УДК 519.21

І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
А. М. Плічко (Краків. політехніка, Польща)

ПРО ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ МАРЦИНКЕВИЧА – ЗИҐМУНДА У БАНАХОВИХ ҐРАТКАХ

We intensify the well-known Marcinkiewicz – Zygmund law of large numbers for the case of Banach lattices. Examples of applications to empirical distributions are presented.

Для банаховых решеток дано усиление известного результата Марцинкевича – Зигмунда о законе больших чисел. Приведены примеры приложений к эмпирическим распределениям.

1. Вступ. Основна теорема. Нехай $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в. в.) в $\mathbb{R}$. У роботі Марцинкевича – Зигмунда [1] одержано таке узагальнення закону великих чисел (ЗВЧ) Колмогорова: для $1 \le p < 2$ майже напевно (м. н.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0,$$

якщо $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$ і $\mathbf{E}\xi = 0$.

Нехай (X_i) — послідовність незалежних копій випадкового елемента (в. е.) X зі значеннями в сепарабельному банаховому просторі B і $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Відомо [2, с. 259], що для банахових просторів типу p, $1 \le p < 2$, за умов

$$\mathbf{E}\| X \|^p < \infty \tag{1}$$

і $\mathbf{E}X = 0$ також виконується ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда вигляду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \| S_n \| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{2}$$

Далі через B позначатимемо сепарабельну банахову ґратку з модулем $|\cdot|$. Покладемо

$$S_n^* = \sup_{k \le n} | S_k |, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(тут і далі $k \le n$ означає $1 \le k \le n$).

Природно постає питання: чи не можна ЗВЧ (2) у випадку банахових ґраток підсилити до рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \left\| S_n^* \right\| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{3}$$

і які умови для цього потрібно накласти на в. е. X?

Нехай $1 \le p,\ q < \infty$. Банахова ґратка B називається *p-опуклою* [3, с. 46], якщо існує така стала $D^{(p)} = D^{(p)}(B)$, що для кожного n і будь-яких елементів $(x_i)_1^n \subset B$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p} \right\| \le D^{(p)} \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)^{1/p},$$

і, аналогічно, *q-вгнутою*, якщо для деякої сталої $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$ виконується обернена нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^q\right)^{1/q} \leq D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^q\right)^{1/q} \right\|.$$

Теорема 1. *Нехай* B — *p-опукла* $(1 \leq p < 2)$ *і* *q-вгнута* $(q < \infty)$ *банахова ґратка*, X — *випадковий елемент зі значеннями в* B *та* $\mathbf{E}X = 0$. *Тоді умова* (1) *еквівалентна рівності* (3).

***Наслідок* 1.** *Нехай* X — *випадковий елемент зі значеннями у просторі* L_p *або* ℓ_p *при* $1 \leq p < 2$ *і* $\mathbf{E}X = 0$. *Тоді умови* (1) *та* (3) *еквівалентні.*

***Зауваження* 1.** Для загальних сепарабельних банахових ґраток теорема 1 є хибною, але, як показано у праці [4], виконується ЗВЧ типу Колмогорова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \| S_n^* \| = 0 \quad \text{м. н.}$$

за умов $\mathbf{E}\| X \| < \infty$ та $\mathbf{E}X = 0$.

Нагадаємо, що послідовність (x_n) елементів банахової ґратки B називається *o-збіжною* до елемента x, позначається $x = o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, якщо існує така послідовність невід'ємних елементів $v_n \in B$, що $|x_n - x| \leq v_n$ і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \geq v_2 \geq \ldots$ та $\inf\limits_{n\geq 1} v_n = 0.$

Для в. е. X зі значеннями у банаховій ґратці (з $\mathbf{E}X = 0$) можна розглянути порядковий ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда

$$o - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} S_n = 0 \quad \text{м. н.}$$

***Зауваження* 2.** В умовах теореми 1 порядковий ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда не виконується. Так, контрприклад із роботи [5], якщо його розглянути у просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, задовольняє нерівність (1) і разом з тим для нього

$$\left\| \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/p}} | S_n | \right\|_{\ell_p} = \infty \quad \text{м. н.}$$

2. Доведення теореми 1. Відразу зазначимо, що тут ми істотно використовуємо доведення ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда у банаховому просторі з роботи [2, с. 186, 187].

Імплікація (3) $\Rightarrow$ (1) випливає з результатів [2, с. 259]. Тому достатньо встановити протилежну імплікацію (1) $\Rightarrow$ (3).

1-*й крок.* Допоміжні леми.

Лема 1 [4]. *Нехай* Y — *в. е. зі значеннями у скінченновимірному підпросторі* E *банахової ґратки, а* (Y_i) — *його незалежні копії. Нехай* $1 < p \leq 2$, $\mathbf{E}\| Y \|^p < \infty$ *і* $\mathbf{E}Y = 0$. *Тоді при* $n \to \infty$ *м. н.*

$$\frac{1}{n^{1/p}} \left\| \sup_{k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} Y_i \right| \right\| \to 0.$$

Лема 2 [6]. *Нехай* B — *q-вгнутий* $(q < \infty)$ *банахів ідеальний простір, а*

$X = \big(X(t),\ t \in T\big)$ — *випадковий елемент зі значеннями в* B. *Тоді*

$$\big(\mathbf{E}\|X\|^q\big)^{1/q} \;\le\; D_{(q)}\Big\|\big(\mathbf{E}|X(t)|^q\big)^{1/q}\Big\|.$$

Лема 3 [2, с. 179]**.** *Нехай* (X_n) *та* (X'_n) — *незалежні послідовності випадкових величин у банаховому просторі такі, що при* $n \to \infty$

$$\|X_n - X'_n\| \;\to\; 0 \;\; \text{м. н.} \quad і \quad \|X_n\| \;\xrightarrow{P}\; 0.$$

Тоді

$$\|X_n\| \;\to\; 0 \quad \text{м. н.}$$

Наступна лема близька до відомого результату Прохорова в $\mathbb{R}$ [7]. Припустимо, що числова послідовність $a_n \uparrow \infty$ та існують підпослідовність $(b_m) = (a_{n_m})$ і сталі $C > c > 1$ такі, що $C \ge a_{n_{m+1}} / a_{n_m} \ge c$ для досить великих m. (Якщо, наприклад, $a_{n+1}/a_n \to 1$, то така підпослідовність існує [8, с. 330].)

Нехай (X_n) — послідовність незалежних в. е. зі значеннями в банаховій ґратці B. Для послідовності (X_n) так само, як і у вступі, визначаємо S_n та S_n^*. Покладемо $J_m = \big\{n_{m-1} + 1, \ldots, n_m\big\}$, $m \in \mathbb{N}$, та

$$U_m \;=\; \sup_{n \in J_m}\Big|S_n - S_{n_{m-1}}\Big|.$$

Лема 4. *Наступні співвідношення еквівалентні*:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}\big\|S_n^*\big\| = 0$ *м. н.*;

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{b_m}\|U_m\| = 0$ *м. н.*;

iii) $\forall\,\delta > 0 : \sum_{m\ge 1} \mathbf{P}\left\{\dfrac{1}{b_m}\|U_m\| > \delta\right\} < \infty.$

***Доведення леми* 4.** Досить довести рівносильність умов i) та ii), бо рівносильність ii) та iii) випливає з леми Бореля – Кантеллі.

Якщо виконується умова i), то при $m \to \infty$

$$\frac{1}{b_m}\|U_m\| \;\le\; \frac{1}{b_m}\left\|\sup_{n\in J_m}|S_n|\right\| \;+\; \frac{\|S_{n_{m-1}}\|}{b_{m-1}}\,\frac{b_{m-1}}{b_m} \;\to\; 0 \quad \text{м. н.}$$

Навпаки, нехай виконується умова ii). Тоді для $n \in J_m$

$$|S_n| \;=\; \left|S_n - S_{n_{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-1}\big(S_{n_i} - S_{n_{i-1}}\big)\right| \;\le\; \sum_{i=1}^{m} U_i\,.$$

Звідси маємо

$$\frac{1}{a_n}\big\|S_n^*\big\| \;\le\; \frac{C}{b_m}\sum_{i=1}^{m}\|U_i\|. \tag{4}$$

Із властивостей підпослідовності (b_m) випливає оцінка

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \;\leq\; \frac{b_m}{1 - 1/c}. \tag{5}$$

І нарешті, скористаємось елементарним числовим співвідношенням [8, с. 327] (лема 9): при $n \to \infty$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \;\to\; 0,$$

якщо $a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \uparrow \infty$ і $y_n \to 0$.

Звідси, з умови ii) та оцінок (4), (5) отримуємо умову i).

Лему доведено.

***Зауваження* 3.** Покладемо

$$T_m \;=\; \left| S_{n_m} - S_{n_{m-1}} \right|$$

і розглянемо умови

ii$'$) $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{1}{b_m} \| T_m \| = 0$ м. н.;

iii$'$) $\forall\, \delta > 0: \sum_{m \geq 1} \mathbf{P}\left\{ \dfrac{1}{b_m} \| T_m \| > \delta \right\} < \infty.$

Якщо в умовах леми 4 $B = \mathbb{R}$, а в. е. X_n симетричні, то співвідношення ii), iii) можна замінити на ii$'$), iii$'$) [7]. Чи можна зробити це для банахових ґраток — нам невідомо.

2-*й крок*. Спочатку встановимо послаблений варіант імплікації (1) $\Rightarrow$ (3), а саме, покажемо, що в (3) має місце збіжність за ймовірністю.

Відомо, що множина простих в. е. щільна в $L_p(B)$ (див., наприклад, [9, с. 97], вправа 3), тому для будь-якого $\epsilon > 0$ існує простий (тобто скінченнозначний) в. е. Y такий, що $\left(\mathbf{E}\| X - Y \|^p\right)^{1/p} < \epsilon$. Оскільки $\| \mathbf{E} Y \| \leq \| \mathbf{E}(Y - X) \| + \| \mathbf{E} X \| \leq \left(\mathbf{E}\| X - Y \|^p\right)^{1/p} < \epsilon$, то, використовуючи $Y - \mathbf{E}Y$ замість Y, можемо вважати $\mathbf{E}Y = 0$. Покладемо $R = X - Y$. Звичайно,

$$\mathbf{E}R \;=\; 0 \quad \text{і} \quad \left(\mathbf{E}\| R \|^p\right)^{1/p} \;<\; \epsilon. \tag{6}$$

Для $X_n, n \geq 1$, незалежних копій X, запишемо $X_n = Y_n + R_n$, де Y_n — незалежні копії Y, а R_n — незалежні копії R. Покладемо

$$S_n' \;=\; \sup_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} Y_i \right| \quad \text{і} \quad S_n'' \;=\; \sup_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} R_i \right|.$$

Очевидно,

$$\left\| S_n^* \right\| \;\leq\; \| S_n' \| + \| S_n'' \|. \tag{7}$$

На підставі леми 1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1/p}} \| S'_n \| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{8}$$

Тепер оцінимо зверху $\| S''_n \|$. Зауважимо, що сепарабельна σ-повна банахова ґратка порядково ізометрична до деякого банахового ідеального простору [3, с. 25] (у книзі [3] вживається близький термін „функційний простір Кете”). Оскільки q-вгнута банахова ґратка буде σ-повною [3] (теорема 1.a.5), то без обмеження загальності можна вважати B сепарабельним p-опуклим і q-вгнутим банаховим ідеальним простором, заданим на деякому вимірному просторі (T, Λ, μ). Нехай

$$X_n = X_n(t), \qquad S''_n = S''_n(t), \qquad R_n = R_n(t),$$

а $\tilde{R}_n = \tilde{R}_n(t)$, $t \in T$, — незалежна копія R_n. Використовуючи процедуру симетризації, маємо [9, с. 222] (лема 3.4)

$$\mathbf{E}\| S''_n \| \le \mathbf{E}\left\| \sup_{k \le n} \left| \sum_1^k \left(R_i - \tilde{R}_i \right) \right| \right\|.$$

Можна вважати, що $R_n - \tilde{R}_n = \varepsilon_n \hat{R}_n$, де ε_n — незалежні симетричні в. в. Бернуллі, а $\hat{R}_n$ — незалежні копії $R - \tilde{R}$ ($\tilde{R}$ — незалежна копія R), які не залежать від (ε_n). Тоді з останньої нерівності та леми 2 отримуємо

$$\mathbf{E}\| S''_n \| \le D_{(q)}\, \mathbf{E}\left\| \left(\hat{\mathbf{E}} \sup_{k \le n} \left| \sum_1^k \varepsilon_i \hat{R}_i(t) \right|^q \right)^{1/q} \right\|, \tag{9}$$

де через $\hat{\mathbf{E}}\varphi(\varepsilon_n \hat{R}_n)$ позначено математичне сподівання в. в. $\varphi(\varepsilon_n \hat{R}_n)$ при фіксованих значеннях в. в. $(\hat{R}_n)$. Далі, при фіксованих значеннях $\hat{R}_n$ послідовно застосуємо моментну нерівність Леві для симетричних в. в. в $\mathbb{R}$ [2, с. 48]

$$\mathbf{E} \max_{k \le n} \left| \sum_1^k \xi_i \right|^q \le 2\, \mathbf{E} \left| \sum_1^n \xi_i \right|^q$$

та відому нерівність Кахана [3] (теорема 1.e.13)

$$\left(\hat{\mathbf{E}} \sup_{k \le n} \left| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \hat{R}_i(t) \right|^q \right)^{1/q} \le \left(2\, \hat{\mathbf{E}} \left| \sum_1^n \varepsilon_i \hat{R}_i(t) \right|^q \right)^{1/q} \le$$

$$\le C_K \left(\hat{\mathbf{E}} \left| \sum_1^n \varepsilon_i \hat{R}_i(t) \right|^p \right)^{1/p} \le C_K \left(\sum_1^n \left| \hat{R}_i(t) \right|^p \right)^{1/p},$$

де $C_K = C_K(p, q)$ залежить від сталої в нерівності Кахана.

На підставі оцінки (9), останньої нерівності та p-опуклості B дістанемо (при деяких абсолютних сталих C_1, C)

$$\mathbf{E}\| S''_n \| \le C_1\, \mathbf{E} \left\| \left(\sum_{i=1}^n \left| \hat{R}_i \right|^p \right)^{1/p} \right\| \le C\, \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \hat{R}_i \right\|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le \; Cn^{1/p}\Big(\mathbf{E}\big\|\hat{R}_i\big\|^p\Big)^{1/p} \;\le\; Cn^{1/p}\epsilon\,. \tag{10}$$

В останній нерівності використано й нерівність з (6).

Оскільки ϵ є довільним, то з (7), (8) та (10) випливає

$$\frac{1}{n^{1/p}}\left\|S_n^*\right\| \;\xrightarrow{P}\; 0\,. \tag{11}$$

3-*й крок*. Перейдемо безпосередньо до доведення імплікації (1) $\Rightarrow$ (3).

При цьому, внаслідок леми 3 та співвідношення (11), можна обмежитися симетричними в. е. X_n. За аналогією з 2-м кроком зобразимо їх у вигляді

$$X_n \;=\; \varepsilon_n X_n' \;=\; \varepsilon_n\big(Y_n + R_n\big),$$

де симетричні в. в. Бернуллі ε_n не залежать від X_n'. Покладемо

$$S_n' \;=\; \sup_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i Y_i\right|, \qquad S_n'' \;=\; \sup_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i R_i\right|.$$

Зрозуміло, що величини S_n' та S_n'' задовольняють нерівність (7), а для S_n' виконується рівність (8). Таким чином, для доведення теореми 1 залишилося показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}\left\|S_n''\right\| \;=\; 0 \quad \text{м. н.} \tag{12}$$

Для кожного $m\in\mathbb{N}$ позначимо $J_m = \left\{2^{m-1}+1,\ldots,\, 2^m\right\}$ і для кожного $j\in J_m$

$$V_j \;=\; \varepsilon_j R_j \mathbb{I}\Big(\big\|R_j\big\| \le 2^{m/p}\Big),$$

де $\mathbb{I}(A)=1$, якщо подія A виконується, і $\mathbb{I}(A)=0$ у протилежному випадку. В. е. R_j задовольняє умову (6), а тому

$$\sum_{m\ge1}\mathbf{P}\left\{\exists\, j\in J_m,\, V_j\ne\varepsilon_j R_j\right\} \;\le\; \sum_{m\ge1}2^m\mathbf{P}\left\{\|R\| > 2^{m/p}\right\} \;<\; \infty.$$

За лемою Бореля – Кантеллі це означає, що м. н. нерівність $V_j\ne\varepsilon_j R_j$ виконується лише скінченну кількість разів. Таким чином, рівність (12) виконуватиметься, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}\left\|\sup_{k\le n}\left|\sum_{1}^{k}V_i\right|\right\| \;=\; 0 \quad \text{м. н.}$$

Застосувавши лему 4 при $a_n = n^{1/p}$ і $n_m = 2^m$, отримаємо, що остання рівність еквівалентна умові

$$\forall\,\delta \;>\; 0:\sum_{m\ge1}\mathbf{P}\Big\{\|U_m\| > \delta\,2^{m/p}\Big\} \;<\; \infty, \tag{13}$$

де $U_m = \sup_{j\in J_m}\left|\sum_{i=2^{m-1}+1}^{j}V_i\right|$.

З оцінки (10) маємо

$$\mathbf{E}\|U_m\| \leq C2^{m/p}\epsilon .$$

Звідси, вибираючи $\epsilon = \delta/(2C)$, одержуємо, що умова

$$\forall\,\delta > 0 : \sum_{m \geq 1} \mathbf{P}\Big\{\|U_m\| - \mathbf{E}\|U_m\| > \delta\, 2^{(m/p)-1}\Big\} < \infty \tag{14}$$

є достатньою для виконання (13).

Для оцінки m-го доданка в сумі (14) скористаємося модифікацією методу Юринського [10] для сум незалежних в. е. у банахових просторах. Для кожного $j \in J_m$ введемо позначення

$$U_{m,j} = \sup_{i \in J_m} \left\| \sum_{s \in J_m,\, s < i,\, s \neq j} V_s \right\|,$$

$$\zeta_j = \mathbf{E}_j\|U_m\| - \mathbf{E}_{j-1}\|U_m\|,$$

$$\mathbf{E}_j\eta = \mathbf{E}\big(\eta \,\big|\, \mathcal{F}_j\big),$$

де $\mathcal{F}_j$ — σ-алгебра, натягнена на в. е. $V_i : i \in J_m,\, i \leq j$; $\mathcal{F}_{2^{(m-1)}}$ — тривіальна σ-алгебра.

Тоді має місце мартингальне зображення

$$\|U_m\| - \mathbf{E}\|U_m\| = \sum_{j \in J_m} \zeta_j . \tag{15}$$

Оскільки ζ_j можна записати у вигляді

$$\zeta_j = \big(\mathbf{E}_j - \mathbf{E}_{j-1}\big)\big(\|U_m\| - \|U_{m,j}\|\big),$$

то, застосовуючи нерівність

$$\|U_m\| - \|U_{m,j}\| \leq \|V_j\|,$$

отримуємо

$$|\zeta_j| \leq \|V_j\| + \mathbf{E}\|V_j\|. \tag{16}$$

Але (ζ_j) — послідовність мартингал-різниць, тому згідно з оцінкою (16) маємо

$$\mathbf{E}\left|\sum_{j\in J_m} \zeta_j\right|^2 \leq \sum_{j\in J_m} \mathbf{E}|\zeta_j|^2 \leq C \sum_{j\in J_m} \mathbf{E}\|V_j\|^2 \leq C\,2^m\,\mathbf{E}\|V_j\|^2 .$$

Звідси та з рівності (15) випливає, що ряд у (14) можна оцінити зверху таким чином:

$$\frac{C}{\delta^2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2^{2m/p}} \sum_{j\in J_m} \mathbf{E}\|V_j\|^2 \leq \frac{C}{\delta^2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2^{m(2/p-1)}} \mathbf{E}\Big(\|R\|^2 \mathbb{I}\big(\|R\| \leq 2^{m/p}\big)\Big). \tag{17}$$

Відомо (див. [2, с. 187], доведення теореми 7.9), що для в. в. ξ в $\mathbb{R}$ за умови $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty,\ 1 \leq p < 2$, сума

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{2^{m(2/p-1)}} \mathbf{E}\Big(\xi^2\, \mathbb{I}\big(|\xi|^p \leq 2^m\big)\Big) < \infty.$$

Оскільки в. в. $\| R \|$ задовольняє умову (6), то ряд (17) збігається, а отже збігається і ряд (14).

Теорему доведено.

3. Приклади застосування до емпіричних розподілів. 1. *Вибірка в* $\mathbb{R}$. Для н. о. р. в. в. ξ, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ в $\mathbb{R}$ з функцією розподілу $F(t)$ введемо емпіричну функцію розподілу

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\, t)}(\xi_i), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $I_{(-\infty,\, t)}(\xi) = 1$, якщо $\xi < t$, і $I_{(-\infty,\, t)}(\xi) = 0$, якщо $\xi \geq t$.

Відома теорема Глівенка – Кантеллі стверджує, що

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| F_n^*(t) - F(t) \right| \to 0 \quad \text{м. н.}$$

Розглянемо випадкові процеси

$$X_n(t) = I_{(-\infty,\, t)}(\xi_n) - F(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

як в. е. зі значеннями у просторі $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ (звичайно, це буде так лише за певних обмежень на в. в. ξ [4]). Для в. е. X_n, визначених рівністю (18), і з умовою

$$\mathbf{E} \| X_n \|_{L_p(\mathbb{R})}^p < \infty, \tag{19}$$

ЗВЧ (2) у просторі $L_p(\mathbb{R})$ можна записати у такому вигляді: при $n \to \infty$ м. н.

$$\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} n^p \left| F_n^*(t) - F(t) \right|^p dt \to 0. \tag{20}$$

Теорема 1 дозволяє підсилити останнє співвідношення так: за умови (19) при $n \to \infty$ м. н.

$$\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \max_{k \leq n} k^p \left| F_k^*(t) - F(t) \right|^p dt \to 0. \tag{21}$$

З іншого боку, рівності (20), (21) можна розглядати, як деякі варіанти теореми Глівенка – Кантеллі у просторі $L_p(\mathbb{R})$.

Наслідок 2. *При* $1 \leq p < 2$ *емпірична функція розподілу* $F_n^*(t)$ *задовольняє закон великих чисел* (21) *тоді і тільки тоді*, *коли*

$$\mathbf{E} |\xi| < \infty. \tag{22}$$

Зауваження 4. Відомо [4], що при умові $\mathbf{E} |\xi|^{1/p} < \infty$ X_n належить $L_p(\mathbb{R})$ м. н. Тому умова (22) гарантує належність X_n до всіх $L_p(\mathbb{R})$ відразу.

Наслідок 2 безпосередньо випливає з теореми 1, якщо встановити еквівалентність (19) $\Leftrightarrow$ (22).

Це перевіряється просто. Справді,

$$\mathbf{E}\| X_n \|_{L_p(\mathbb{R})}^p = \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(|1 - F(t)|^p \, \mathbb{I}(\xi < t) + |F(t)|^p \, \mathbb{I}(\xi \geq t) \Big) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(|1 - F(t)|^p F(t) + |F(t)|^p \big(1 - F(t)\big) \Big) dt .$$

Останній інтеграл буде обмеженим тоді й тільки тоді, коли

$$\int_0^{\infty} \big(1 - F(t)\big) dt + \int_{-\infty}^{0} F(t) \, dt < \infty.$$

Відомо [11, с. 179] (лема 2), що остання нерівність еквівалентна умові (22).

2. *Вибірка в* $\mathbb{R}^m$. Нехай $\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle = \sum_{i=1}^m b_i c_i$ — скалярний добуток елементів $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ та $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ з $\mathbb{R}^m$, $\|\bar{c}\| = \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle^{1/2}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2, \ldots$ — н. о. р. в. в. в $\mathbb{R}^m$. З кількох можливих способів визначення емпіричної функції розподілу в $\mathbb{R}^m$ виберемо такий:

$$F_n^*(\bar{c}, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t)}\Big(\langle \bar{\xi}_i, \bar{c} \rangle \Big), \quad \langle \bar{c}, t \rangle \in D,$$

де $D = \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$, а $\mathbb{S}^m$ — одинична сфера m-вимірного евклідового простору. Введемо на D міру природним способом як добуток (нормованої) сферичної міри Лебега на $\mathbb{S}^m$ та звичайної міри Лебега в $\mathbb{R}$.

Покладемо $F(\bar{c}, t) = \mathbf{P}\Big\{ \langle \bar{\xi}_i, \bar{c} \rangle < t \Big\}$ і розглянемо випадкові функції

$$X_n(\bar{c}, t) = I_{(-\infty, t)}\Big(\langle \bar{\xi}_n, \bar{c} \rangle \Big) - F(\bar{c}, t), \quad (\bar{c}, t) \in D,$$

як в. е. X_n зі значеннями у (сепарабельній) банаховій ґратці числових функцій $L_p(D)$, $1 \leq p < \infty$.

Застосовуючи теорему 1 до в. е. X_n, дістаємо такий наслідок.

Наслідок 3. *Якщо*

$$\mathbf{E}\big\| \bar{\xi} \big\| < \infty, \tag{23}$$

то для кожного $1 \leq p < 2$ *при* $n \to \infty$ *м. н.*

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c} \int_{-\infty}^{\infty} \max_{k \leq n} k^p \Big| F_n^*(\bar{c}, t) - F(\bar{c}, t) \Big|^p dt \to 0. \tag{24}$$

Для доведення наслідку 3 досить перевірити виконання умови (19). Маємо

$$\mathbf{E}\| X_n \|_{L_p(D)}^p =$$

$$= \mathbf{E} \int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(|1 - F(\bar{c}, t)|^p \, \mathbb{I}\Big(\langle \bar{\xi}, \bar{c} \rangle < t \Big) + |F(\bar{c}, t)|^p \, \mathbb{I}\Big(\langle \bar{\xi}, \bar{c} \rangle \geq t \Big) \Big) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^m} d\overline{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\left|1 - F(\overline{c}, t)\right|^p F(\overline{c}, t) + \left|F(\overline{c}, t)\right|^p \left|1 - F(\overline{c}, t)\right| \Big) dt \;\le$$

$$\le\; 2 \int_{\mathbb{S}^m} d\overline{c} \int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - F(\overline{c}, t)\big) F(\overline{c}, t)\, dt \;\le$$

$$\le\; 2 \int_{\mathbb{S}^m} d\overline{c} \left(\int_0^{\infty} \big(1 - F(\overline{c}, t)\big)\, dt + \int_{-\infty}^{0} F(\overline{c}, t)\, dt \right).$$

Оцінимо два останні одновимірні інтеграли

$$\int_0^{\infty} \left|1 - F(\overline{c}, t)\right| dt \;\le\; \int_0^{\infty} \mathbf{P}\Big\{ \left|\left\langle \xi, \overline{c} \right\rangle\right| \ge t \Big\}\, dt \;=\; \mathbf{E}\left|\left\langle \xi, \overline{c} \right\rangle\right| \;\le\; \mathbf{E}\left\| \overline{\xi} \right\|$$

і аналогічно

$$\int_{-\infty}^{0} F(\overline{c}, t)\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{0} \mathbf{P}\Big\{ \left\langle \overline{\xi}, -\overline{c} \right\rangle > -t \Big\}\, dt \;=\; \int_0^{\infty} \mathbf{P}\Big\{ \left\langle \overline{\xi}, -\overline{c} \right\rangle > t \Big\}\, dt \;\le\; \mathbf{E}\left\| \overline{\xi} \right\|.$$

Збираючи разом останні оцінки та умову (23), отримуємо (19).

Наслідок доведено.

1. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Sur les fonctions indépendantes // Fund. Math. – 1937. – **29**. – P. 60 – 90.
2. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin: Springer, 1991. – 480 p.
3. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1979. – 243 p.
4. *Мацак І. К., Плічко А. М.* До закону великих чисел у банахових ґратках // Мат. вісн. НТШ. – 2009. – **6**. – С. 179 – 197.
5. *Мацак І. К.* Зауваження до порядкового закону великих чисел // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2005. – Вип. 72. – С. 84 – 92.
6. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці // Там же. – 1999. – Вип. 61. – С. 105 – 116.
7. *Прохоров Ю. В.* Об усиленном законе больших чисел // Изв. АН СССР. – 1950. – **14**, № 6. – С. 523 – 536.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
9. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
10. *Юринский В. В.* Показательные оценки для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 152 – 153.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.

Одержано 18.08.09