbb{C}(x)\{0, -f_2(x)/\lambda_2(x), \ldots, -f_n(x)/\lambda_n(x)\}, \tag{8}$$

где через $f_j(x)$ обозначена j-я компонента вектора $\mathbb{C}^{-1}(x)h(x)$. Таким образом, решение системы (ε^0) определяется в виде

$$y_0(x, u) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)c_j(x)u_j - \sum_{j=2}^{n} f_j(x)c_j(x)/\lambda_j(x), \tag{9}$$

если только $\alpha_1(x) \neq 0$ на отрезке $[0, a]$. Нетрудно видеть, что в силу (8) это решение принадлежит пространству U. Однако в (9) не найдены пока функции $\alpha_j(x)$, $j = \overline{1, n}$. Для их вычисления перейдем к задаче (ε^1). Решение этой задачи также будем определять в виде суммы

$$y_1(x, u) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)u_j + p_0(x) \equiv Y_1(x)u + p_0(x). \tag{10}$$

Подставляя (10) в систему (ε^1) и приравнивая коэффициенты, получаем системы

$$-A(x)p_0(x) = -Y_0(x)g_1(x)e_1 + h_1(x), \tag{11_0}$$

$$[\lambda_j(x)I - A(x)]p_j = -(\alpha_j(x)c_j(x))', \quad j = \overline{1, n}, \tag{11_j}$$

где принято обозначение

$$h_1(x) \equiv \left(\sum_{j=2}^{n} f_j(x)/\lambda_j(x)\right)' - Y_1(x)g_0(x)e_1.$$

Для разрешимости систем (11_j) необходимо и достаточно, чтобы

$$-\alpha_j'(x) - (c_j'(x), d_j(x))\alpha_j(x) \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Подчиняя решение (9) задачи (ε^0) условию $y(0, \overline{1}) = y^0$, при $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ будем иметь $\mathbb{C}(0)\alpha(0) = y^0 - y_0(0)$. Отсюда с учетом формулы (8) находим, что

$$\alpha_1(0) = q_1, \quad \alpha_j(0) = q_j + f_j(0)/\lambda_j(0), \quad j = \overline{2, n}.$$

Присоединяя эти значения к уравнениям (12), найдем однозначно функции $\alpha_j(x)$:

$$\alpha_1(x) = q_1 \exp\{\gamma_1(x)\}, \quad \alpha_j(x) = \alpha_j(0)\exp\{\gamma_j(x)\}, \quad j = \overline{2, n}, \tag{13}$$

где $\gamma_j = -\int\limits_0^x (c_j', d_j)\,d\tau$, $j = \overline{1, n}$. Отсюда видно, что в рассматриваемом случае ($q_1 \neq 0$) функции $\alpha_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [0, a]$, поэтому проведенные выше рассуждения законны и решение (8) задачи (ε^0) найдено в пространстве U однозначным образом.

Для полного обоснования алгоритма построения формальных решений задачи (3) в случае $q_1 \neq 0$ рассмотрим две последовательные задачи

$$\mathcal{L}y_k(x, u) = H_k(x, u), \quad y_k(0, \bar{1}) = 0, \tag{ε^k}$$

$$\mathcal{L}y_{k+1}(x, u) = H_{k+1}(x, u), \quad y_{k+1}(0, \bar{1}) = 0, \tag{ε^{k+1}}$$

где через H_k и H_{k+1} обозначены соответствующие правые части:

$$H_k = -(\partial y_{k-1}/\partial x) - \left[(\partial y_0/\partial u)\, g_k + (\partial y_k/\partial u)\, g_0 + \sum_{j=1}^{k-1} (\partial y_j/\partial u)\, g_{k-j}\right] e_1,$$

$$H_{k+1} = -(\partial y_k/\partial x) - \left[(\partial y_0/\partial u)\, g_{k+1} + (\partial y_{k+1}/\partial u)\, g_0 + \sum_{j=1}^{k} (\partial y_j/\partial u)\, g_{k-j+1}\right] e_1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $q_1 \neq 0$, выполнены условия 1)—5) и $H_k\ (x, u)$ — известная функция пространства U. Пусть, кроме того, задачи (ε^0), ..., ..., (ε^{k-1}) однозначно разрешимы в пространстве U.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Для разрешимости системы (ε^k) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имели место условия*

$$\langle H_{k+1}(x, u),\ d_j(x)\, u_j\rangle \equiv 0, \quad j = 1, n, \quad \forall x \in [0, a]. \tag{14}$$

2. *Для однозначной разрешимости задачи (ε^k) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы функция $H_{k+1}(x, u) \in V$, выполнялись условия (14), а также условия*

$$\langle H_{k+1}(x, u),\ d_j(x)\, u_j\rangle \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall x \in [0, a]. \tag{15}$$

Доказательство. Необходимость условий (14) очевидна. Перейдем к доказательству достаточности этих условий. Обозначим

$$h_k(x, u) \equiv -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial y_j}{\partial u}\, g_{k-j} e_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} h_j^{(k)} u_j + h_0^{(k)}. \tag{16}$$

Теперь задачу (ε^k) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}y_k(x, u) = -(\partial y_0/\partial u)\, g_k e_1 - (\partial y_k/\partial u)\, g_0 e_1 + h_k(x, u), \quad y_k(0, \bar{1}) = 0. \tag{17}$$

Будем определять решение системы (17) в виде функции (4). Подставляя (4) в (17) и приравнивая коэффициенты, получаем системы

$$-A(x)\, v_0(x) = -\alpha_1(x)\, g_k(x)\, c_1(x) - g_0(x)\, v_1(x) + h_0^{(k)}(x), \tag{18_0}$$

$$[\lambda_j(x)\, I - A(x)]\, v_j(x) = h_j^{(k)}(x), \quad j = \overline{1, n}. \tag{18_j}$$

Из условия $H_k(x, u) \in U$ получаем тождество (см. (4′))

$$(\alpha_1(x)\, g_k(x)\, c_1(x) + g_0(x)\, v_1(x) - h_0^{(k)}(x),\ d_1(x)) \equiv 0.$$

Отсюда находим функцию $g_k(x)$:

$$g_k(x) = -g_0(x)(v_1(x) - h_0^{(k)}(x),\ d_1(x))/\alpha_1(x). \tag{19}$$

Для разрешимости систем (18_j) необходимо и достаточно, чтобы

$$(h_j^{(k)}(x),\ d_j(x)) \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall x \in [0, a]. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что эти условия эквивалентны условиям (14). При выполнении (20) системы (18_j) имеют решения

$$v_j(x) = r_j(x) c_j(x) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \frac{(\mathbb{C}^{-1}(x) h_j^{(k)}(x))_s}{\lambda_j(x) - \lambda_s(x)} c_s(x), \tag{21}$$

где $r_j(x) \in C^\infty[0, a]$ — произвольные скалярные функции, $j = \overline{1, n}$. Покажем, что система (18_0) имеет решение в классе $C^\infty([0, a], \mathbb{C}^n)$. Сделав в этой системе преобразование $v_0(x) = \mathbb{C}(x)\eta$, $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, и умножив полученные системы слева на $\mathbb{C}^{-1}(x)$, придем к уравнениям

$$-xk(x)\eta_1 = -\alpha_1(x) g_k(x) - g_0(x)(v_1(x), d_1(x)) + (h_0^{(k)}(x),\ d_1(x)),$$

$$-\lambda_j(x)\eta_j = -g_0(x)(v_1(x),\ d_j(x)) + (h_0^{(k)}(x),\ d_j(x)), \quad j = \overline{2, n}.$$

Подставляя сюда функции (21) и выполняя скалярное умножение, получаем уравнения (см. (19))

$$\begin{gathered} -xk(x)\eta_1 = 0, \\ -\lambda_j(x)\eta_j = -g_0(x)\frac{(\mathbb{C}^{-1}(x) h_1^{(k)}(x))_j}{\lambda_1(x) - \lambda_j(x)} + (h_0^{(k)}(x),\ d_j(x)), \quad j = \overline{2, n}. \end{gathered} \tag{22}$$

Первое уравнение имеет единственное гладкое решение $\eta_1(x) \equiv 0$. Другие уравнения, очевидно, также имеют единственные решения в классе $C^\infty[0, a]$. Таким образом, при выполнении условий (14) система (ε^k) имеет решение

$$y_k(x, u) = \sum_{j=1}^{n}\left[r_j(x) c_j(x) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \frac{(\mathbb{C}^{-1}(x) h_j^{(k)}(x))_s}{\lambda_j(x) - \lambda_s(x)} c_s(x)\right] u_j + \sum_{j=2}^{n} \eta_j(x) c_j(x), \tag{23}$$

где $r_j(x) \in C^\infty[0, a]$ — пока произвольные скалярные функции, $\eta_j(x)$ — функции, определяемые однозначным образом из (22). Поскольку последняя сумма в (23) не содержит вектора $c_1(x)$, то она ортогональна вектору $d_1(x)$, и, значит, функция $y_k(x, u) \in U$. Первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй части покажем, что при выполнении условий (15) решение (23) системы (ε^k) определяется в классе U однозначно.

Учитывая, что в выражении для H_{k+1} от переменной u зависит только первое слагаемое, подчиним H_{k+1} условию (15), подставив в H_{k+1} предварительно функцию (23). Имеем

$$-r'_j(x) - (c'_j(x),\ d_j(x)) r_j(x) - l_j(x) = 0,$$

где $l_j(x) \in C^\infty[0, a]$ — известные функции, $j = \overline{1, n}$. Присоединяя к этим уравнениям начальные условия $r_j(0) = r_j^0$, найденные из уравнения $y_k(0, \overline{1}) = 0$, определим однозначно функции $r_j(x)$:

$$r_j(x) = \exp\{\gamma_j(x)\}\left[r_j^0 + \int_0^x \exp\{-\gamma_j(\tau)\} l_j(\tau)\, d\tau\right], \quad j = \overline{1, n}.$$

Подставляя их в (23), найдем однозначно решение задачи (ε^k) в классе U. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 была доказана в предположении $q_1 \neq 0$. Покажем, что случай $q_1 = 0$ сводится к предыдущему. Обратимся к формуле (9). Возьмем произвольно вектор y^* и решим относительно $\alpha(0) = \{\alpha_1(0), \ldots, \alpha_n(0)\}$ уравнение $y_0(0, \bar{1}) = y^*$. Его решением будет вектор

$$\alpha(0) = \mathbb{C}^{-1}(0)\, y^* + \sum_{j=2}^{n} \frac{(\mathbb{C}^{-1}(0)\, h(0))_j}{\lambda_j(0)}\, e_j.$$

Отсюда видно, что первая компонента вектора $\alpha(0)$ $\alpha_1(0) = (\mathbb{C}^{-1}(0)\, y^*)_1$ не зависит от неоднородности $h(x)$ исходной системы (1).

Это позволяет свести случай $q_1 = (\mathbb{C}^{-1}(0)\, y^0)_1 = 0$ к предыдущему. В самом деле, в исходной системе (1) сделаем замену переменных $y(x, \varepsilon) = z(x, \varepsilon) + z^*$, где z^* — постоянный вектор. Получим сингулярно возмущенную задачу относительно функции $z(x, \varepsilon)$ с неоднородностью $\tilde{h}(x) \equiv h(x) + A(x)\, z^*$ и с начальным вектором $y^* \equiv z(0, \varepsilon) = y^0 - z^*$. Теперь для сведения случая $q_1 = 0$ к предыдущему остается подобрать вектор z^* так, чтобы первая компонента вектора $C^{-1}(0)\, y^*$ не обращалась в нуль.

3. Асимптотическая сходимость формальных решений. Применяя теорему 1, построим решения задач $(\varepsilon^0), \ldots, (\varepsilon^m)$ в пространстве U и составим частичную сумму $S_m(x, u, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon y_1 + \ldots + \varepsilon^m y_m$ ряда (A). При этом построим регуляризующую систему (2) порядка $m + 1$. Эта система имеет точное решение

$$u_1(x, \varepsilon) = \exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^x \lambda_1 d\tau\right\}\left[1 + \sum_{k=0}^{m+1} \varepsilon^{k-1}\int_0^x \exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_0^s \lambda_1 d\tau\right\} g_k(s)\, ds\right],$$
$$u_j(x, \varepsilon) = \exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^x \lambda_j d\tau\right\}, \quad j = \overline{2, n}. \tag{24}$$

Подставив его в частичную сумму $S_m(x, u, \varepsilon)$, получим функцию $y_{\varepsilon m}(x)$. Имеет место утверждение, доказываемое так же, как и аналогичное утверждение в [1, с. 68].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1)—5).

Тогда задача (1) *имеет решение* $y(x, \varepsilon)$, *удовлетворяющее при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *неравенству*

$$\| y(x, \varepsilon) - y_{\varepsilon m}(x) \|_{C[0,a]} \leqslant C_m \varepsilon^m, \tag{25}$$

где постоянная $C_m > 0$ *не зависит от* ε.

Эта теорема обосновывает алгоритм получения аисмптотического решения $y_{\varepsilon m}(x)$ задачи (1). Однако интеграл, стоящий в (24), может быть далее разложен по неотрицательным степеням параметра ε, поэтому асимптотическое решение $y_{\varepsilon m}(x)$ нельзя считать регуляризованным. Для получения такого решения нужно построить регуляризованную асимптотику первого уравнения системы (2).

4. Асимптотика «нормальной» формы. Запишем первое уравнение системы (2) в виде

$$\varepsilon u_1' = -xk(x)\, u_1 + \sum_{k=0}^{m+1} g_k(x)\, \varepsilon^k, \quad u_1(0, \varepsilon) = 1. \tag{26}$$

К этому уравнению можно применить алгоритм метода регуляризации [1], развитый по отношению к сингулярно возмущенным системам с нестабильным спектром. Модельным уравнением, описывающим сингулярности в (26), будет уравнение

$$\mathscr{T}\psi \equiv \partial\psi/\partial t + t\psi = f(x, t), \tag{27}$$

где $t = \varphi(x)/\varepsilon^\alpha$ — регуляризирующая переменная. Делая расширение задачи

(26) по этой переменной, получаем систему

$$\varepsilon(\partial v/\partial x)+\varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x)(\partial v/\partial t)+xk(x)v=\sum_{k=0}^{m+1}g_k(x)\varepsilon^k,\quad v(0,\varphi(0)/\varepsilon^k,\varepsilon)=1.$$

Разделив здесь обе части уравнения на $\varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x)$, получим

$$(\varepsilon^{\alpha}/\varphi'(x))\,\partial v/\partial x+\partial v/\partial t+(xk(x)/\varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x))\,v=\sum_{k=0}^{m+1}\varepsilon^{k+\alpha-1}g_k(x)/\varphi'(x).$$

Желая получить в качестве основного оператора оператор $\mathscr{T}$, участвующий в (27), положим $\varphi\varphi'/\varepsilon^{\alpha}=xk(x)/\varepsilon^{1-\alpha}$. Разделяя переменные, найдем, что $\alpha=1/2$, а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению $\varphi\varphi'=xk(x)$. Возьмем одно из гладких решений этого уравнения, удовлетворяющее условию $\varphi(0)=0$:

$$\varphi(x)=+\left(2\int_0^x\tau k(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}.$$

При этом регуляризирующая переменная

$$t=+\left(2/\varepsilon\int_0^x\tau k(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}$$

стремится к $+\infty$ при $\varepsilon\to+0$. «Расширенная» задача принимает вид

$$(\mu/\varphi')\,\partial v/\partial x+\mathscr{T}v=\sum_{k=0}^{m+1}\mu^{2k-1}g_k(x)/\varphi'(x),\quad v(0,0,\mu)=1,\tag{28}$$

где $\mu=\varepsilon^{1/2}$. Будем определять решение задачи (28) в виде ряда

$$v(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k v_k(x,t).\tag{29}$$

Для коэффициентов этого ряда получим следующие задачи:

$$\mathscr{T}v_{-1}=g_0(x)/\varphi'(x),\quad v_{-1}(0,0)=0;\qquad(\mu^{-1})$$

$$\mathscr{T}v_0=-(\varphi')^{-1}\,\partial v_{-1}/\partial x,\quad v_0(0,0)=1;\qquad(\mu^0)$$

. . . .

$$\mathscr{T}v_{2k}=-(\varphi')^{-1}\,\partial v_{2k-1}/\partial x,\quad v_{2k}(0,0)=0;\qquad(\mu^{2k})$$

$$\mathscr{T}v_{2k+1}=-(\varphi')^{-1}\,\partial v_{2k}/\partial x+g_{k+1}(x)/\varphi'(x),\quad v_{2k+1}(0,0)=0;\qquad(\mu^{2k+1})$$

. . . .

Здесь $g_k(x)\equiv 0$ при $k>m+1$.

Каждую из задач (μ^k) можно записать в виде

$$\mathscr{T}v(x,t)\equiv\partial v/\partial t+tv=h(x,t),\quad v(0,0)=v^0.\tag{30}$$

Решение этой задачи будем определять в классе функций Z, представимых в виде

$$v(x,t)=\delta_0(x)\exp\{-t^2/2\}+\delta_1(x)\,p(t),\tag{31}$$

где $\delta_0(x)$, $\delta_1(x)\in C^{\infty}[0,a]$, а функция $p(t)$ — образ единицы некоторой степени интегрального оператора

$$\mathcal{K}\equiv\int_0^t\exp\{1/2\,(s^2-t^2)\}\,[\cdot]\,ds,$$

т. е. существует некоторое неотрицательное число l такое, что $p(t)=K^l\,1$; при этом $K^0=I$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция* $h(x,t) = h_0(x)\exp\{-1/2t^2\} + h_1(x)\times \times q(t) \in Z$.

Тогда для разрешимости уравнения (30) *в классе* Z *необходимо и достаточно, чтобы*

$$h_0(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, a]. \tag{32}$$

Если выполнено условие (32), *то задача* (30) *при дополнительном условии*

$$w_0(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, a],$$

где $w_0(x)$ — *коэффициент при* $\exp\{-t^2/2\}$ *в выражении*

$$w(x,t) = -(\varphi')^{-1}\partial v/\partial x + g(x)/\varphi'(x) \in Z,$$

в котором $g(x) \in C^\infty[0, a]$ — *известная функция, однозначно разрешима в классе* Z.

Доказательство этой теоремы изложено в основных чертах в [1, с. 188—189]. Отметим одно важное свойство оператора K:

$$\lim_{t\to+\infty}(\mathcal{K}^l 1/t^{-l}) = \text{const} \neq 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Это свойство легко доказывается с помощью известной формулы

$$K^l 1 = (1/(l-1)!)\exp\{-t^2/2\}\int_0^t \exp\{s^2/2\}(t-s)^{l-1}ds, \quad l \geqslant 1.$$

Используя (33), нетрудно показать, что решения итерационных задач (μ^k) на сужении $t = \varphi(x)/\mu$ будут равномерно ограниченными при $(x, \mu) \in \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало́. Это позволяет построить асимптотическое решение задачи (26):

$$u_1 \equiv v_{\varepsilon N}(x) = \sum_{k=-1}^{N} \mu^k v_k(x, \varphi(x)/\mu), \tag{34}$$

где $v_k(x,t) \in Z$ — решения итерационных задач (μ^k), $k = \overline{-1, N}$. Точнее, имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (26) *функция* $k(x) \in C^\infty[0, a]$, $k(x) > 0$ $\forall x \in [0, a]$ *и все функции* $g_k(x) \in C^\infty[0, a]$.

Тогда задача (26) *имеет единственное решение* $u_1(x, \varepsilon)$, *для которого справедлива оценка*

$$\| u_1(x,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(x)\|_{C[0,a]} \leqslant C_N \mu^N, \quad N \geqslant -1,$$

где $\mu > 0$ *достаточно мало́,* $C_N > 0$ — *постоянная, не зависящая от* μ.

Используя асимптотическое решение (34) задачи (26), а также асимптотическое решение

$$y_{\varepsilon m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k y_k(x, u(x, \varepsilon)),$$

описываемое теоремой 2, можно построить регуляризованную асимптотику решения исходной задачи (1). Обозначим через $y_k(x,t) \equiv W_k(x)u + y_0^{(k)}(x)$ решение задачи (ε^k) в пространстве U, а через $\hat{u}_j$ — вектор-функцию

$$\hat{u}_j(x,\varepsilon) = \{v_j(x, \varphi(x)/\mu), \delta_{0j}\exp\{\theta_2(x)\}, \ldots, \delta_{0j}\exp\{\theta_n(x)\}\},$$

где $\theta_j(x) = \varepsilon^{-1}\int_0^x \lambda_j(\tau)\,d\tau$, δ_{0j} — символ Кронекера, $v_j(x,t)$ — решение задачи (μ^j) в классе Z. Построим функцию

$$\hat{y}_{\varepsilon m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k W_k(x) \sum_{j=-1}^{2(m-k)} \varepsilon^{j/2}\hat{u}_j(x,\varepsilon) + \sum_{k=0}^{m} y_0^{(k)}(x)\,\varepsilon^k.$$

Тогда при выполнении условий 1) — 5) и при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет иметь место оценка

$$\| y(x, \varepsilon) - y_{\varepsilon m}(x) \|_{C[0,a]} \leqslant C_1 \varepsilon^{m-1/2},$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от ε, а $y(x,\varepsilon)$ — точное решение задачи (1). Функция (35) является регуляризованным асимптотическим решением задачи (1) (порядка $m - 1/2$) в классе асимптотических рядов, выделяемых модельным уравнением (27).

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
2. *Ломов С. А.* Асимптотическое интегрирование при изменении характера спектра.— Тр. Моск. энерг. ин-та, 1978, вып. 357, с. 56—62.
3. *Губин Ю. П., Ломов С. А., Сафонов В. Ф.* Точечный резонанс в системе двух осцилляторов.— Прикл. математика и механика, 1982, **45**, вып. 3, с. 389—396.

Московск. энергет. ин-т

Поступила в редакцию 16.04.83