УДК 512.54

В. И. Сенашов (Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Красноярск)

О СИЛОВСКИХ ПОДГРУППАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП ШУНКОВА*

We study the structure of the Sylow 2-groups in the Shunkov periodic groups with almost layer-finite normalizers of finite nontrivial subgroups.

Вивчається будова силовських 2-підгруп у періодичних групах Шункова з майже шарово скінченними нормалізаторами скінченних нетривіальних підгруп.

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это конечные расширения слойно конечных групп.

В настоящей статье будем изучать периодические группы Шункова (периодические сопряженно бипримитивно конечные группы) с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы почти слойно конечен. Класс групп, удовлетворяющий этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [2] и группы, построенные А. Ю. Ольшанским [3]. В таких группах нас интересует строение силовских 2-подгрупп.

Ранее автором было доказано, что если в изучаемых группах силовская 2-подгруппа бесконечна, то она является квазидиэдральной 2-группой [4]. Напомним, что *квазидиэдральной 2-группой* мы называем расширение квазициклической 2-группы с помощью обращающего автоморфизма (название объясняется тем, что эта группа является объединением 2-групп диэдра).

Группой Шункова (сопряженно бипримитивно конечной группой) называется группа G, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

Теорема. *Пусть G — периодическая не почти слойно конечная группа Шункова с конечной силовской 2-подгруппой S. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то справедливо, по крайней мере, одно из утверждений*:

1) *пересечение S со слойно конечным радикалом централизатора центральной инволюции из S является циклическим или обобщенной группой кватернионов*;

2) *группа S может быть одного из следующих типов*:

группа диэдра;

полудиэдральная группа;

2-группа Судзуки порядка 64;

абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, $m > 1$;

$S = \langle b \rangle \wr \langle t \rangle$, *где* $b^{2^m} = t^2 = 1$, $m \geq 2$.

В дальнейшем изучается периодическая группа Шункова G, не являющаяся почти слойно конечной, нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G почти слойно конечен.

Нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых практически дословно переносятся на изучаемую группу из работы [5].

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00078) и гранта № 9 шестого конкурса-экспертизы 1999 г. научных проектов молодых ученых.

Лемма 1. *Слойно конечные радикалы двух различных бесконечных максимальных почти слойно конечных подгрупп группы G пересекаются по единичной подгруппе.*

Лемма 2. *Любая максимальная почти слойно конечная подгруппа из G является бесконечно изолированной подгруппой.*

Напомним, что подгруппа *бесконечно изолирована*, если она содержит централизаторы всех своих элементов, имеющих в ней бесконечные централизаторы.

Лемма 3. *Все инволюции в G имеют бесконечные централизаторы.*

Обозначим через V максимальную почти слойно конечную подгруппу группы G, содержащую инволюции.

Лемма 4. *В подгруппе V все инволюции с бесконечными централизаторами в V порождают конечную подгруппу.*

Лемма 5. *В подгруппе V нет элементарной абелевой подгруппы 8-го порядка с почти регулярной инволюцией в V.*

Почти регулярной в группе называется инволюция с конечным централизатором.

Лемма 6. *Множество несопряженных элементарных абелевых подгрупп из подгруппы V с конечными централизаторами в V конечно.*

Лемма 7. 1. *Все инволюции с бесконечными централизаторами в V сопряжены в V.*

2. *Если k — инволюция из V и $C_V(k)$ конечен, то k индуцирует автоморфизм в некоторой абелевой нормальной подгруппе конечного индекса из V, переводящий каждый элемент этой подгруппы в обратный.*

Через S обозначим некоторую конечную силовскую 2-подгруппу из G, i — центральная инволюция из S, H — максимальная почти слойно конечная подгруппа группы G, содержащая $C_G(i)$ (такая максимальная подгруппа найдется по лемме Цорна и по теореме 1 из [6]).

На основании теоремы 2 из [6] можем считать, что H не является сильно вложенной подгруппой в группу G. *Сильно вложенной* называется собственная подгруппа, содержащая инволюции, которая пересекается с сопряженными с ней подгруппами по подгруппам без инволюций. Отсюда согласно лемме 2 непосредственно следует, что H имеет почти регулярную инволюцию. Обозначим эту инволюцию через j. Инволюцию $j \in S$ можно выбрать в силу леммы 7.

Пусть K — подгруппа из H, порожденная всеми инволюциями с бесконечными централизаторами в H. Слойно конечный радикал группы H будем обозначать через $R(H)$.

Доказательству теоремы предпошлем леммы 8 – 11, в которых используются введенные выше обозначения.

Лемма 8. *В H все инволюции с бесконечными централизаторами порождают абелеву подгруппу порядка не большего четырех.*

Доказательство. Согласно лемме 4 все инволюции с бесконечными централизаторами в H порождают конечную подгруппу из слойно конечного радикала $R(H)$ группы H и инволюция $i \in R(H)$. Если i — единственная инволюция в $R(H)$, то лемма очевидна. Пусть в $R(H)$ имеются другие инволюции $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Рассмотрим элементы вида $a_1 = ji_1, a_2 = ji_2, \ldots, a_n = ji_n$. Поскольку j не сопряжена в H ни с одной из инволюций $i_1, i_2, \ldots, i_n$, по свойствам групп диэдра элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют четные порядки. Пусть t_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, — инволюция из a_m. Согласно теореме 2 из [7] и лемме 7 пересечение $\langle j \rangle \times \langle t_m \rangle \cap$ $\cap\, R(H)$ имеет инволюцию k_m. Снова вследствие свойств групп диэдра $k_m \in$ $\in C_G(j)$, тогда $\langle i, k_m \rangle \leq R(H) \cap C_G(j)$.

Предположим, что $i \neq k_m$ для некоторого m. Если бы в $\langle i, k_m \rangle$ порядок максимальной элементарной абелевой подгруппы был равен четырем, то в H нашлась бы элементарная абелева подгруппа восьмого порядка, содержащая j, а это невозможно по лемме 5. Значит, $\langle i, k_m \rangle = \langle b_m \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, b_m — неединичный элемент нечетного порядка.

Согласно лемме 3 и условиям теоремы $C_G(j)$ — бесконечная почти слойно конечная группа, причем инволюция i почти регулярна в ней, так как инволюция j почти регулярна в H. Заметим, что вследствие леммы 7 $C_G(j)$ имеет абелеву нормальную подгруппу L конечного индекса, в которой i индуцирует автоморфизм, переводящий каждый элемент в обратный. Если $h \in L$, то $b_m^{-1} h b_m \in L$ для произвольного $1 \leq m \leq n$, но согласно лемме 7 $i^{-1} h i = h^{-1}$, $i^{-1}(b_m^{-1} h b_m) i = b_m^{-1} h^{-1} b_m$, кроме того, $i^{-1} b_m i = b_m^{-1}$. Отсюда $b_m^{-1} h^{-1} b_m = b_m h^{-1} b_m^{-1}$ или $b_m^{-2} h^{-1} b_m^2 = h^{-1}$ для любого $h \in L$.

А поскольку b_m — элемент нечетного порядка, то $L < C_G(b_m)$. С другой стороны, $b_m \in R(H)$ и согласно лемме 2 $L < C_G(b_m) \leq H$. Но тогда $C_H(j)$ был бы бесконечным, что противоречило бы почти регулярности j в H. Следовательно, $k_m = i$ и, значит, $i \in \langle j \rangle \times \langle t_m \rangle$, что влечет $t_m \in \langle i \rangle \times \langle j \rangle$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

Если $t_m = j$ или $t_m = ij$, то $C_H(t_m) < \infty$ и $i, i_m \in C_G(t_m)$, причем $i \neq i_m$ по определению последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Аналогично случаю $k_m \in C_G(j)$ получаем противоречие с тем, что $i \neq i_m$. Таким образом, $t_m = i$ и $i_m \in C_G(i)$ для любого m.

Рассмотрим группу $X = \langle i_1, i_2, \ldots, i_n, i \rangle$. Мы показали, что $i \in Z(X)$. В то же время X и $Z(X)$ нормальны в H. Согласно лемме 7 все инволюции из X сопряжены в H, значит, X — элементарная абелева группа.

Докажем, что $|X| \leq 4$. Если $X = \langle i \rangle$, то утверждение очевидно. Пусть k_1, k_2 — две инволюции из X и $k_1, k_2 \notin C_G(j)$. Видим, что $k_1 j k_1 j, k_2 j k_2 j \in X$, значит, это инволюции и равенство $(k_1 j k_1 j)(k_1 j k_1 j) = e$ влечет $(k_1 j k_1 j)^{-1} \times j(k_1 j k_1 j) = j$. Окончательно получаем $k_1 j k_1 j, k_2 j k_2 j \in X \cap C_G(j)$. В силу леммы 5 центром группы $X \leftthreetimes \langle j \rangle$ является подгруппа $\langle i \rangle$, значит, $j k_1 j = k_1 i$ и $j k_2 j = k_2 i$. Отсюда имеем $j k_1 k_2 j = k_1 i k_2 i = k_1 k_2$. Следовательно, $k_2 = k_1 i$ и $|X| \leq 4$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Все силовские* 2*-подгруппы в* G *конечны и сопряжены.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.1 из [8].

Лемма 10. *Если* $H \setminus R(H)$ *не имеет инволюций, сопряженных с* i *в* G, *то для каждого элемента* $g \in G \setminus H$ *в группе* G *найдется инволюция* t_g, *сопряженная с* i *в* G, *такая, что* $H^g = H^{t_g}$. *Кроме того, пересечение* $D_g = H \cap H^g$ *является* t_g*-инвариантным.*

Доказательство. Пусть r — инволюция из K. Рассмотрим подгруппу $F = \langle i, g^{-1} r g \rangle$. Вследствие свойств групп диэдра $F = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle g^{-1} r g \rangle$, причем согласно строению G элемент a имеет конечный порядок. Предположим, что a — элемент четного порядка и x — инволюция из $\langle a \rangle$. Очевидно, $x \in C_G(i)$ и если силовская 2-подгруппа из F некоммутативна, то инволюции i, xi сопряжены в F, а значит, и в G, причем i, $xi \in H$. По условию леммы $xi \in R(H)$, следовательно, $x \in R(H)$ и на основании бесконечной изолированности H согласно лемме 2 $g^{-1} r g \in C_G(x) \leq H$.

Далее, по определению подгруппы K и лемме 4 $r \in R(H)$, значит, $g^{-1}rg$ согласно условию леммы также лежит в $R(H)$ и $g^{-1}rg \in K$. Но в силу леммы 7 инволюции r, $g^{-1}rg$ сопряжены в H, т. е. найдется элемент $h \in H$ такой, что $hg^{-1}rgh^{-1} = r$ и $gh^{-1} = f$, $f \in C_G(r)$. Из бесконечной изолированности H следует $f \in C_G(r) \leq H$ и $g = fh \in H$ вопреки условию. Противоречие означает, что $\langle i \rangle \times \langle x \rangle$ — силовская 2-подгруппа в F. Одновременно получили, что $xi, x \in H \backslash R(H)$ и $g^{-1}rg \notin H$.

Поскольку силовские 2-подгруппы из F сопряжены в F, $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r \in \langle i \rangle \times \langle x \rangle$ для некоторого c_r нечетного порядка из $\langle a \rangle$. Если бы $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r = x$ или xi, то он принадлежал бы $H \backslash R(H)$ и одновременно был бы сопряженным с r и, значит, по лемме 7 с i вопреки условиям леммы. Следовательно, $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r = i$ и $c_r^{-2} = ig^{-1}rg = a$, т. е. a — элемент нечетного порядка, что невозможно по предположению.

Итак, a — элемент нечетного порядка и согласно свойствам групп диэдра $i = c_r^{-1}g^{-1}rgc_r$, где $c_r \in \langle a \rangle$ и $r, i \in K < R(H)$. Отсюда $C_{H^{gc_r}}(i)$ бесконечен и $H = H^{gc_r}$ в силу лемм 1 и 2. Теперь можно записать $H^g = H^{ic_r^{-1}}$. Обозначив через t_g инволюцию ic_r^{-1}, получим первое утверждение леммы.

Далее, из того, что $gc_r \in N_G(H) = H$, следует $g \in Hc_r^{-1} = Hg$. В качестве представителя Hg выберем инволюцию $t_g = ic_r^{-1}$, т. е. $Hg = Ht_g$. Вследствие выбора элемент c_r имеет конечный нечетный порядок и $ic_ri = c_r^{-1}$, значит, инволюции i, t_g согласно свойствам групп диэдра сопряжены в G. Далее, $D_g = H \cap H^{t_g}$ и $D_g = D_1^{t_g}$, где D_1 — некоторая подгруппа из H. Поскольку t_g — инволюция, то $D_1 = D_g^{t_g} \leq H^{t_g} \cap H = D_g$ и, следовательно, $D_g = D_g^{t_g}$ и $t_g \in N_G(D_g)$.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Предположим, что $H \backslash R(H)$ не имеет инволюций, сопряженных с i в G. Пусть V — подгруппа, сопряженная с H в G, h — нетривиальный p-элемент из $D = H \cap V$. Если $C_V(h)$ бесконечен, то $C_H(h)$ также бесконечен, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $C_H(h)$ конечен и элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ из $C_V(h)$ такие, что

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

— различные подгруппы вида $H_n = g_m^{-1}Hg_n$, отличные от H. Согласно лемме 10 элемент g_n имеет представление $g_n = h_n \cdot t_n$, где $h_n \in H$, t_n — инволюция, сопряженная с i в G. Отсюда $H_n = t_nHt_n$. Обозначим через D_n пересечение подгрупп H и H_n. Пусть P_n — силовская p-подгруппа из D_n, содержащая элемент h. В соответствии с леммой 10 группа $\langle D_n, t_n \rangle$ имеет представление $D_n \leftthreetimes \langle t_n \rangle$, причем инволюцию t_n подберем таким образом, чтобы она нормализовала P_n. Тогда $t_n \in N_G(Z(P_n))$.

Среди подгрупп $Z(P_1), Z(P_2), \ldots, Z(P_n), \ldots$ лишь конечное число различных вследствие конечности централизатора $C_H(h)$. Множество различных подгрупп $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ также не может быть бесконечным, иначе нашлась бы подгруппа P_m, у которой бесконечен $C_H(Z(P_m))$, а это влекло бы включение $t_m \in N_G(Z(P_m)) \leq H$, но тогда и $g_m \in H$ вопреки выбору элемента g_m. Поэтому будем считать, не нарушая общности рассуждений, что

$$P = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = \ldots$$

и, значит, в нормализаторе $N_G(P)$ содержится бесконечно много инволюций $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Бесконечность централизатора $C_V(h)$ и конечность группы P влечет бесконечность пересечения $N_G(P) \cap V$. По условиям теоремы $N_G(P)$ почти слойно конечен, значит, на основании леммы 1 и максимальности подгруппы V получаем $N_G(P) \leq V$. Отсюда $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \in V$.

Поскольку каждая из инволюций $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ сопряжена с i в G и подгруппы V и H сопряжены, по условиям леммы ни одна из инволюций t_n, $n = 1, 2, \ldots$, не попадает в $V \setminus R(V)$, где $R(V)$ — слойно конечный радикал группы V. Тогда все инволюции $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ имеют бесконечные централизаторы в V, и получаем противоречие с леммой 4. Противоречие означает, что $C_H(h)$ бесконечен.

Лемма доказана.

Нам понадобится определение: элемент называется *строго вещественным* относительно некоторой инволюции в группе, если он сопряжением с помощью этой инволюции переводится в обратный.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Если $K = \langle i \rangle$, то $H = C_G(i)$ и согласно определению группы K в $R(H)$ существует только одна инволюция. Но так как конечная p-группа с единственной подгруппой порядка p является циклической или обобщенной группой кватернионов [9], силовские 2-подгруппы в $R(H)$ — циклические или обобщенные группы кватернионов.

Пусть $K \neq \langle i \rangle$. Предположим сначала, что $H \setminus R(H)$ не содержит инволюций, сопряженных с i в G. Согласно лемме 8 K — элементарная абелева подгруппа четвертого порядка. Тогда H имеет элемент h нечетного простого порядка p, строго вещественный относительно инволюции t из $G \setminus H$, сопряженной с i в G.

Группа $C_G(h) \leftthreetimes \langle t \rangle$ почти слойно конечна по условию теоремы. В $C_G(h)$ выберем силовскую 2-подгруппу Q. Подгруппа Q конечна вследствие леммы 9. По лемме Фраттини [10] можно считать Q t-инвариантной, т. е. $P = Q \leftthreetimes \langle t \rangle$ — 2-группа. Предположим, что Q имеет подгруппу R четвертого порядка. Согласно лемме 9 $P^c \leq S$, где c — некоторый элемент из G.

Если R^c — четверная группа Клейна, то по теореме 2 из [7] в ней есть инволюция r с бесконечным централизатором в H. Тогда $h^c \in C_G(r) \leq H$, кроме того, $t^c \in H$. Поскольку инволюции t^c, i сопряжены в G, в силу предположения $t^c \in K$. Порядок K равен четырем и $t^c \in K \lhd H$. В то же время из строгой вещественности h относительно t имеем $t^c h^c t^c = (h^c)^{-1}$, что невозможно, так как $h^c \in H$.

Следовательно, R^c — циклическая группа и $h^c \in G \setminus H$. Покажем, что и это невозможно. Действительно, если $R^c \cap K \neq 1$, то, используя бесконечную изолированность H, получаем противоречие с тем, что $h^c \in G \setminus H$. Пусть $R^c \cap K = 1$ и v — инволюция из R^c. Поскольку K — четверная группа Клейна, нормальная в H, то $K < C_G(v)$ и $|C_H(v)| < \infty$, и тогда получим противоречие с леммой 5.

Таким образом, в Q нет подгрупп четвертого порядка, следовательно, Q —

подгруппа второго порядка. Если бы $p > 3$, то $K < C_G(h)$. Однако, как мы только что заметили, это невозможно. Следовательно, $p = 3$. Заметим, что $h \notin R(H)$, так как в этом случае $N_G(h) \cap H$ было бы бесконечным и по лемме 1 $t \in N_G(h) \leq H$ вопреки выбору $t \in G \setminus H$. Согласно лемме 7 все инволюции из K сопряжены между собой в H, и так как K — четверная группа Клейна, нормальная в H, то

$$H / C_H(K) = \left(\bar{b}\right) \leftthreetimes (\bar{v}),$$

где $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{v}| = 2$ и $\bar{v}\,\bar{b}\,\bar{v} = \bar{b}^{-1}$. На основании свойств почти слойно конечных групп и представления фактор-группы $H / C_H(K)$ убеждаемся, что H имеет пару элементов b, v такую, что b — 3-элемент, v — 2-элемент, $v^{-1} b v = b^{-1}$ и $b C_G(K) = \bar{b}$, $v C_G(K) = \bar{v}$.

Докажем, что v — инволюция. Если это не так, то $\langle v \rangle \cap C_G(K)$ имеет инволюцию x. Если $x \notin K$, то $C_H(x)$ конечен, и получаем противоречие с леммой 5. Значит, $x \in K$ и $x \in C_G(b)$, где b — 3-элемент. Поскольку K — группа Клейна, то $K < C_H(b)$. Однако образ $\bar{b}$ элемента b неединичен в $H / C_G(K)$, следовательно, $|\bar{v}| = 2$.

Теперь докажем, то $b \in R(H)$. Согласно лемме 7 найдется нормальная абелева подгруппа L конечного индекса в H, на которой v действует строго вещественно, т. е.

$$v^{-1} d v = d^{-1}, \quad d \in L, \quad v^{-1} b v = b^{-1}.$$

Далее, $b^{-1} d b \in L$ и $b^{-1} d^{-1} b^{-1} = v^{-1}(b^{-1} d b) v = b d^{-1} b^{-1}$ или $d^{-1} = b^{-2} d^{-1} b^{2}$, а так как b — элемент нечетного порядка, то $b \in \langle b^2 \rangle < C_G(L)$, т. е. элемент b имеет централизатор конечного индекса в H, значит, сам элемент b принадлежит $R(H)$.

Пусть A — силовская 3-подгруппа из H, содержащая элемент h. Поскольку H почти слойно конечна, то в силу теорем С. Н. Черникова [1] и В. П. Шункова [11] силовские 3-подгруппы из H сопряжены в H и, как мы только что показали, $R(H)$ имеет 3-элемент. Следовательно, $L = A \cap R(H) \neq 1$ и $L \lhd A$. В $Z(A)$ существует элемент s третьего порядка, и так как $h \in A$, то $s \in C_G(h)$. Выберем в $C_G(h)$ некоторую силовскую 3-подгруппу Q, содержащую элементы h, s. Как показано выше, силовская 2-подгруппа из $C_G(h)$ может быть только группой порядка два. Отсюда и по теореме Брауэра – Судзуки [12, 13] $C_G(h) = V \leftthreetimes \langle y \rangle$, где $|y| \leq 2$. Очевидно, $V \lhd M = C_G(h) \leftthreetimes \langle t \rangle$. В $N_M(Q)$ найдется инволюция t_1, сопряженная с t в M по лемме Фраттини [10]. Если бы $t_1 \in H$, то, будучи сопряженной с i в G, инволюция $t_1 \in K$ по предположению, а это противоречило бы равенствам $t_1^{-1} h t_1 = h^{-1}$, $|h| = 3$ и почти регулярности h в H. Значит, $t_1 \notin H$.

Рассмотрим пересечение $D = Q \cap H$. Если Q не содержится в H, то на основании свойств нильпотентных групп $N_G(D) \neq Q$. Возьмем элемент l из разности $N_G(D) \setminus D$ и рассмотрим пересечение $H \cap H^l$. В него попал элемент простого порядка s с бесконечным централизатором в H. Согласно лемме 11 он будет иметь бесконечный централизатор и в H^l, но тогда $H = H^l$, $l \in H$, в силу лемм 1 и 2. Значит, наше предположение неверно и Q содержится в H. Повторяя это рассуждение для инволюции t_1 вместо элемента l и подгруппы

Q вместо D, получаем включение $t_1 \in H$, что противоречит доказанному выше. Это означает, что K не является четверной группой Клейна и $H = C_G(i)$.

Таким образом, если $H \setminus R(H)$ не содержит инволюций, сопряженных с i в G, то $H = C_G(i)$ и силовские 2-подгруппы в $R(H)$ — циклические или обобщенные группы кватернионов. Выше показано, что это же справедливо, если предположить, что $|K| = 2$.

Теперь выясним какое строение может иметь подгруппа S, если предполагать, что $|K| = 2$. Конечная 2-группа, в которой централизатор некоторой инволюции является четверной группой Клейна, — это либо группа диэдра, либо полудиэдральная группа [14]. Если $C_S(j) = \langle i \rangle \times \langle j \rangle = R$, то S — группа диэдра или полудиэдральная группа.

Пусть $C_S(j) \neq R$ и $j = g^{-1} i g$, $g \in G$. Поскольку $|C_H(j)| < \infty$, то $g \in G \setminus H$ и $H \neq g^{-1} H g$. Рассмотрим $D = H \cap g^{-1} H g$; V — силовская 2-подгруппа из D и $R < V < S$; P — силовская 2-подгруппа из H^g, содержащая V. По лемме 5 все инволюции из V содержатся в R и $R \leq Z(V)$. Следовательно, $R \lhd N_G(V) = L$.

Если $V = S = P$, то вследствие сопряженности силовских 2-подгрупп в H получаем

$$g^{-1} h^{-1} S h g = S = P,$$

где $h \in H$, т. е. $c = hg \in N_G(S)$. Элемент c не централизует R, иначе $c \in C_G(i) \leq H$, что невозможно. Значит, c индуцирует в R нетождественный автоморфизм третьего порядка (в силу того, что S — силовская 2-подгруппа в G и $c \notin S$, элемент c не может индуцировать в R автоморфизм порядка два). Тогда S — либо абелева группа, либо 2-группа Судзуки 64-го порядка [7].

Пусть теперь $V \neq S$, значит, и $V \neq P$. Из нормализаторного условия в S и P следует, что $L = N_G(V) \nleq H$. Если бы некоторый элемент из L не индуцировал в R автоморфизм 3-го порядка, то имело бы место, как и выше, $L < H$, а это невозможно, так как $N_P(V) \neq V$ и $P \cap H = V$. Следовательно, некоторый элемент из L индуцирует автоморфизм порядка три в R и V — либо абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64 [7]. Но $C_S(j) \nless V$ и $C_S(j) \neq R$, значит, $m > 1$ и в V найдется элемент b такой, что $b^2 = j$.

Обозначим через Q силовскую 2-подгруппу из $R(H)$ и $Q < S$. Выше показано, что она является либо циклической, либо обобщенной группой кватернионов.

Пусть сначала Q — циклическая. Согласно лемме 7 инволюция j индуцирует в некоторой абелевой нормальной подгруппе L из H автоморфизм, переводящий любой элемент в обратный. Значит, $j C_G(L) \in Z(H / C_G(L))$ и по лемме 8 $X = Q \leftthreetimes \langle j \rangle \lhd S$ и содержит все инволюции из S. Рассмотрим $W = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$. Поскольку $|b| > 2$ и Q — циклическая, вследствие того, что в p-группе вида $\langle c \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, где $|z| > 2$, все элементы порядка p порождают элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 [15], все инволюции из W содержатся в R. Но $X < W$, следовательно, все инволюции из S содержатся в K. Согласно предположению $C_S(R) = V \neq S$ и по доказанному выше $N_G(R)/C_G(R) = \langle \bar{d} \rangle \leftthreetimes \langle \bar{c} \rangle$, где $|\bar{d}| = 3$, $|\bar{c}| = 2$ и $\bar{c}^{-1} \bar{d} \bar{c} = \bar{d}^{-1}$ и c — 2-элемент из S, являющийся прообразом $\bar{c}$, d — 3-элемент из $N_G(R)$, являющийся прообразом элемента $\bar{d}$, причем $c^{-1} d c = d^{-1}$. Но $|R| = 4$ и последнее равенство невозможно, так как по доказанному выше все инволюции из S содержатся в R, а элемент d индуцирует в R автоморфизм 3-го порядка. Противоречие означает, что если Q — циклическая группа, то $C_S(R) = V = S$ и S — либо абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64.

Пусть теперь Q — обобщенная группа кватернионов. Докажем, что V абелева и $|S : V| = 2$. Выберем в Q циклическую группу $\langle a \rangle$ наибольшего порядка, нормальную в S. Поскольку группа автоморфизмов циклической группы абелева [10], фактор-группа $S / C_S(a)$ также абелева и, значит, $j_1 = c^{-1} j c = jh$ для любого $c \in S$, где $h \in C_S(a)$. Согласно лемме 7 j, j_1 индуцируют в некоторой абелевой подгруппе L, нормальной и конечного индекса в H, автоморфизм, переводящий любой элемент в обратный. Это означает, что $h = jj_1 \in R(H)$ и $h \in C_S(a) \cap Q$. А так как $\langle a \rangle = C_S(a) \cap Q$, то $h \in \langle a \rangle$ и $T = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle j \rangle \lhd S$.

Далее, $T < M = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$. Поскольку $|b| > 2$, снова вследствие того, что в p-группе вида $\langle c \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, где $|z| > 2$, все элементы порядка p порождают элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 [15], все инволюции из M и из T, в частности, содержатся в R. Но $T \lhd S$, следовательно, $R \lhd S$. Тогда $C_S(R) = V \lhd S$ и $|S : V| = 2$. Как доказано, $N_G(V)$ содержит 3-элемент d, индуцирующий в R автоморфизм третьего порядка, причем для некоторого t из S $t^{-1} d t = d^{-1}$.

Если $|t| \neq 2$, то в $\langle t \rangle \cap V$ содержится инволюция, централизующая d. Но тогда $d \in C_G(R)$, а это невозможно. Следовательно, t — инволюция из S и $t \notin V$. Таким образом, подгруппа V — либо абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64. Подгруппа $V \cap Q \lhd V$ является либо циклической порядка не меньшего четырех, либо обобщенной группой кватернионов. Но 2-группа Судзуки не имеет таких подгрупп, значит, V — абелева группа типа $(2^m, 2^m)$ и $S = \langle b \rangle \wr \langle t \rangle$.

Выясним теперь, какой может быть подгруппа S в случае, когда группа K имеет строение $K = \langle i \rangle \times \langle t \rangle$ и $H \setminus R(H)$ содержит инволюции, сопряженные с i в G. Согласно лемме 5 $R = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$ — максимальная элементарная абелева подгруппа в S и инволюция i является единственной из R с бесконечным централизатором в H. Поскольку мы предполагаем сейчас, что $H \setminus R(H)$ содержит инволюции, сопряженные с i в G, и все инволюции с бесконечными централизаторами в H сопряжены в H в силу леммы 7, будем считать, не нарушая общности рассуждений, что $j = g^{-1} i g$. Обозначим $D = H \cap H^g$. Заметим, что $j \in H \cap H^g$, причем $C_G(j) \leq H^g$. Отсюда следует, что и инволюция $i \in C_G(j)$ также принадлежит H^g, и тогда $i \in H \cap H^g$. Пусть V — силовская 2-подгруппа из D, содержащая R, причем $i \in Z(V)$. Обозначим через P и Q силовские 2-подгруппы из H и H^g соответственно, пересечение которых совпадает с V. Очевидно, $R \leq Z(V)$ (так как $i \in Z(V)$ и $j \in Z(V^g)$, V, V^g сопряжены в D, следовательно, $V^g = V^h$ для некоторого $h \in H$, $i^h \neq j$ и R максимальна в V).

Поскольку $K < P$ и $t \notin C_G(j)$, то $V \neq P$, аналогично $V \neq Q$. Следовательно, из нормализаторного условия в нильпотентных группах $N_G(V)$ не лежит в H. Очевидно, $R \lhd L = N_G(V)$.

Если бы в L не было элемента, индуцирующего в R автоморфизм 3-го порядка, то $L = C_L(R)(d)$, где $d \in P < H$ и $C_L(R) < C_G(i) \le H$. Следовательно, $L < H$ вопреки доказанному выше. Значит, в $N_G(V)$ есть элемент, индуцирующий в R автоморфизм 3-го порядка. Если бы V имела элемент 4-го порядка, то его можно было бы выбрать в V так, что $b^2 = j$, а так как $|K| = 4$, $K \lhd H$, $b \in H$, то из $b^2 = j$ следует $t \in K < C_G(j)$ вопреки доказанному выше. Это противоречие означает, что $R = V = C_P(j)$.

Если в конечной 2-группе централизатор некоторой инволюции является четверной группой Клейна, то это либо группа диэдра, либо полудиэдральная группа [14], значит P — группа диэдра или полудиэдральная группа и $K \lhd P$. Следовательно, P — группа диэдра 8-го порядка. Тогда ввиду сопряженности силовских подгрупп в H такой же будет и S.

Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71–74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
4. *Сенашов В. И.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2002. – **14**, № 4. – С. 133–152.
5. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 472–485.
6. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2003. – **15**, № 3. – С. 91–104.
7. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 2. – С. 220–248.
8. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992.
9. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
10. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
11. *Шунков В. П.* О периодических группах с некоторыми условиями конечности // Докл. АН СССР. – 1970. – **195**, № 6. – С. 1290–1293.
12. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1973.
13. *Hartley B.* Finite groups of automorphisms of locally soluble groups // J. Algebra. – 1979. – **57**, № 1. – P. 242–257.
14. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968. – 527 p.
15. *Маланьина Г. А.* Полупрямые произведения циклических групп // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**. – С. 762–765.

Получено 31.03.2004