УДК 517.5

А. А. Кореновский, В. В. Фомичев
(Одес. нац. ун-т, Ин-т математики, экономики и механики)

САМОУЛУЧШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБРАТНОМУ НЕРАВЕНСТВУ ГЕЛЬДЕРА В ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

It is shown that the best exponents of summability of functions, which satisfy the reverse Hölder inequality in the limiting cases, can be obtained from a nonlimiting case by limiting transition.

Показано, що найкращі показники сумовності функцій, які задовольняють обернену нерівність Гельдера у граничних випадках, можна отримати з неграничного випадку при переході до границі.

1. Введение. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^d$ имеет положительную конечную лебегову меру, $0 < |E| < +\infty$. Для неотрицательной на E функции f средним значением порядка $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ называется величина

$$\mathcal{M}_r(f) = \left\{ \frac{1}{|E|} \int_E f^r(x)\, dx \right\}^{1/r}.$$

Если $\int_E f^r(x)\,dx = +\infty$, то, как обычно, считаем, что $\mathcal{M}_r(f) = 0$ при $r < 0$ и $\mathcal{M}_r(f) = +\infty$ при $r > 0$. Также полагаем

$$\mathcal{M}_0(f) = \exp\left(\frac{1}{|E|} \int_E \ln f(x)\, dx \right),$$

$$\mathcal{M}_{-\infty}(f) = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} f(x), \qquad \mathcal{M}_{+\infty}(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x).$$

Известно, что определенные таким образом средние $\mathcal{M}_r(f)$ возрастают с ростом r, $-\infty \le r \le +\infty$, т. е. если $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, то выполняется неравенство Гельдера

$$\left\{ \frac{1}{|E|} \int_E f^{\alpha}(x)\, dx \right\}^{1/\alpha} \le \left\{ \frac{1}{|E|} \int_E f^{\beta}(x)\, dx \right\}^{1/\beta}, \qquad (1)$$

причем в этом неравенстве, как и всюду в дальнейшем, средние порядка α, $\beta \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ понимаются в определенном выше смысле. Более того, если (1) обращается в равенство при некоторых $\alpha < \beta$, то функция f эквивалентна тождественной постоянной [1, с. 175]. Другими словами, если обратное к (1) неравенство

$$0 < \left\{ \frac{1}{|E|} \int_E f^{\beta}(x)\, dx \right\}^{1/\beta} \le B \left\{ \frac{1}{|E|} \int_E f^{\alpha}(x)\, dx \right\}^{1/\alpha} < +\infty \qquad (2)$$

имеет место при $B = 1$, то f эквивалентна постоянной. Пусть, например, заданы $-\infty < \alpha < 0 < \beta < +\infty$ и число $B > 1$. Тогда легко привести пример удовлетворяющей условию (2) функции f такой, что $\int_E f^r(x)\,dx = +\infty$ при любых $r < \alpha$ и $r > \beta$. Это означает, что при любом $B > 1$ условие (2) не гарантирует возможности „улучшения" показателя суммируемости функции f. Связано это с тем, что (2) предполагается выполненным лишь по одному множеству E. Если же предположить условие (2) выполненным для некоторого набора множеств E с одной и той же постоянной $B > 1$, то ситуация может существенно измениться. О таких классах функций и пойдет речь далее.

Пусть $B > 1$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$. Через $RH^{\alpha,\beta}(B)$ обозначим класс всех неотрицательных на параллелепипеде[1] $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ функций f, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta} \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha}$$

равномерно по всем параллелепипедам $R \subset R_0$. Полагаем также $RH^{\alpha,\beta} = \bigcup_{B>1} RH^{\alpha,\beta}(B)$.

Если $1 \le p \le +\infty$, то $RH^{-1/(p-1),1} \equiv A_p$ известен как класс весовых функций Макенхаупта (см. [2]), а при $1 < q \le +\infty$ получаем $RH^{1,q} \equiv G_q$ — класс Геринга (см. [3]). Фундаментальное свойство функций из этих классов, установленное в [2, 3], заключается в так называемом самоулучшении показателя суммируемости. В дальнейшем это свойство изучалось во многих работах. Отметим лишь те из них, в которых находились точные значения. Для монотонной функции из класса Геринга G_q предельный положительный показатель суммируемости установлен в [4]. Без предположения монотонности предельный положительный для класса G_q и предельный отрицательный для класса A_p показатели найдены в [5]. В [6] вычислены показатели для класса A_1, а в [7] — для класса A_∞. В многомерном случае для класса G_q вопрос изучался в [8]. Следует отметить также работы [9 – 13], в которых изучались предельные показатели суммируемости функций из классов $RH^{\alpha,\beta}$ в различных частных случаях. Наиболее полное решение задачи в одномерном случае получено в работе [14]. Более того, в [14] найдены не только предельные показатели суммируемости во всех случаях, включая предельные, но и наилучшие значения „норм" функций в соответствующих классах.

В данной работе будем следовать обозначениям, принятым в [15, 16]. Приведем один из известных в этом направлении результатов.

Теорема A [15, 16]. *Пусть функция f принадлежит классу $RH^{\alpha,\beta}(B)$ на параллелепипеде R_0, где $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $\alpha\beta \ne 0$, $B > 1$, т. е.*

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta} \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha}, \quad R \subset R_0.$$

Тогда для любого $\gamma \in (-\infty, \min(0,\alpha)) \cup (\max(0,\beta), +\infty)$, удовлетворяющего условию

[1] Здесь и далее рассматриваются только такие параллелепипеды, стороны которых параллельны координатным осям.

$$\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} > B\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}, \tag{3}$$

найдутся такие $B' \equiv B'(\gamma, \alpha, \beta, B)$ *и* $B'' \equiv B''(\gamma, \alpha, \beta, B)$, *что*

$$\frac{1}{B'}\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha} \le \left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le$$

$$\le B''\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta}, \quad R \subset R_0. \tag{4}$$

Если же число $\gamma \in (-\infty, \min(0, \alpha)) \cup (\max(0, \beta), +\infty)$ *не удовлетворяет условию* (3), *то одно из двух неравенств* (4), *вообще говоря, теряет силу, а именно, при* $\gamma < \alpha$ — *левое, а при* $\gamma > \beta$ — *правое.*

Итак, теорема А содержит предельные значения показателей суммируемости функций из класса $RH^{\alpha,\beta}(B)$ для конечных и ненулевых значений параметров α и β. В данной работе мы покажем, что в определенном смысле теорема А справедлива и в случае, когда $\alpha, \beta \in \{-\infty, 0, +\infty\}$.

2. Основные результаты. В двух следующих теоремах рассматривается случай самоулучшения показателя суммируемости функций $f \in RH^{\alpha,\beta}(B)$, когда один из показателей класса бесконечен, а другой — конечное, отличное от нуля число.

При $\alpha = -\infty$, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ условие (3) принимает вид

$$1 > B\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}.$$

Это неравенство выполняется при $\gamma \in \left(\max(0, \beta), \gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}\right)$, где $\gamma^{+}_{-\infty,\beta,B} = \beta/(1-B^{-\beta}) > 0$. Следующая теорема показывает, что в этом предельном случае теорема А остается справедливой.

Теорема 1. *Пусть функция* f *принадлежит классу* $RH^{-\infty,\beta}(B)$ *на параллелепипеде* R_0, *где* $B > 1$, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *т. е.*

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta} \le B \operatorname*{ess\,inf}_{x \in R} f(x), \quad R \subset R_0. \tag{5}$$

Тогда для любого $\gamma < \gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}$ *найдется* $B'' \equiv B''(\gamma, \beta, B)$ *такое, что*

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le B'' \operatorname*{ess\,inf}_{x \in R} f(x), \quad R \subset R_0. \tag{6}$$

Если же $\gamma \ge \gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}$, *то неравенство* (6) *теряет силу при любом* B''.

Доказательство. Неравенство (6) достаточно установить лишь для таких значений γ, что $\max(0, \beta) < \gamma < \gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}$, а для остальных γ достаточно будет применить еще неравенство (1). Зафиксируем такое γ. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}(1-\alpha/\gamma)^{1/\alpha}=1$, найдется такое число $\alpha_0<\min(0,\beta)$, что $(1-\alpha_0/\gamma)^{1/\alpha_0}>B(1-\beta/\gamma)^{1/\beta}$. В силу (1) и условия (5) имеем

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta}\le B\operatorname*{ess\,inf}_{x\in R}f(x)\le B\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0},\quad R\subset R_0.$$

Таким образом, для чисел $\alpha_0<\beta<\gamma$ выполнены все условия теоремы А, и, следовательно, найдется такое $B_0''\equiv B_0''(\gamma,\alpha_0,\beta,B)$, что

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}\le B_0''\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta},\quad R\subset R_0.$$

Это вместе с условием (5) приводит к неравенству

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}\le B\,B_0''\operatorname*{ess\,inf}_{x\in R}f(x),\quad R\subset R_0,$$

что и завершает доказательство неравенства (6).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Достаточно рассмотреть случай $d=1$ и $\gamma=\gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}$. Положим $\delta_0=(1-B^{-\beta})/\beta$, $f_0(x)=x^{-\delta_0}$ $\left(x\in R_0\equiv[0,1]\right)$. Легко убедиться в том, что функция f_0 удовлетворяет условию (5), но если $\gamma=\gamma^{+}_{-\infty,\beta,B}$, то $f_0^{\gamma}(x)=1/x$, так что интеграл в левой части (6) расходится при $R=R_0$.

Теорема доказана.

Аналогично, в случае $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\beta=+\infty$ условие (3) принимает вид

$$\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha}>B.$$

Это неравенство выполняется при $\gamma\in\left(\gamma^{-}_{\alpha,+\infty,B},\min(0,\alpha)\right)$, где $\gamma^{-}_{\alpha,+\infty,B}=\alpha/(1-B^{\alpha})<0$. Покажем, что и в таком предельном случае теорема А остается справедливой.

Теорема 2. *Пусть функция f принадлежит классу $RH^{\alpha,+\infty}(B)$ на параллелепипеде R_0, где $B>1$, $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, т. е.*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}f(x)\le B\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha},\quad R\subset R_0.\tag{7}$$

Тогда для любого $\gamma>\gamma^{-}_{\alpha,+\infty,B}$ найдется $B'\equiv B'(\gamma,\alpha,B)$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}f(x)\le B'\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma},\quad R\subset R_0.\tag{8}$$

Если же $\gamma\le\gamma^{-}_{\alpha,+\infty,B}$, то неравенство (8) *теряет силу при любом B'.*

Доказательство. Неравенство (8) достаточно установить лишь для таких значений γ, что $\gamma^-_{\alpha,+\infty,B} < \gamma < \min(0,\alpha)$, а для остальных γ достаточно будет применить еще неравенство (1). Зафиксируем такое γ. Поскольку $\lim\limits_{\beta\to+\infty}(1-\beta/\gamma)^{1/\beta} = 1$, найдется такое число $\beta_0 > \max(0,\beta)$, что $(1 - \alpha/\gamma)^{1/\alpha} > B(1-\beta_0/\gamma)^{1/\beta_0}$. В силу (1) и условия (7) имеем

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0} \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} f(x) \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha}, \quad R\subset R_0.$$

Таким образом, для чисел $\gamma < \alpha < \beta_0$ выполнены все условия теоремы A, и, следовательно, найдется такое $B_0' \equiv B_0'(\gamma,\alpha,\beta_0,B)$, что

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha} \le B_0'\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}, \quad R\subset R_0.$$

Это вместе с условием (7) приводит к неравенству

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} f(x) \le B\,B_0'\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}, \quad R\subset R_0,$$

что и завершает доказательство неравенства (8).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Достаточно рассмотреть случай $d=1$ и $\gamma = \gamma^-_{\alpha,+\infty,B}$. Положим $\delta_0 = (B^\alpha - 1)/\alpha$, $f_0(x) = x^{\delta_0}$ $(x\in R_0 \equiv [0,1])$. Легко убедиться в том, что функция f_0 удовлетворяет условию (7), но если $\gamma = \gamma^-_{\alpha,+\infty,B}$, то $f_0^\gamma(x) = 1/x$, так что интеграл в правой части (8) расходится при $R=R_0$. Поскольку $\gamma<0$, правая часть в (8) обращается в нуль.

Теорема доказана.

Теперь изучим случай конечных α,β таких, что $\alpha\beta = 0$.

При $\alpha = 0 < \beta < +\infty$ условие (3) принимает вид

$$e^{-1/\gamma} > B\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}.$$

Это неравенство выполняется при $\gamma\in(\gamma^-_{0,\beta,B},0)\cup(\beta,\gamma^+_{0,\beta,B})$, где $\gamma^\pm_{0,\beta,B}$ — положительный и отрицательный корни уравнения

$$e^{-1/\gamma} = B\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}.$$

Теорема 3. *Пусть функция f принадлежит классу $RH^{0,\beta}(B)$ на параллелепипеде R_0, где $B>1$, $0<\beta<+\infty$, т. е.*

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta} \le B\exp\left(\frac{1}{|R|}\int\limits_R \ln f(x)\,dx\right), \quad R\subset R_0. \tag{9}$$

Тогда для любого $\gamma \in (\gamma^-_{0,\beta,B}, 0) \cup (\beta, \gamma^+_{0,\beta,B})$ *существуют такие* $B' \equiv \equiv B'(\gamma, \beta, B)$ *и* $B'' \equiv B''(\gamma, \beta, B)$, *что*

$$\frac{1}{B'}\exp\left(\frac{1}{|R|}\int\limits_R \ln f(x)\,dx\right) \le \left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le$$

$$\le B''\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta}, \quad R \subset R_0. \tag{10}$$

Если же $\gamma \in \left(-\infty, \gamma^-_{0,\beta,B}\right] \cup \left[\gamma^+_{0,\beta,B}, +\infty\right)$, *то одно из двух неравенств в* (10), *вообще говоря, теряет силу, а именно, при* $\gamma \le \gamma^-_{0,\beta,B}$ — *левое, а при* $\gamma \ge \ge \gamma^+_{0,\beta,B}$ — *правое.*

Доказательство. Пусть $\gamma \in (\gamma^-_{0,\beta,B}, 0) \cup (\beta, \gamma^+_{0,\beta,B})$. Поскольку

$$\lim_{\alpha \to 0+}\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} = e^{-1/\gamma},$$

найдется такое $\alpha_0 \in (0, \beta)$, что $(1 - \alpha_0/\gamma)^{1/\alpha_0} > B(1 - \beta/\gamma)^{1/\beta}$. Из условия (9) и неравенства (1) следует

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta} \le B\exp\left(\frac{1}{|R|}\int\limits_R \ln f(x)\,dx\right) \le$$

$$\le B\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0}, \quad R \subset R_0.$$

Таким образом, для $0 < \alpha_0 < \beta$ и γ выполнены все условия теоремы А, в силу которой найдутся такие $B_0' \equiv B_0'(\gamma, \alpha_0, \beta, B)$ и $B_0'' \equiv B_0''(\gamma, \alpha_0, \beta, B)$, что

$$\frac{1}{B_0'}\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0} \le \left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le$$

$$\le B_0''\left\{\frac{1}{|R|}\int\limits_R f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{1/\beta}, \quad R \subset R_0.$$

Оценивая выражение слева с помощью неравенства (1), получаем (10).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Для этого достаточно убедиться в том, что левое неравенство в (10) теряет силу при $\gamma = \gamma^-_{0,\beta,B}$, а правое — при $\gamma = \gamma^+_{0,\beta,B}$. Можно также считать, что $d = 1$.

Нетрудно проверить, что при $\gamma_0 = \gamma^{\pm}_{0,\beta,B}$ функция $f_0(x) = x^{-1/\gamma_0}$, $x \in \in R_0 \equiv [0, 1]$, удовлетворяет условию (9), но при $\gamma = \gamma^-_{0,\beta,B}$ и $R = [0, 1]$ левая часть (10) положительна, а $\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} = 0$, так что левое неравенство в (10) не выполняется при любом B'. Если же $\gamma = \gamma^{+}_{0,\beta,B}$ и $R = [0, 1]$, то правая часть (10) конечна, а $\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} = +\infty$, так что правое неравенство в (10) не выполняется при любом B''.

Теорема доказана.

Пусть теперь $-\infty < \alpha < \beta = 0$. Тогда условие (3) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} > B\,e^{-1/\gamma}.$$

Это неравенство выполняется при $\gamma \in (\gamma^{-}_{\alpha,0,B}, \alpha) \cup (0, \gamma^{+}_{\alpha,0,B})$, где $\gamma^{\pm}_{\alpha,0,B}$ — положительный и отрицательный корни уравнения

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} = B\,e^{-1/\gamma}.$$

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит классу $RH^{\alpha,0}(B)$ на параллелепипеде R_0, где $B > 1$, $-\infty < \alpha < 0$, т. е.*

$$\exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right) \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha}, \quad R \subset R_0. \tag{11}$$

Тогда для любого $\gamma \in (\gamma^{-}_{\alpha,0,B}, \alpha) \cup (0, \gamma^{+}_{\alpha,0,B})$ существуют такие $B' \equiv B'(\gamma, \alpha, B)$ и $B'' \equiv B''(\gamma, \alpha, B)$, что

$$\frac{1}{B'}\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha} \le \left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le$$

$$\le B''\exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right), \quad R \subset R_0. \tag{12}$$

Если же $\gamma \in \left(-\infty, \gamma^{-}_{\alpha,0,B}\right] \cup \left[\gamma^{+}_{\alpha,0,B}, +\infty\right)$, то одно из двух неравенств в (12), *вообще говоря, теряет силу, а именно, при $\gamma \le \gamma^{-}_{\alpha,0,B}$ — левое, а при $\gamma \ge \gamma^{+}_{\alpha,0,B}$ — правое.*

Доказательство. Пусть $\gamma \in (\gamma^{-}_{\alpha,0,B}, \alpha) \cup (0, \gamma^{+}_{\alpha,0,B})$. Поскольку

$$\lim_{\beta \to 0-}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta} = e^{-1/\gamma},$$

найдется такое $\beta_0 \in (\alpha, 0)$, что $(1 - \alpha/\gamma)^{1/\alpha} > B(1 - \beta_0/\gamma)^{1/\beta_0}$. Из неравенства (1) и условия (11) следует

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0} \le \exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right) \le$$

$$\le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha}, \quad R\subset R_0.$$

Таким образом, для $\alpha<\beta_0<0$ и γ выполнены все условия теоремы А, в силу которой найдутся такие $B_0'\equiv B_0'(\gamma,\alpha,\beta_0,B)$ и $B_0''\equiv B_0''(\gamma,\alpha,\beta_0,B)$, что

$$\frac{1}{B_0'}\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha} \le \left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le$$

$$\le B_0''\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0}, \quad R\subset R_0.$$

Оценивая выражение справа с помощью неравенства (1), получаем (12).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Для этого достаточно убедиться в том, что левое неравенство в (12) теряет силу при $\gamma=\gamma^-_{\alpha,0,B}$, а правое — при $\gamma=\gamma^+_{\alpha,0,B}$. Можем также считать, что $d=1$.

Нетрудно проверить, что при $\gamma_0=\gamma^{\pm}_{\alpha,0,B}$ функция $f_0(x)=x^{-1/\gamma_0}$, $x\in R_0\equiv[0,1]$, удовлетворяет условию (11), но при $\gamma=\gamma^-_{\alpha,0,B}$ и $R=[0,1]$ левая часть (12) положительна, а $\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}=0$, так что левое неравенство в (12) не выполняется при любом B'. Если же $\gamma=\gamma^+_{\alpha,0,B}$ и $R=[0,1]$, то правая часть (12) конечна, а $\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}=+\infty$, так что правое неравенство в (12) не выполняется при любом B''.

Теорема доказана.

Осталось рассмотреть случай, когда один из показателей класса $RH^{\alpha,\beta}(B)$ бесконечен, а другой равен нулю.

При $-\infty=\alpha<\beta=0$ условие (3) принимает вид

$$1 > B\,e^{-1/\gamma}.$$

Это неравенство выполнено при $0<\gamma<1/\ln B$.

Теорема 5. *Пусть функция f принадлежит классу $RH^{-\infty,0}(B)$ на параллелепипеде R_0, где $B>1$, т. е.*

$$\exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right) \le B\operatorname*{ess\,inf}_{x\in R} f(x), \quad R\subset R_0. \tag{13}$$

Тогда для любого $\gamma<1/\ln B$ найдется такое $B''\equiv B''(\gamma,B)$, что

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le B''\operatorname*{ess\,inf}_{x\in R} f(x), \quad R\subset R_0. \tag{14}$$

Если же $\gamma \ge 1/\ln B$, *то неравенство* (14) *вообще говоря*, *теряет силу при любом* B''.

Доказательство. Неравенство (14) достаточно доказать лишь для $0<\gamma< < 1/\ln B$, а для остальных γ достаточно будет применить еще неравенство (1). Зафиксируем такое γ. Используя равенства $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}(1-\alpha/\gamma)^{1/\alpha} = 1$, $\lim\limits_{\beta\to 0-}(1 - \beta/\gamma)^{1/\beta} = e^{-1/\gamma}$, находим такие $-\infty < \alpha_0 < \beta_0 < 0$, что $(1-\alpha_0/\gamma)^{1/\alpha_0} > B(1-\beta_0/\gamma)^{1/\beta_0}$. В силу неравенства (1) и условия (13) имеем

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0} \le \exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right) \le$$

$$\le B\operatorname*{ess\,inf}_{x\in R} f(x) \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0}, \quad R\subset R_0.$$

Таким образом, для чисел $\alpha_0 < \beta_0 < 0 < \gamma$ выполнены все условия теоремы А, и, следовательно, найдется такое $B_0'' \equiv B_0''(\gamma, \alpha_0, \beta_0, B)$, что

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma} \le B_0''\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0}, \quad R\subset R_0.$$

Оценивая правую часть с помощью (1) и используя условие (13), получаем (14).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Достаточно рассмотреть случай $d=1$ и $\gamma=\gamma_0 = 1/\ln B$. Положим $f_0(x) = x^{-1/\gamma_0}$, $x\in R_0 \equiv [0, 1]$. Легко убедиться в том, что функция f_0 удовлетворяет условию (13), но если $\gamma=\gamma_0$, то $f_0^{\gamma}(x) = 1/x$, так что интеграл в левой части (14) расходится при $R = R_0$.

Теорема доказана.

При $0=\alpha<\beta=+\infty$ условие (3) принимает вид

$$e^{-1/\gamma} > B.$$

Это неравенство выполнено при $-1/\ln B<\gamma<0$.

Теорема 6. *Пусть функция* f *принадлежит классу* $RH^{0,+\infty}(B)$ *на параллелепипеде* R_0, *где* $B>1$, *т. е.*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} f(x) \le B\exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right), \quad R\subset R_0. \tag{15}$$

Тогда для любого $\gamma>-1/\ln B$ *найдется такое* $B'\equiv B'(\gamma, B)$, *что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} f(x) \le B'\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}, \quad R\subset R_0. \tag{16}$$

Если же $\gamma\le-1/\ln B$, *то неравенство* (16) *теряет силу при любом* B'.

Доказательство. Неравенство (16) достаточно доказать для $-1/\ln B < \gamma < 0$, а для остальных γ достаточно будет применить еще неравенство (1). Зафиксируем такое γ. Используя равенства $\lim\limits_{\beta \to +\infty}(1 - \beta/\gamma)^{1/\beta} = 1$, $\lim\limits_{\alpha \to 0+}(1 - \alpha/\gamma)^{1/\alpha} = e^{-1/\gamma}$, находим такие $0 < \alpha_0 < \beta_0 < +\infty$, что $(1 - \alpha_0/\gamma)^{1/\alpha_0} > B(1 - \beta_0/\gamma)^{1/\beta_0}$. В силу неравенства (1) и условия (15) имеем

$$\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\beta_0}(x)\,dx\right\}^{1/\beta_0} \le \operatorname*{ess\,sup}_{x \in R} f(x) \le$$

$$\le B \exp\left(\frac{1}{|R|}\int_R \ln f(x)\,dx\right) \le B\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0}, \quad R \subset R_0.$$

Таким образом, для чисел $\gamma < 0 < \alpha_0 < \beta_0$ выполнены все условия теоремы А, и, следовательно, найдется такое $B_0' \equiv B_0'(\gamma, \alpha_0, \beta_0, B)$, что

$$\frac{1}{B_0'}\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\alpha_0}(x)\,dx\right\}^{1/\alpha_0} \le \left\{\frac{1}{|R|}\int_R f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{1/\gamma}, \quad R \subset R_0.$$

Оценивая снизу левую часть с помощью неравенства (1) и используя условие (15), получаем (16).

Осталось показать, что условие на γ нельзя улучшить. Достаточно рассмотреть случай $d = 1$ и $\gamma = \gamma_0 = -1/\ln B$. Положим $f_0(x) = x^{-1/\gamma_0}$, $x \in R_0 \equiv [0, 1]$. Легко убедиться в том, что функция f_0 удовлетворяет условию (15), но если $\gamma = \gamma_0$, то $f_0^{\gamma}(x) = 1/x$, так что правая часть (16) обращается в нуль при $R = R_0$.

Теорема доказана.

3. Весовой случай. Пусть на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ задана произвольная конечная мера μ. Тогда на μ-измеримом множестве $E \subset R_0$ меры $0 < \mu(E) < +\infty$ средние порядка $r \ne 0$ для неотрицательной функции f определяются равенством

$$\mathcal{M}_{r,\mu}(f) = \left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E f^r(x)\,d\mu(x)\right\}^{1/r},$$

а при $r \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ средние $\mathcal{M}_{r,\mu}(f)$ — по аналогии с невесовым случаем. При этом неравенство Гельдера (1) остается справедливым (см. [1, с. 175]).

Если в определении класса $RH^{\alpha,\beta}(B)$ вместо меры Лебега использовать меру μ, то получим соответствующий класс $RH_{\mu}^{\alpha,\beta}(B)$. В работах [15, 16] доказан аналог теоремы А в случае абсолютно непрерывной меры μ с тем лишь отличием, что окончательность условия (3) установлена лишь для меры Лебега. Таким образом, и теоремы 1 – 6 из данной работы остаются справедливыми, если меру Лебега в них заменить произвольной абсолютно непрерывной мерой μ. При этом следует считать, что окончательность границ для изменения параметра γ в этих теоремах справедлива лишь для меры Лебега.

1. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

2. *Muckenhoupt B.* Weighted inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 533 – 565.
3. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta math. – 1973. – **130**. – P. 265 – 273.
4. *D'Apuzzo L., Sbordone C.* Reverse Hölder inequalities. A sharp result // Rend. mat. – 1990. – **10**, Ser. VII. – P. 357 – 366.
5. *Кореновский А. А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 6. – С. 32 – 44.
6. *Bojarski B., Sbordone C., Wik I.* The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$ // Stud. Math. – 1992. – **101**, № 2. – P. 155 – 163.
7. *Леончик Е. Ю., Малаксиано Н. А.* Точные показатели суммируемости функций из классов A_∞ // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 2. – С. 17 – 26.
8. *Kinnunen J.* Sharp result on reverse Hölder inequalities // Ann. Accad. sci. fenn., Math. Diss. – 1994. – **95**, Ser. A1. – P. 1 – 34.
9. *Popoli A.* Weighted reverse Hölder inequalities // Rend. Accad. sci. fis. e mat. – 1995. – **62**. – P. 187 – 212.
10. *Popoli A.* Optimal integrability in B_p^q classes // Le mat. – 1997. – **52**, № 1. – P. 159 – 170.
11. *Малаксиано Н. А.* О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 5. – С. 742 – 750.
12. *Malaksiano N. A.* The precise embeddings of the one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes // Acta sci. math. (Szeged). – 2002. – **68**. – P. 237 – 248.
13. *Васюнин В. И.* Точная константа в обратном неравенстве Гельдера для макенхауптовских весов // Алгебра и анализ. – 2003. – **15**, вып. 1. – С. 73 – 117.
14. *Васюнин В. И.* Взаимные оценки L^p-норм и функция Беллмана // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2008. – **355**. – С. 81 – 138.
15. *Кореновский А. А.* Об обратном неравенстве Гельдера // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 3. – С. 361 – 373.
16. *Korenovskii A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions // Lect. Notes Unione mat. Ital. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. – № **4**. – 188 p.

Получено 28.08.09