УДК 519.46

И. В. Протасов, Ю. В. Цыбенко

Топология Шаботи в решетке замкнутых подгрупп

Пусть G — локально компактная группа, $\mathfrak{L}(G)$ — пространство ее замкнутых подгрупп, снабженное топологией Шаботи [1]. Открытую предбазу этой топологии образуют множества $\{X \in \mathfrak{L}(G) : X \cap V \neq \varnothing\}$, $\{Y \in \mathfrak{L}(G) : Y \subseteq G \setminus K\}$, где V пробегает все открытые, а K — компактные подмножества из G. Если G компактна, топология Шаботи совпадает с E-топологией на $\mathfrak{L}(G)$ [2]. Сходимость в топологии Шаботи эквивалентна S-сходимости [3]. При этом направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, замкнутых подгрупп из GS-сходится к замкнутой подгруппе H, если

1) для любого $x \in H$ и любой окрестности U элемента x найдется такое $\beta \in J$, что $H_\alpha \cap U \neq \varnothing$ для всех $\alpha > \beta$;

2) для любого $y \notin H$ найдутся окрестность V элемента y и $\gamma \in J$ такие, что $H_\alpha \cap V = \varnothing$ для всех $\alpha > \gamma$.

Помимо топологической на $\mathfrak{L}(G)$, имеется естественная алгебраическая структура решетки с операциями $\vee$ и $\wedge$, где $A \vee B$ — наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая A и B, $A \wedge B$ — пересечение подгрупп A, B из $\mathfrak{L}(G)$. Цель данной работы — изучить согласованность этих двух структур на $\mathfrak{L}(G)$.

Группа G называется $\wedge$-группой ($\vee$-группой), если в $\mathfrak{L}(G)$ непрерывна операция $\wedge$ ($\vee$). Если в $\mathfrak{L}(G)$ непрерывны обе решеточные операции, т. е $\mathfrak{L}(G)$ — топологическая решетка, G называется S-группой.

Основной результат статьи (описание S-групп) частично анонсирован в [4].

Все рассматриваемые группы предполагаются локально компактными. Подгруппами, если особо не оговорено, мы называем лишь замкнутые подгруппы. Введем следующие обозначения: $\mathbf{T}$ —группа вращений окружности, $\mathbf{R}$ — одномерная векторная группа, $\mathbf{Z}$ — дискретная свободная циклическая группа, $\mathbf{C}_n$ — циклическая группа порядка n, $C_{p\infty}$ — дискретная квазициклическая p-группа, $\mathbf{Z}_p$ — аддитивная группа кольца целых p-адических чисел, $\mathbf{R}_p$ — аддитивная группа поля всех p-адических чисел. Топологические прямое и полупрямое произведения обозначим $\times$ и $\leftthreetimes$, $\langle \overline{X} \rangle$ — наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая подмножество X, $\pi(G)$ — множество простых чисел p, для которых G содержит нетривиальный топологический p-элемент. Элемент x топологической группы называется компактным, если $\langle \overline{x} \rangle$ компактна, и чистым, если $\langle \overline{x} \rangle \simeq Z$, где $\simeq$ — знак топологического изоморфизма. Группа G называется компактно покрываемой, если все ее элементы компактны, и индуктивно компактной, если любое конечное множество ее элементов содержится в компактной подгруппе. Вполне несвязная кампактно покрываемая группа называется периодической.

Лемма 1. *Подгруппа H и фактор-группа $\wedge$-группы ($\wedge$-группы) G по компактному нормальному делителю N являются $\wedge$-группами ($\vee$-группами).*

Доказательство следует из того, что $\mathfrak{L}(H)$ топологически изоморфна отрезку $[\langle e\rangle, H] \subseteq \mathfrak{L}(G)$, а $\mathfrak{L}(G/N)$ топологически изоморфна отрезку $[N, G] \subseteq \mathfrak{L}(G)$.

Лемма 2. *Пусть периодическая группа G равна произведению с отмеченной открытой компактной подгруппой своих подгрупп G_n, $n=1, 2, \ldots$, причем $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Если все G_n суть $\wedge$-группы ($\vee$-группы), то G — также $\wedge$-группа ($\vee$-группа).*

Доказательство. В силу [5] любая подгруппа H из G равна произведению с отмеченной открытой компактной подгруппой своих проекций на сомножители. Поэтому направленность подгрупп $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in I$, сходится к H тогда и только тогда, когда для любого натурального n направленность $\{pr_n H_\alpha\}$, $\alpha \in I$, S-сходится к $pr_n H$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 3. *Любая дискретная группа является $\wedge$-группой.*

Лемма 4. *Любая $\wedge$-группа вполне несвязна. Недискретная $\wedge$-группа периодична.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы Картана — Мальцева — Ивасавы, леммы 1 и того, что ни $\mathbf{R}$, ни $\mathbf{T}$ не являются $\wedge$-группами. Второе утверждение докажем от противного. Пусть x — чистый элемент из G. Выберем направленность $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in I$, нетривиальных компактных элементов, сходящуюся к единице. По лемме 1.1 из [3] направленность подгрупп $\{\overline{\langle xy_\alpha\rangle}\}$, $\alpha \in I$, имеет поднаправленность $\{\overline{\langle xy_\beta\rangle}\}$, $\beta \in J$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе F. Ясно, что $\overline{\langle x\rangle} \subseteq F$. В силу непрерывности $\wedge$ направленность $\{\overline{\langle x\rangle} \wedge \overline{\langle xy_\beta\rangle}\}$, $\beta \in J$, S-сходится к $\overline{\langle x\rangle} \wedge F = \overline{\langle x\rangle}$. Поскольку x — изолированная точка в $\overline{\langle x\rangle}$, найдется такое $\gamma \in J$, что $x \in \overline{\langle x\rangle} \wedge \overline{\langle xy_\gamma\rangle}$. Значит, xy_γ — чистый элемент и для некоторого целого n $x = (xy_\gamma)^n$. Отсюда следует $y_\gamma^{-1} = (xy_\gamma)^{n-1}$, что противоречит компактности y_γ.

Лемма 5. *Любой топологический p-элемент x $\wedge$-группы G централизуется некоторой окрестностью единицы.*

Доказательство. Пусть $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — полная система окрестностей единицы группы G. Направим J, полагая $\alpha > \beta$, если $H_\alpha \subset H_\beta$. Допустим, что лемма не верна, и выберем на каждой окрестности H_α элемент y_α таким, чтобы $xy_\alpha \neq y_\alpha x$. Направленность подгрупп $\{\overline{\langle xy_\alpha\rangle}\}$, $\alpha \in J$, сходится в E-топологии [2, лемма 7], а следовательно, и S-сходится к $\overline{\langle x\rangle}$. Так как G — $\wedge$-группа, направленность $\{\overline{\langle x\rangle} \wedge \overline{\langle xy_\alpha\rangle}\}$, $\alpha \in J$, S-сходится к $\overline{\langle x\rangle}$. Подгруппа $\overline{\langle x\rangle}$ конечна либо изоморфна $\mathbf{Z}_p$, значит, $\overline{\langle x\rangle}$ — изолированная точка $\mathfrak{L}(\overline{\langle x\rangle})$. Поэтому при достаточно больших α $\overline{\langle x\rangle} \subseteq \overline{\langle xy_\alpha\rangle}$ и, в частности, x и xy_α перестановочны. Это противоречие.

Лемма 6. *Компактная группа G является $\wedge$-группой тогда и только тогда, когда $G = K \rightthreetimes P$, где K — проконечная группа с конечными силовскими подгруппами, P абелева и равна тихоновскому произведению всех силовских p-подгрупп, изоморфных $\mathbf{Z}_p$, $\pi(K) \cap \pi(P) = \varnothing$ и централизатор любой силовской p-подгруппы из G имеет конечный индекс.*

Доказательство вытекает из [2, теоремы 2, 4] и совпадения в $\mathfrak{L}(G)$ E-топологии и топологии Шаботи.

Теорема 1. *Группа G является $\wedge$-группой тогда и только тогда, когда G либо дискретна, либо периодическая; любая компактная подгруппа из G суть $\wedge$-группа и централизатор любого топологического p-элемента из G открыт.*

Доказательство. Необходимость вытекает из лемм 1, 4, 5.

Покажем достаточность. Пусть G — недискретная группа, удовлетворяющая заключению теоремы. Предположим, что направленности $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$, и $\{B_\beta\}$, $\beta \in J$, подгрупп из G S-сходятся соответственно к подгруппам A и B. Убедимся, что направленность $\{A_\alpha \wedge B_\beta\}$, $(\alpha, \beta) \in I \times J$, сходится к $A \wedge B$.

1) Пусть $x \in A \wedge B$, V — открытое множество из G, содержащее x. Так как G периодична, $\overline{\langle x \rangle}$ содержит плотную подгруппу, алгебраически порожденную примарными элементами. Из $\overline{\langle x \rangle} \cap V$ выберем элемент y, равный произведению конечного числа примарных топологических элементов. По лемме 5 y централизуется некоторой открытой компактной подгруппой H. Положим $U = \overline{\langle y, H \rangle} = \langle y \rangle H$, $A'_\alpha = A_\alpha \cap U$, $B'_\beta = B_\beta \cap U$. Поскольку U — открытая подгруппа, направленности $\{A'_\alpha\}$, $\alpha \in I$, и $\{B'_\beta\}$, $\beta \in J$, S-сходятся соответственно к $A' = A \cap U$ и $B' = B \cap U$. Согласно условию U — $\wedge$-группа, значит, направленность $\{A'_\alpha \wedge B'_\beta\}$, $(\alpha, \beta) \in I \times J$, S-сходится к $A' \wedge B'$. Так как $U \cap V$ — окрестность элемента $y \in A' \wedge B'$, начиная с некоторых номеров α_0, β_0 $(A'_\alpha \wedge B'_\beta) \cap (U \cap V) \neq \varnothing$. Но тогда и подавно $(A_\alpha \wedge B_\beta) \cap V \neq \varnothing$ при $\alpha > \alpha_0$, $\beta > \beta_0$.

2) Пусть $z \notin A \wedge B$ и для определенности $z \notin A$. По условию S-сходимости направленности $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$, к A найдутся такие окрестность W элемента z и $\gamma \in I$, что при $\alpha > \gamma$ $A_\alpha \cap W = \varnothing$. Но тогда $(A_\alpha \wedge B_\beta) \cap W = \varnothing$ при $\alpha > \gamma$.

Лемма 7. *Любая $\vee$-группа компактно покрываема.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\mathbf{Z} = \langle a \rangle$ не является $\vee$-группой. Последовательность $\{\langle a^n \rangle\}$, $n = 1, 2, \ldots$, S-сходится к $\langle e \rangle$, однако последовательность $\{\langle a^n \rangle \vee \langle a^{n+1} \rangle\}$ S-сходится к $\langle a \rangle$.

Лемма 8. *Любая S-группа периодична.*

Доказательство вытекает из лемм 4, 7.

Лемма 9. *Для любой S-группы G и любого натурального n множество $B_n = \{x \in G : x^n = e\}$ конечно (e — единица группы G).*

Доказательство. Учитывая лемму 1, лемму Дицмана и индуктивные соображения, достаточно убедиться, что для любого простого p B_p конечно. Допустим противное: $\{x_n\}$ — последовательность элементов из B_p и $\langle x_n \rangle \neq \langle x_m \rangle$ при $n \neq m$. Из направленности подгрупп $\{\langle x_n \rangle\}$ выделим поднаправленность $\{\langle x_\alpha \rangle\}$, $\alpha \in J$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе P. Из первого условия S-сходимости и доказательства леммы 8 из [8] следует, что $|P| \leqslant p$, значит, $P = \langle x \rangle$. Возможны два случая.

1) $x = e$. Из направленности $\{\overline{\langle x_1 x_\alpha \rangle}\}$, $\alpha \in J$, выделим поднаправленность $\{\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle}\}$, $\beta \in J_1$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе F. В силу непрерывности $\vee$ направленность $\{\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \vee \overline{\langle x_\beta \rangle}\}$, $\beta \in J_1$, S-сходится к $F \vee \vee \langle e \rangle = F$. С другой стороны, $\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \vee \langle x_\beta \rangle = \langle x_1 \rangle \vee \langle x_\beta \rangle$, следовательно, $F = \langle x_1 \rangle$. Ввиду непрерывности $\wedge$ направленность $\{\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \wedge \langle x_1 \rangle\}$, $\beta \in J_1$, S-сходится к $\langle x_1 \rangle$. Поскольку точка x_1 изолирована в $\langle x_1 \rangle$, найдется такое $\beta_0 \in J_1$, что $x_1 \in \overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \wedge \langle x_1 \rangle$, $\beta > \beta_0$. Наступило противоречие с выбором последовательности $\{x_n\}$.

2) $|x| = p$. В силу непрерывности $\wedge$ направленность $\{\langle x_\alpha \rangle \wedge \langle x \rangle\}$, $\alpha \in J$, S-сходится к $\langle x \rangle$. Так как точка x изолирована в $\langle x \rangle$, найдется такое $\alpha_0 \in J$, что $x \in \langle x_\alpha \rangle \wedge \langle x \rangle$ при $\alpha > \alpha_0$. Значит, $x \in \langle x_\alpha \rangle$, и, учитывая $|x| = |x_\alpha| = p$, получаем $\langle x \rangle = \langle x_\alpha \rangle$ при $\alpha > \alpha_0$. Получено противоречие выбору $\{x_n\}$. Лемма доказана.

Лемма. 10. *Для любого топологического p-элемента x S-группы G найдется такое натуральное n_0, что $yx = xy$ для любого q-элемента y при $q > n_0$ (p, q — простые числа).*

Доказательство. Предполагая противное, выберем последовательность примарных топологических элементов $\{x_n\}$ так, чтобы $x_n x \neq x x_n$ и $\pi(\overline{\langle x_n \rangle}) \cap \pi(\overline{\langle x_m \rangle}) = \varnothing$ при $n \neq m$.

Покажем, что последовательность $\{\overline{\langle x_n \rangle}\}$ S-сходится к $\langle e \rangle$. Действительно, пусть A — предельная точка последовательности $\{\overline{\langle x_n \rangle}\}$. Выберем нетривиальный p-элемент $y \in A$ и открытую подгруппу U из G так, чтобы $y \notin U$. Тогда для некоторого натурального k $y^{p^k} \in U$. Подберем окрестность V элемента y, удовлетворяющую условиям: $U \cap V = \varnothing$, $V^{p^k} \subseteq U$. Так как окрестность $D_2(V)$ подгруппы A содержит подпоследовательность последовательности $\{\overline{\langle x_n \rangle}\}$, найдется такое натуральное m, что $\overline{\langle x_m \rangle} \in D_2(V)$ и $p \notin$

$\notin \pi(\overline{\langle x_m \rangle})$, т. е. $\overline{\langle x_m^{p^k} \rangle} = \overline{\langle x_m \rangle}$. Последнее противоречит тому, что $x_m^{p^k} \in U$ и $U \cap V = \varnothing$. Из направленности $\{\overline{\langle xx_n \rangle}\}$ выберем поднаправленность $\{\overline{\langle xx_\alpha \rangle}\}$, $\alpha \in I$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе F. В силу непрерывности $\bigvee$ направленность $\{\overline{\langle xx_\alpha \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\alpha \rangle}\}$, $\alpha \in I$, S-сходится к F. Поскольку $\overline{\langle xx_\alpha \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\alpha \rangle} = \overline{\langle x \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\alpha \rangle}$, $F = \overline{\langle x \rangle}$. Ввиду непрерывности $\bigwedge$ направленность $\{\overline{\langle xx_\alpha \rangle} \bigwedge \overline{\langle x \rangle}\}$, $\alpha \in I$, S-сходится к $\overline{\langle x \rangle}$. Так как $\overline{\langle x \rangle}$ — изолированная точка $\mathfrak{L}(\overline{\langle x \rangle})$ ($\overline{\langle x \rangle}$ изоморфна $\mathbf{Z}_p$ либо $\mathbf{C}_{p^k}$), начиная с некоторого номера $\alpha_0 \in I$, $\overline{\langle xx_\alpha \rangle} \bigwedge \overline{\langle x \rangle} = \overline{\langle x \rangle}$. Значит, $x \in \overline{\langle xx_\alpha \rangle}$ при $\alpha > \alpha_0$, что противоречит $xx_\alpha \neq x_\alpha x$.

Лемма 11. *Если топологическая p-группа G является S-группой, то G изоморфна $\mathbf{C}_{p^\infty}$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{R}_p$ либо конечна.*

Доказательство. Предположим, что G дискретна. По лемме 9 G слойно конечна. Учитывая теорему из [6] и лемму 1, достаточно убедиться, что G не содержит подгрупп, изоморфных $\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_p$. Пусть $A = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$, $a_i^p = a_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots$, $B = \langle b \rangle$, $b^p = e$, и $H = A \times B$. Последовательности $\{\langle a_n \rangle\}$, $\{\langle a_n b \rangle\}$ подгрупп из H S-сходятся к подгруппе A, однако последовательность $\{\langle a_n b \rangle \bigvee \langle a_n \rangle\}$ S-сходится к H. Значит, H не является S-группой.

Допустим, что G недискретна. Достаточно показать, что $\mathfrak{L}(G)$ линейно упорядочена. Пусть $x, y \in G$, H — открытая компактная подгруппа, централизующая x, y (лемма 5). Положим $P = \overline{\langle x, y, H \rangle}$. Тогда P/H — дискретная конечнопорожденная S-группа и по доказанному P/H конечна. Значит, P компактна и по лемме 6 топологически изоморфна $\mathbf{Z}_p$. Следовательно, $\overline{\langle x \rangle} \subseteq \overline{\langle y \rangle}$ либо $\overline{\langle y \rangle} \subseteq \overline{\langle x \rangle}$.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{M}_p$ — множество силовских p-подгрупп S-группы G. Тогда имеются лишь следующие возможности:*

1) $\mathfrak{M}_p$ конечно и все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ конечны;

2) $\mathfrak{M}_p$ конечно и все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ топологически изоморфны $\mathbf{Z}_p$;

3) $\mathfrak{M}_p = \{A\}$ и A топологически изоморфна C_{p^∞} либо $\mathbf{R}_p$.

Доказательство. Заметим, что все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ одновременно дискретны либо недискретны. В противном случае, согласно лемме 5, G содержала бы подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{C}_p \times \mathbf{R}_p$, что противоречит лемме 11. Пусть вначале все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ дискретны. Ввиду леммы 11 возможны два случая.

1) $\mathfrak{M}_p$ содержит подгруппу A, топологически изоморфную C_{p^∞}. По лемме 9 множество B всех элементов конечного порядка из G образует слойно конечную (возможно незамкнутую) подгруппу. Тогда A центральна в B и, следовательно, $\mathfrak{M}_p = \{A\}$.

2) Любая подгруппа из $\mathfrak{M}_p$ конечна. Конечность $\mathfrak{M}_p$ следует из того, что все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ содержатся в B (B слойно конечна).

Пусть все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ недискретны. И снова, ввиду леммы 11, возможны два случая.

1. $\mathfrak{M}_p$ содержит подгруппу C, топологически изоморфную $\mathbf{R}_p$. Предположим $\mathfrak{M}_p \neq \{C\}$. Тогда найдется топологический p-элемент $x \notin C$. Пусть открытая компактная подгруппа U централизует x и $x \notin U$. Положим $H = U \cap C$, $P = \overline{\langle C, x \rangle}/H$. S-группа P содержит квазициклическую подгруппу C/H и топологический p-элемент $xH \notin C/H$, что противоречит 1).

2. Все подгруппы из $\mathfrak{M}_p$ изоморфны $\mathbf{Z}_p$. Конечность $\mathfrak{M}_p$ докажем от противного. Пусть $\langle x_n \rangle$ — последовательность топологических p-элементов из G, $\overline{\langle x_n \rangle} \simeq \mathbf{Z}_p$ и $\overline{\langle x_i \rangle} \neq \overline{\langle x_j \rangle}$ при $i \neq j$. Из последовательности $\{\overline{\langle x_n \rangle}\}$ выделим поднаправленность $\{\overline{\langle x_\alpha \rangle}\}$, $\alpha \in I$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе F. Возможны два случая.

2. 1. $F = \langle e \rangle$. Из направленности $\{\overline{\langle x_1 x_\alpha \rangle}\}$, $\alpha \in I$, выделим поднаправленность $\{\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle}\}$, $\beta \in J$, S-сходящуюся к некоторой подгруппе K. В силу непрерывности $\bigvee$ направленность $\{\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\beta \rangle}\}$, $\beta \in J$, S-сходится к K. Поскольку $\overline{\langle x_1 x_\beta \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\beta \rangle} = \overline{\langle x_1 \rangle} \bigvee \overline{\langle x_\beta \rangle}$, $K = \overline{\langle x_1 \rangle}$. Ввиду непрерывности $\bigvee$

направленность $\{\overline{\langle x_1x_\beta\rangle}\wedge\overline{\langle x_1\rangle}\}, \beta\in J, S$ сходится к $\overline{\langle x_1\rangle}$. Поскольку $\overline{\langle x_1\rangle}$, топологически изоморфная $\mathbf{Z}_p$, является изолированной точкой $\mathfrak{L}(\overline{\langle x_1\rangle})$, найдется такое $\beta_0\in J$, что $\overline{\langle x_1x_\beta\rangle}\wedge\overline{\langle x_1\rangle}=\overline{\langle x_1\rangle}$ при $\beta>\beta_0$. В частности, $x_1x_\beta=x_\beta x_1$ противоречит тому, что $\overline{\langle x_1\rangle}$ и $\overline{\langle x_\beta\rangle}$ — различные силовские p-подгруппы.

2.2. $F\simeq\mathbf{Z}_p$. В силу непрерывности $\wedge$ и изолированности F в $\mathfrak{L}(F)$ найдется такое $\alpha_0\in I$, что при $\alpha>\alpha_0$ $F\subseteq\overline{\langle x_\alpha\rangle}$. Пусть N — подгруппа, топологически порожденная множеством $\{x_\alpha,\ \alpha>\alpha_0\}$. Тогда N/F содержит бесконечное число конечных силовских p-подгрупп, что противоречит 2). Лемма доказана.

Лемма 13. *Любая S-группа G представима в виде объединения неубывающей последовательности своих открытых компактных подгрупп.*

Доказательство. По лемме 12 множество примарных элементов G σ-компактно. Учитывая периодичность G, заключаем, что G также σ-компактна. Поэтому достаточно доказать индуктивную компактность G. Фиксируем в G открытую компактную подгруппу U. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — произвольные топологические примарные элементы. По лемме 5 некоторая открытая в U подгруппа N централизует $g_1, \ldots, g_n$. Так как U компактна, можно считать N инвариантной в U. Дискретная S-группа $\overline{\langle g_1,\ldots,g_n,U\rangle}/N$ слойно-конечна и конечно порождена, а следовательно, конечна. Значит, $\overline{\langle g_1,\ldots,g_n,U\rangle}$ компактна.

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — произвольные элементы из G. Очевидно, можно выбрать такие топологические примарные элементы $t_1,\ldots,t_s$, что $\overline{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle}\subseteq\subseteq\overline{\langle t_1,\ldots,t_s,U\rangle}$. По ранее доказанному $\overline{\langle t_1,\ldots,t_s,U\rangle}$ компактна, значит, компактна и $\overline{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle}$.

Теорема 2. *Группа G является S-группой тогда и только тогда, когда G периодична и топологически изоморфна $A\times B\times(C\rightthreetimes D)$, где C содержит плотную тонкую слойно конечную подгруппу A, B, D абелевы с силовскими p-подгруппами, изоморфными соответственно $\mathbf{C}_{p^\infty}$, $\mathbf{R}_p$ и $\mathbf{Z}_p$, множества $\pi(A)$, $\pi(B)$, $\pi(C)$, $\pi(D)$ попарно непересекаются и централизатор любой силовской p-подгруппы из G имеет конечный индекс.*

Доказательство. Необходимость. По лемме 12 $\pi(G)$ можно разбить на четыре попарно непересекающихся подмножества π_1,π_2,π_4,π_3, при этом для любого $p\in\pi_i$, $i=1,2,4,3$, силовская p-подгруппа S_p из G топологически изоморфна соответственно $\mathbf{C}_{p^\infty}$, $\mathbf{R}_p$, $\mathbf{Z}_p$ либо конечна. Положим $A=\overline{\langle\bigcup_{p\in\pi_1}S_p\rangle}$, $B=\overline{\langle\bigcup_{p\in\pi_2}S_p\rangle}$. Так как для любого $p\in\pi_1\cup\pi_2$ $\mathfrak{M}_p=\{S_p\}$, A, B абелевы и инвариантны в G. Пусть $E=A\vee B=A\times B$. Ясно, что $\pi(G/E)=\pi_3\cup\pi_4$. По лемме 13 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$, $G_n\subseteq G_{n+1}$ и для любого n G_n открыта и компактна. По теореме Шура — Цассенхауза для проконечных групп $G_n=E_n\rightthreetimes K_n$, где $E_n=E\cap G_n$. Из последовательностей $\{E_n\}$, $\{K_n\}$ выделим поднаправленности, S-сходящиеся соответственно к подгруппам E' и K. В силу непрерывности $\vee$ и $\wedge$ $G=E'\vee K$, $E'\wedge\wedge K=\varnothing$. Кроме того, E' инвариантна в G, $E'\subseteq E$ (см. [3, леммы 1.5 и 2.3]) и $\pi(K)\subseteq\pi_3\cup\pi_4$. Значит, $E'=E$ и $G=E\rightthreetimes K$. Пусть S_p и S_q — примарные силовские подгруппы из E и K соответственно. Поскольку $\mathfrak{M}_q$ конечно, а S_p, топологически изоморфная $\mathbf{C}_{p^\infty}$ либо $\mathbf{R}_p$, не имеет собственных подгрупп конечного индекса, S_p нормализует S_q. Следовательно, K инвариантна в G и $G=E\times K$.

Рассмотрим подгруппу K. Множество P элементов конечного порядка из K согласно лемме 9 является в алгебраическом смысле тонкой слойной конечной подгруппой. Положим $C=\overline{P}$. Ясно, что $\pi(C)=\pi_3$, $\pi(K)\setminus\pi_3==\pi_4$. Представим K в виде неубывающей последовательности своих открытых компактных подгрупп $\{K_n\}$. По теореме Шура — Цассенхауза $K_n==C_n\rightthreetimes D_n$, где $C_n=C\cap K_n$. Поскольку силовские p-подгруппы из D_n топологически изоморфны $\mathbf{Z}_p$, по лемме 6 D_n абелева. Из последовательностей $\{C_n\}$, $\{D_n\}$ выделяем поднаправленности, S-сходящиеся соответственно к подгруппам C и D.

В силу непрерывности $\wedge$ и $\vee$, $K = C \rightthreetimes D$. Итак, G топологически изоморфна $A \times B \times (C \rightthreetimes D)$. Конечность индекса централизатора любой силовской p-подгруппы из G следует из лемм 5, 10.

Достаточность. Непрерывность операции $\wedge$ в $\mathfrak{L}(G)$ вытекает из теоремы 1. Поскольку $\mathbf{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{R}_p$ — $\vee$-группы, учитывая лемму 2, достаточно показать, что $K = C \rightthreetimes D$ является $\vee$-группой. Заметим, что K сепарабельна и удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Поэтому $\mathfrak{L}(K)$ также удовлетворяет первой аксиоме счетности, и можно ограничиться рассмотрением последовательностей подгрупп. Пусть последовательности $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ подгрупп из K S-сходятся соответственно к подгруппам X и Y. Первое условие S-сходимости последовательности $\{X_n \vee Y_n\}$ очевидно. Допустим, что второе условие нарушается. Положим $Z_n = X_n \cup Y_n$, $Z = X \cup Y$. Ясно, что последовательность замкнутых подмножеств $\{Z_n\}$ S-сходится к Z. Не умаляя общности, можно считать, что последовательность подгрупп $\{\overline{\langle Z_n \rangle}\}$ S-сходится к некоторой подгруппе F, причем $\overline{\langle Z \rangle} \subset F$.

Действительно, пусть $z \in \overline{\langle Z \rangle} \setminus F$. Пользуясь вторым условием S-сходимости, выберем такие окрестность W элемента z и натуральное число m, что при $n > m$ $\overline{\langle Z_n \rangle} \cap W = \varnothing$. В окрестности W возьмем элемент $x_1 y_1 \ldots$ $\ldots x_k y_k$, где $x_i \in X$, $y_i \in Y$. Подберем такие окрестности $U_1, \ldots, U_k$, $V_1, \ldots, V_k$ элементов $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ соответственно, что $U_1 V_1 \ldots U_k V_k \subseteq W$. Так как последовательности $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ S-сходятся к подгруппам X и Y, начиная с некоторого номера m' $\overline{\langle X_n \rangle} \in D_2(U_1) \cap \ldots \cap D_2(U_k)$, $\overline{\langle Y_n \rangle} \in D_2(V_1) \cap \ldots$ $\ldots \cap D_2(V_k)$. Но тогда $\overline{\langle X_n \cup Y_n \rangle} \cap W \neq \varnothing$, $n > m'$, что противоречит выбору W. Значит, $\overline{\langle Z \rangle} \subset F$.

Возьмем произвольный топологический p-элемент $x \in F \setminus \overline{\langle Z \rangle}$. Обозначим через M централизатор силовской p-подгруппы S_p, содержащей x. По условию $|K : M| < \infty$, значит, M содержит инвариантную в K подгруппу N конечного индекса. Множество всех топологических q-элементов из N, где $p \neq q$, топологически порождает характеристическую в N подгруппу H, причем $p \notin \pi(H)$. Отметим, что H инвариантна в K и $\pi(K) \setminus \pi(H)$ конечно. Так как множество L топологических примарных элементов из $K \setminus H$ компактно, L содержится в открытой компактной подгруппе U.

Последовательность $\{Z_n \cap U\}$ в силу открытости U S-сходится к $Z \cap U$. Поскольку U проконечна, по теореме 1 из [7] последовательность $\{\overline{\langle Z_n \cap U \rangle}\}$ S-сходится к $\overline{\langle Z \cap U \rangle}$. Значит, найдутся такая открытая инвариантная в U подгруппа V и натуральное n_0, что $\overline{\langle Z_n \cap U \rangle} \cap Vx \neq \varnothing$ для всех $n > n_0$.

С другой стороны, последовательность $\{\overline{\langle Z_n \rangle}\}$ S-сходится к F и $x \in F$. Следовательно, для некоторого натурального $m > n_0$ $\overline{\langle Z_m \rangle} \cap Vx \neq \varnothing$. Тогда $vx = y_1 \cdot \ldots \cdot y_k$, где $v \in V$, $y_1, \ldots, y_k$ — топологические примарные элементы из Z_m. Среди $y_1, \ldots, y_k$ выберем все элементы $z_1, \ldots, z_t \in Z_m \cap U$. Так как оставшиеся элементы принадлежат инвариантной подгруппе H, $vx = z_1 \cdot \ldots$ $\ldots \cdot z_t \cdot h$, где $h \in H$. Поскольку h централизует x и $p \notin \pi(H)$, $x \in$ $\in \overline{\langle V, z_1, \ldots, z_t \rangle} \subseteq V \overline{\langle Z_m \cap U \rangle}$. Значит, $\overline{\langle Z_m \cap U \rangle} \cap Vx \neq \varnothing$, что противоречит $\overline{\langle Z_n \cap U \rangle} \cap Vx = \varnothing$ для любого $n > n_0$. Теорема доказана.

Уточним строение сомножителя C в разложении S-группы G (см. теорему 2).

Теорема 3. *Если периодическая группа C содержит плотную тонкую слойно конечную группу P, то C топологически изоморфна подгруппе прямого произведения с отмеченной открытой компактной подгруппой конечных групп K_p, $p \in \pi(P)$, причем для любого простого q $(q, |K_p|) = 1$ почти для всех $p \in \pi(P)$.*

Доказательство. Из теории слойно конечных групп [6] следует, что для любого $p \in \pi(P)$ найдется такая инвариантная в P подгруппа N_p конечного индекса, что $p \notin N_p$ и любой примарный элемент из P принадлежит почти всем подгруппам N_p, $p \in \pi(P)$. Положим $M_p = \overline{N}_p$, $K_p =$

$= P/P \cap M_p$. Так как $\pi(N_p) = \pi(M_p)$, $\bigcap_{p\in\pi(P)} M_p = e$ и группы K_p, $p \in \pi(P)$, удовлетворяют заключению теоремы. Обозначим через f естественный алгебраический изоморфизм P на подгруппу декартова произведения групп K_p, $p \in \pi(P)$. Ясно, что $f(P)$ — подпрямое произведение групп K_p, $p \in \pi(P)$.

Пусть U — открытая компактная подгруппа из C. Так как $\overline{P \cap U} = U$, конечная группа $P \cap U/P \cap (M_p \cap U)$ изоморфна $U/M_p \cap U$. Следовательно, сужение f на $P \cap U$ продолжается до топологического изоморфизма g подгруппы U в тихоновское произведение F групп F_p, где $F_p \subseteq K_p$ и $F_p \simeq$ $\simeq U/M_p \cap U$.

Рассмотрим прямое произведение K групп K_p, $p \in \pi(P)$, с отмеченной открытой компактной подгруппой F и зададим отображение $t: C \to K$. Если $x \in C$, то $x = yz$, где $y \in P$, $z \in U$. Положим $t(x) = f(y)g(z)$. Допустим, что $x = y_1 z_1$, $y_1 \in P$, $z_1 \in U$. Тогда $y_1^{-1}y = z_1 z^{-1} \in P \cap U$. Значит, $f(y_1^{-1}y) =$ $= f(z_1 z^{-1}) = g(z_1 z^{-1})$. Так как f, g — изоморфизмы, $f(y_1^{-1}) f(y) = g(z_1) g(z^{-1})$ и $f(y) g(z) = f(y_1) g(z_1)$, т. е. определение t корректно.

Пусть W — окрестность единицы из K. В силу непрерывности g найдется такая открытая подгруппа $V \subseteq U$, что $g(V) \subseteq W$. Тогда $t(xV) =$ $= t(yzV) = f(y) g(z) g(V) = t(x) g(V) \subseteq t(x) W$. Значит, t непрерывно. Поскольку сужение t на плотную подгруппу P является изоморфизмом, t — непрерывный гомоморфизм. Так как сужение t на U совпадает с g, а g — — гомеоморфизм, t открыт. Тривиальность ядра t вытекает непосредственно из определения t.

1. *Chabauty C.* Limite d'ensembles et géométrie des nombres.— Bull. Soc. Math. France, 1950, **78**, p. 143—151.
2. *Протасов И. В.* Топологические свойства решетки подгрупп.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 3, с. 355—360.
3. *Протасов И. В.* Локальные теоремы для топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, **43**, № 6, с. 1430—1440.
4. *Протасов И. В., Цыбенко Ю. В.* О топологии Шаботи в решетке подгрупп. — В кн.: VIII Всесоюз. симпоз. по теор. групп. Сумы, 1982 г. Тез. докл. К.: Ин-т матем. АН УССР, 1982, с. 104—105.
5. *Мухин Ю. Н.* Локально компактные группы с дистрибутивной структурой замкнутых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1967, **8**, № 2, с. 366—375.
6. *Черников С. Н.* Бесконечные слойно конечные группы.— Мат. сб., 1948, **22**, № 1, с. 101—133.
7. *Протасов И. В.* О решетке подгрупп проконечной группы.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 11, с. 975—978.
8. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 2, с. 378—385.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 09.02.83