УДК 519.21

М. С. Братійчук (Шльон. техн. ун-т, Польща),
О. В. Лукович (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗАДАЧА ПРО РОЗОРЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПРОЦЕСУ ПУАССОНА З ВІДБИТТЯМ

The paper deals with a generalized Poisson process with reflection on the levels $T > 0$. Under some conditions on the distribution of values of positive jumps of the process, representations are obtained for characteristic functions of functionals associated with the exit of considered process to the negative semiaxis.

Розглядається узагальнений пуассонівський процес із відбиттям на рівні $T > 0$. При деяких умовах на розподіл величини додатних стрибків процесу отримано зображення для характеристичних функцій функціоналів, пов'язаних із виходом вказаного процесу на від'ємну піввісь.

1. Вступ. Розглянемо узагальнений однорідний процес Пуассона $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$ із зсувом. Характеристичну функцію приростів такого процесу можна подати у вигляді

$$\mathrm{M} e^{s\xi(t)} = e^{tk(s)}, \quad \operatorname{Re} s = 0,$$

де

$$k(s) = as + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{sx} - 1\right) dF(x).$$

У цьому зображенні $\lambda > 0$ є інтенсивністю стрибків процесу $\xi(t)$, $F(x)$ — функцією розподілу величини стрибка, а коефіцієнт a — параметром зсуву і у цій статті вважається додатним.

Нехай $T > 0$ — деяке фіксоване число і $\xi(0) = x \in [0; T]$. Процес Пуассона з відбиттям на рівні T задається співвідношенням

$$\xi^+(t) = x + \xi(t) - \max\left\{0, \inf_{0 \leq u \leq t}\left(x + \xi(u) - T\right)\right\}. \tag{1}$$

Еволюція цього процесу відбувається таким чином. До моменту $\tau = \inf\{t \geq 0 : x + \xi(t) \geq T\}$ цей процес збігається з $x + \xi(t)$, після чого знаходиться на рівні T аж до моменту, коли в початковому процесі $\xi(t)$ відбудеться стрибок униз. Якщо величина цього стрибка була η, а сам стрибок відбувся в момент τ, то $\xi^+(\tau) = T - \eta$, і після моменту τ еволюція процесу $\xi^+(t)$ є ймовірнісною копією його поведінки до τ. Так означений процес із відбиттям буде строго марковським процесом.

Нас будуть цікавити флуктуації процесу $\xi^+(t)$ на інтервалі $[0; T]$. Якщо говорити більш конкретно, то в цій статті будемо розглядати такі функціонали:

$$\tau_-(T, x) = \inf\left\{t \colon \xi^+(t) \leq 0\right\},$$

$$\eta_-(T, x) = -\xi^+\left(\tau_-(T, x)\right).$$

Процеси вигляду (1) добре відомі в теорії обслуговування, теорії ризику та теорії запасів, оскільки вони є хорошою математичною моделлю об'єктів, які там розглядаються. Наприклад, в теорії запасів або в теорії водосховищ величина T має цілком природну інтерпретацію: то є гранична місткість складу або допустимий об'єм води у водосховищі. Введені вище функціонали мають до-

© М. С. БРАТІЙЧУК, О. В. ЛУКОВИЧ, 2005

сить прозорий сенс: $\tau_-(t,u)$ — перший момент, коли склад (або водосховище) буде порожнім; зазвичай цей момент називають моментом розорення; $\tau^+(t,u)$ — величина дефіциту в момент розорення.

У випадку, коли процес Пуассона не має додатних стрибків (тобто $F(0)=1$), такі процеси вже розглядалися. Тут ми згадаємо лише роботи [1, 2], де можна ознайомитися з більшою бібліографією. Якщо початковий процес має додатні стрибки, то можливі перестрибі через відбиваючу межу і, наскільки нам відомо, такі задачі раніше не розглядались. Мабуть, важко очікувати, що можна отримати явні зображення для характеристичних функцій моменту розорення без додаткових умов на процес $\xi(t)$. Тому в цій статті будемо припускати, що функція $F(x)$ для $x>0$ має щільність експоненціального типу або, більш точно, що виконується умова

$$dF(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{-\alpha_i x} \sum_{j=0}^{k_i} a_j(i) x^j \, dx, \tag{2}$$

де $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_m$, а $a_j(i)$ — дійсні числа.

Одразу зауважимо, що деякі результати справедливі і без цієї умови (наприклад, теорема 1).

Метод дослідження опирається на метод потенціалу, який був уперше запропонований В. С. Королюком в [3] і є розвиненням методу, що використовувався в [4] для дослідження блукань на відрізку.

2. Допоміжні твердження. В цьому пункті ми наведемо деякі допоміжні результати, на доведеннях яких зупинятись не будемо, оскільки вони викладені в [4] (і навіть у більш загальному випадку).

У введених вище умовах функцію $k(s)$ можна записати у вигляді

$$k(s) = as + \lambda \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sx}-1\right) dF(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \left(\frac{a_j(i)\, j!}{(\alpha_i - s)^{j+1}} - \frac{a_j(i)\, j!}{\alpha_i^{j+1}} \right).$$

Очевидно, що $k(s)$ аналітично продовжується в півплощину $\operatorname{Re} s \ge 0$ до мероморфної функції з полюсами (k_i+1)-го порядку в точках $s=\alpha_i$. Рівняння

$$k(s) = \mu, \quad \mu>0, \tag{3}$$

має в півплощині $\operatorname{Re} s>0$ рівно $n+1 = \sum_{i=1}^{m} k_i + m + 1$ коренів. Один із них — той, який лежить на інтервалі $(0,\alpha_1)$ (існування і єдиність цього кореня в смузі $0<\operatorname{Re} s<\alpha_1$ випливає з аналітичних властивостей функції $k(s)$), позначимо через $\rho_+(\mu)$, а інші корені — через $\rho_i(\mu)$, $i=1,\ldots,n$. (Занумеруємо їх так, щоб $\operatorname{Re}\rho_1(\mu) \le \operatorname{Re}\rho_2(\mu) \le \ldots \le \rho_n(\mu)$.)

Функція $(k(s)-\mu)(a(s-\rho_+(\mu)))^{-1}$ допускає в смузі $0 \le \operatorname{Re} s < \alpha$ факторизацію вигляду

$$\frac{k(s)-\mu}{a(s-\rho_+(\mu))} = g_+(s,\mu)\, g_-(s,\mu),$$

де функція $g_+(s,\mu)$ є регулярною в півплощині $\operatorname{Re} s>0$, не має там коренів та $g_+(\infty,\mu)=1$, а функція $g_-(s,\mu)$ має аналогічні властивості в півплощині $\operatorname{Re} s<\alpha_1$. Нехай

$$k_+(s,\mu) = a(s-\rho_+(\mu))\, g_+(s,\mu).$$

У роботі [5] показано, що існує функція $R_\mu(x)$ така, що

$$\int_0^\infty e^{-sx} R_\mu(x)\, dx = \frac{1}{k_+(s,\mu)}, \quad \operatorname{Re} s > \rho_+(\mu). \tag{4}$$

Якщо виконується умова (2), то (див., наприклад, [4])

$$g_-(s,\mu) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i(\mu))}{\prod_{i=1}^{m}(s-\alpha_i)^{k_i+1}},$$

а тому з (4) отримуємо

$$\int_0^\infty e^{-sx}R_\mu(x)\,dx = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i(\mu))}{\prod_{i=1}^{m}(s-\alpha_i)^{k_i+1}(k(s)-\mu)}, \quad \operatorname{Re} s > \rho_+(\mu). \tag{5}$$

Рівняння (3) може мати кратні корені лише для скінченного числа значень μ. Справді, кратні корені можуть бути лише там, де $k'(s) = 0$. Але, очевидно, можна вибрати таке $r > 0$, що всі нулі функції $k'(s)$ будуть належати множині $\{s\colon |s| \le r\}$. З іншого боку, функція $k'(s)$ може мати лише скінченну кількість нулів в обмеженій області. Позначимо їх $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Тоді рівняння (3) може мати кратні корені лише при $\mu_i = k(s_i)$, $1 \le i \le N$. Тому будемо вважати, що μ відрізняється від вказаних значень.

Оскільки

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\alpha_i)^{k_i+1}}{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i(\mu))} = 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i(\mu)}{s-\rho_i(\mu)}, \qquad b_i(\mu) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(\rho_i(\mu)-\alpha_i)^{k_j+1}}{\prod_{j\ne i}^{n}\big(\rho_i(\mu)-\rho_j(\mu)\big)},$$

то для функції

$$B_\mu(x) = R_\mu(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mu)\int_0^x e^{\rho_i(\mu)(x-y)}R_\mu(y)\,dy$$

з (5) випливає

$$\int_0^\infty e^{-sx}B_\mu(x)\,dx = \frac{1}{k(s)-\mu}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\rho_n(\mu). \tag{6}$$

3. Основні результати. Позначимо

$$\varphi(s,T,x) = \mathrm{M}e^{-\mu\tau_-(T,x)}, \quad \mu > 0.$$

Теорема 1. *Функція* $U(T,x) = \varphi(s,T,x) - 1$ *є єдиним розв'язком рівняння*

$$a\,\frac{dU(T,x)}{dx} + \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\big(u(T,x+y) - U(T,x)\big)dF(y) - \mu U(T,x) = \mu, \quad 0 < x < T, \tag{7}$$

з граничними умовами

$$U(T,x) = U(T,T), \quad x \ge T, \qquad U(T,x) = 0, \quad x \le 0,$$
$$\left.\frac{dU(T,x)}{dx}\right|_{x=T-0} = 0. \tag{8}$$

Позначимо

$$\psi_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{k_i-j} (-1)^n a_{j+n}(i) C_{j+n}^{j} x^n,$$

$$b_{ij}^{pl}(T) = \lambda \int_0^T e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^y e^{\alpha_p z} \psi_{pl}(z) B_\mu(y-z)\, dz\, dy + \delta_{ip}\delta_{jl},$$

$$b^{pl}(T) = \lambda \int_0^T e^{\alpha_p y} \psi_{pl}(y) B_\mu(T-y)\, dy,$$

$$b_1^{pl}(T) = \lambda \int_{-0}^T e^{\alpha_p (T-y)} \psi_{pl}(T-y)\, dB_\mu(y),$$

$$a_0(T) = 1 + \lambda \int_0^T \overline{F}(y) B_\mu(y)\, dy, \qquad a_1(T) = \lambda \int_{-0}^T \overline{F}(y)\, dB_\mu(y),$$

$$a_{ij}(T) = \lambda \int_0^T e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^y \overline{F}(T-z) B_\mu(y-z)\, dz\, dy,$$

$$b_0(T) = -B_\mu(T), \qquad b_1(T) = -B'_\mu(T),$$

$$b_{ij}(T) = \int_0^T e^{-\alpha_i y} y^j B_\mu(y)\, dy,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера і $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Розглянемо систему лінійних рівнянь відносно невідомих C_0, C_{00}, C_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k_i$:

$$C_0 a_0(T) + C_{00} b_0(T) + \sum_{p=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_p} C_{pl} b^{pl}(T) = d_0(f),$$

$$C_0 a_1(T) + C_{00} b_1(T) + \sum_{p=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_p} C_{pl} b_1^{pl}(T) = d_1(f), \tag{9}$$

$$C_0 a_{ij}(T) + C_{00} b_{ij}(T) + \sum_{p=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_p} C_{pl} b_{ij}^{pl}(T) = d_{ij}(f),$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, k_i,$$

де

$$d_0(f) = \int_0^T f(y) B_\mu(T-y)\, dy, \qquad d_1(f) = \int_{-0}^T f(T-y)\, dB_\mu(y),$$

$$d_{ij}(f) = \int_{-0}^T e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^y f(z) B_\mu(y-z)\, dz\, dy,$$

а $f(x)$ — деяка кусково-неперервна функція. Пізніше буде доведено, що система (9) має єдиний розв'язок.

Теорема 2. *Для* $0 < x \le T$ *має місце зображення*

$$\mathrm{M}e^{-\mu\tau_-(T,x)} = 1 + C_{00}B_\mu(x) - \lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k_i}C_{ij}\int_0^x e^{\alpha_i y}\psi_{ij}(y)B_\mu(x-y)dy +$$

$$+ \mu\int_0^x B_\mu(y)dy - \lambda C_0\int_0^x \overline{F}(T-y)B_\mu(x-y)dy, \tag{10}$$

а коефіцієнти C_0, C_{00}, C_{ij} *є розв'язком системи* (9) *з* $f(x) = \mu$.

4. Доведення результатів. Перш ніж доводити теорему 1, розглянемо, що відбувається від того моменту, коли процес $\xi^+(t)$ попадає на рівень T. Внаслідок строгої марковості цього процесу достатньо розглянути один із таких моментів. Отже, нехай $\xi^+(\eta) \ge T$, $\xi^+(\eta - 0) < T$ і $\alpha = F(0)$. Кількість стрибків процесу $\xi(t)$ вгору до першого стрибка вниз має геометричний розподіл із параметром $1-\alpha$, а оскільки проміжки між стрибками не залежать від величини стрибків і мають показниковий розподіл із параметром λ, то якщо ми позначимо через ζ час перебування процесу $\xi^+(t)$ на рівні T, починаючи від моменту η і до першого стрибка вниз, то, очевидно,

$$G(t) = \mathrm{P}\{\zeta < t\} = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^{n-1}G_n(t), \tag{11}$$

де $G_n(t)$ — розподіл Ерланга з параметрами n, λ. А якщо ми позначимо через θ величину першого стрибка вниз, то випадкові величини ζ, θ є незалежними і

$$\mathrm{P}(\theta < x) = \frac{\alpha - F(-x)}{\alpha}.$$

Доведення теореми **1.** Нехай τ_1 — перший стрибок процесу після моменту $t = 0$, а **A** позначає подію $\{\tau_1 \le (T-x)/a\}$, тобто скачок відбувся до моменту, коли пряма $x + at$ досягнула рівня T.

Стандартно застосовуючи формулу повної ймовірності, отримуємо

$$\mathrm{M}e^{-\mu\tau_-(T,x)} = \mathrm{M}e^{-\mu\tau_-(T,x)}I(A) + \mathrm{M}e^{-\mu\tau_-(T,x)}I(\overline{A}) =$$

$$= \lambda\int_0^{\frac{T-x}{a}} e^{-\lambda(u)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu u}\,\mathrm{M}e^{-\mu\tau(T,x+au+y)}dF(y)du +$$

$$+ e^{-\lambda\frac{T-x}{a}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{M}\left\{e^{-\mu\tau(T,x)}/\zeta\in dt,\ Q\in dy\right\}\mathrm{P}\{\zeta\in dt,\ Q\in dy\} =$$

$$= \lambda\int_0^{\frac{T-x}{a}} e^{-(\lambda+\mu)u}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(T, x+au+y)dF(y)du +$$

$$+ e^{-\lambda\frac{T-x}{a}}\alpha^{-1}e^{-\mu\frac{T-x}{a}}\int_0^{\infty}e^{-\mu t}\,dG(t)\int_{-\infty}^{0}\varphi(T, T+y)dF(y).$$

Якщо в передостанньому інтегралі виконати заміну змінної $x + au \to u$ і скористатись виглядом функції $G(t)$ з (11), то дістанемо рівняння

$$\varphi(T, x) = \frac{\lambda}{a}\int_x^T e^{-\frac{\lambda+\mu}{a}(u-x)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(T, u+y)\, dF(y)\, du +$$

$$+ \frac{\lambda}{\mu+\alpha\lambda} e^{-\frac{\lambda+\mu}{a}(T-x)} \int_{-\infty}^{0} \varphi(T, T+y)\, dF(y), \quad 0 < x \le T, \tag{12}$$

до якого необхідно додати граничні умови

$$\varphi(T, x) = \varphi(T, T), \quad x \ge T, \qquad \varphi(T, x) = 1, \quad x \le 0. \tag{13}$$

Рівняння (12) показує, що функція $\varphi(T, x)$ є диференційовною для $0 < x < T$. Після диференціювання одержуємо рівняння

$$a\frac{d\varphi(T, x)}{dx} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(T, x+y) - \varphi(T, x))\, dF(y) - \mu\varphi(T, x) = 0 \tag{14}$$

для $0 < x < T$. У точці $x = T$ маємо (з урахуванням (12) при $x = T$ та першої граничної умови в (13))

$$a\frac{d\varphi(T, x)}{dx}\bigg|_{x=T-0} = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(T, T+y)\, dF(y) + (\mu+\lambda)\varphi(T, T) =$$

$$= -\lambda \int_{-\infty}^{0} \varphi(T, T+y)\, dF(y) + (\mu+\alpha\lambda)\varphi(T, T) = 0. \tag{15}$$

Отже, для функції $U(T, x) = \varphi(T, x) - 1$ із (13) – (15) маємо граничну задачу (7), (8).

Доведемо тепер, що задача (7), (8) має єдиний розв'язок. Якби ця задача мала два розв'язки, то їх різниця (позначимо її $u(\cdot)$) була б розв'язком однорідної задачі

$$a\frac{du(T, x)}{dx} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (u(T, x+y) - u(T, x))\, dF(y) - \mu u(T, x) = 0 \tag{16}$$

для $0 < x < T$ і

$$\begin{gathered} U(T, x) = u(T, T), \quad x \ge T, \qquad u(T, x) = 0, \quad x \le 0, \\ \frac{du(T, x)}{dx}\bigg|_{x=T-0} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Якщо $|u(T, x)| \not\equiv 0$, то на відрізку $[0; T]$ функція $u(T, x)$ досягає ненульових максимального та мінімального значень.

Якщо вона досягає, наприклад, максимального значення в точці x_0 такій, що $0 < x_0 < T$, то з рівняння (16) отримуємо

$$\mu u(T, x_0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \big(u(T, x_0+y) - u(T, x_0)\big)\, dF(y) \le 0$$

і, отже, $u(T, x_0) = 0$. Переходячи до функції $-u(T, x)$, пересвідчуємося, що функція $u(T, x)$ не може досягати мінімального ненульового значення у внутрішній точці інтервалу $(0, T)$. Отже, ця функція досягає екстремальних значень у точках $x = 0$; T. Нехай, наприклад, $u(T, T) \ge 0$. Тоді, переходячи в рівнянні (16) до границі $x \to T - 0$ і враховуючи третю граничну умову в (17), одержуємо

$$\mu u(T,T) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (u(T,T+y) - u(T,T))\, dF(y) \le 0,$$

звідки одразу маємо $u(T,T) = 0$, а отже, $u(T,x) \equiv 0$, $0 \le x \le T$ (тому що в іншому випадку вона досягала б екстремальних значень всередині інтервалу $[0;T]$). Якщо $u(T,T) < 0$, то, переходячи до функції $-u(T,x)$, завершуємо доведення теореми.

Доведення теореми 2. Розглянемо замість граничної задачі (7), (8) більш загальну задачу

$$a\frac{dU(T,x)}{dx} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (U(T,x+y) - u(T,x))\, dF(y) - \mu U(T,x) = f(x) \tag{18}$$

для $0 < x < T$ і

$$U(T,x) = U(T,T), \quad x \ge T, \qquad U(T,x) = 0, \quad x \le 0,$$
$$\left.\frac{dU(T,x)}{dx}\right|_{x=T-0} = 0, \tag{19}$$

де $f(x)$, $x \ge 0$, — деяка обмежена кусково-неперервна функція. Перепишемо рівняння (18) з урахуванням перших двох граничних умов у (19):

$$a\frac{dU(T,x)}{dx} + \lambda \int_{-x}^{T-x} U(T,x+y)\, dF(y) - (\mu+\lambda)U(T,x) = g(x), \qquad 0 < x < T, \tag{20}$$

де $g(x) = f(x) - \lambda U(T,T)\,\overline{F}(T-x)$.

Розглянемо рівняння (20) для $x > 0$ і будемо шукати його розв'язок у класі функцій, що зростають не швидше ніж $\exp(\mathrm{Re}\,\rho_n(\mu)x)$ при $x \to \infty$. Перейдемо в (20) до перетворення Лапласа з параметром $s > \mathrm{Re}\,\rho_n(\mu)$.

Позначимо

$$\hat{U}(T,s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} U(T,x)\, dx, \qquad C_0 = U(T,T), \qquad C_{00} = aU(T,+0),$$

$$C_{ij} = \int_0^T e^{-\alpha_i y} y^j U(T,y)\, dy.$$

Враховуючи вигляд щільності $\frac{d}{dy}F(y)$ для $y > 0$, маємо

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^{T-x} U(T,x+y)\, dF(y)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{k_i} a_n(i) \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^{T-x} e^{-\alpha_i y} y^n U(T,x+y)\, dy\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{k_i} a_n(i) \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^{T} e^{-\alpha_i (y-x)} (y-x)^n U(T,y)\, dy\, dx -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{k_i} a_n(i) \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^{x} e^{-\alpha_i (y-x)} (y-x)^n U(T,y)\, dy\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha_i)x} \psi_{ij}(x)\,dx + \hat{U}(T,s) \int_0^{\infty} e^{sx}\,dF(x). \tag{21}$$

Очевидно, що

$$a \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{dU(T,x)}{dx} dx = sa\hat{U}(T,s) - C_{00}, \tag{22}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \int_{-x}^{0} U(T, x+y)\,dy\,dx = \hat{U}(T,s) \int_{-\infty}^{0} e^{sx}\,dF(x). \tag{23}$$

З (20) – (23) отримуємо

$$\hat{U}(T,s)(k(s)-\mu) = C_{00} - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha_i)x} \psi_{ij}(x)\,dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)\,dx.$$

З цієї рівності та (6) маємо

$$U(T,x) = C_{00} B_{\mu}(x) -$$

$$- \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^{x} e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_{\mu}(x-y)\,dy + \int_0^{x} g(x-y) B_{\mu}(y)\,dy,$$

або з урахуванням вигляду функції $g(x)$

$$U(T,x) = C_{00} B_{\mu}(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^{x} e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_{\mu}(x-y)\,dy +$$

$$+ \int_0^{x} f(y) B_{\mu}(x-y)\,dy - \lambda C_0 \int_0^{x} \overline{F}(T-y) B_{\mu}(x-y)\,dy. \tag{24}$$

З (24) при $x = T$ отримуємо перше рівняння для невідомих коефіцієнтів C_0, C_{00}, C_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k_i$:

$$C_0 \left(1 + \lambda \int_0^{T} \overline{F}(y) B_{\mu}(y)\,dy \right) - C_{00} B_{\mu}(T) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^{T} e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_{\mu}(T-y)\,dy =$$

$$= \int_0^{T} f(y) B_{\mu}(T-y)\,dy. \tag{25}$$

Підставляючи тепер вираз для функції $U(T,x)$ у формулу, яка визначає коефіцієнти C_{ij}, маємо

$$C_{ij} = \int_0^{T} e^{-\alpha_i y} y^j U(T,y)\,dy =$$

$$= C_{00} \int_0^{T} e^{-\alpha_i y} y^j B_{\mu}(y)\,dy - \lambda \sum_{p=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_p} C_{pl} \int_0^{T} e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^{y} e^{\alpha_p z} \psi_{pl}(z) B_{\mu}(y-z)\,dz\,dy +$$

$$+ \int_0^{T} e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^{y} f(z) B_{\mu}(y-z)\,dz\,dy - \lambda C_0 \int_0^{T} e^{-\alpha_i y} y^j \int_0^{y} \overline{F}(T-z) B_{\mu}(y-z)\,dz\,dy. \tag{26}$$

Остання гранична умова в (8) дає останнє рівняння для невідомих коефіцієнтів:

$$\lambda C_0 \int_{-0}^{T} \overline{F}(y)\,dB_\mu(y) - C_{00}\,B'_\mu(T) +$$

$$+ \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^T e^{\alpha_i (T-y)} \psi_{ij}(T-y)\,dB_\mu(y) = \int_{-0}^{T} f(T-y)\,dB_\mu(y). \qquad (27)$$

Рівняння (25) – (27) дають систему (9), і якщо в (18) покласти $f(x) = \mu$, отримаємо зображення (10).

Покажемо тепер, що система (9) має єдиний розв'язок. Для цього досить показати, що визначник системи (9) є відмінним від нуля, або, що еквівалентно, однорідна система рівнянь, яка відповідає (9), має лише нульовий розв'язок. Отже, нехай $\hat{C}_0$, $\hat{C}_{00}$, $\hat{C}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k_i$, є розв'язком однорідної системи рівнянь, яка відповідає системі (9). Тоді функція

$$U(T, x) = \hat{C}_{00} B_\mu(x) -$$

$$- \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \hat{C}_{ij} \int_0^x e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_\mu(x-y)\,dy - \lambda \hat{C}_0 \int_0^x \overline{F}(T-y) B_\mu(x-y)\,dy$$

буде розв'язком граничної задачі (16), (17) і, отже,

$$\hat{C}_{00} B_\mu(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \hat{C}_{ij} \int_0^x e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_\mu(x-y)\,dy -$$

$$- \lambda \hat{C}_0 \int_0^x \overline{F}(T-y) B_\mu(x-y)\,dy \equiv 0, \quad 0 < x \le T.$$

Покладаючи в цій тотожності $x \to +0$ та враховуючи, що $B_\mu(+0) = a^{-1} > 0$ (це випливає з 6 та тауберової теореми), отримуємо $\hat{C}_{00} = 0$. Отже, маємо

$$\int_0^x \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \hat{C}_{ij} e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) + \hat{C}_0 \overline{F}(T-y) \right) B_\mu(x-y)\,dy \equiv 0, \quad 0 < x \le T. \qquad (28)$$

Оскільки $B_\mu(+0) > 0$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\mu(x) > 0$ для $0 \le x \le \varepsilon$, і тому з (28) дістаємо

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \hat{C}_{ij} e^{\alpha_i x} \psi_{ij}(x) + \hat{C}_0 \overline{F}(T-x) \equiv 0, \quad 0 \le x \le \varepsilon.$$

Неважко зрозуміти, що функції $e^{\alpha_i x} \psi_{ij}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k_i$, $\overline{F}(T-x)$ є лінійно незалежними (див. формулу (2)) і тому $\hat{C}_{ij} = \hat{C}_0 = 0$.

Теорему 2 доведено.

Аналогічно можна отримати такий результат:

$$\mathrm{M} e^{-\mu \tau_-(T,x) - \theta \eta_-(T,x)} =$$

$$= e^{\theta x} + C_{00} B_\mu(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} C_{ij} \int_0^x e^{\alpha_i y} \psi_{ij}(y) B_\mu(x-y)\,dy +$$

$$+ (\mu - k(\theta)) \int_0^x e^{\theta y} B_\mu(x-y)\,dy - \lambda C_0 \int_0^x \overline{F}(T-y) B_\mu(x-y)\,dy,$$

а коефіцієнти C_0, C_{00}, C_{ij} є розв'язком системи (9) з $f(x) = e^{\theta x}(\mu - k(\theta))$.

5. Випадок експоненціальних розподілів. У цьому пункті розглянемо випадок, коли процес $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi(t) = a(t) + \sum_{i=1}^{N_1(t)} \xi_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} \eta_i,$$

де $N_1(t)$, $N_2(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з інтенсивностями λ_1, λ_2 відповідно, а ξ_i, η_i — незалежні випадкові величини, незалежні від $N_1(t)$, $N_2(t)$ і такі, що $\mathrm{P}\{\xi_i > x\} = e^{-\alpha x}$, $\mathrm{P}\{\eta_i > x\} = e^{-\beta x}$, $\alpha > 0, \beta > 0, x \geq 0$. У цьому випадку

$$k(s) = \ln \mathrm{M} e^{s\xi(t)} = as + \frac{\lambda_1 s}{\alpha - s} + \frac{\lambda_2 s}{s + \beta}.$$

Отже, в термінах позначень, які використовувались вище, маємо

$$F(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\beta x} J\{x \leq 0\} + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\alpha x}\right) J\{x > 0\},$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad m = 1, \quad k_1 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha,$$

$$a_0(1) = \frac{\alpha \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

У даному випадку рівняння $k(s) = \mu$, $\mu > 0$, має в півплощині $\mathrm{Re}\, s > 0$ рівно два корені: $\rho_+(\mu) \in (0; \alpha)$ та $\rho_1(\mu) > \alpha$. Тоді

$$k(s) - \mu =$$

$$= \frac{-as^3 + s^2(a(\alpha - \beta) + \lambda_1 - \lambda_2 + \mu) + s(\beta(a\alpha + \lambda_1 + \mu) + \alpha(\lambda_2 - \mu)) - \alpha\beta\mu}{(\alpha - s)(\beta + s)}. \tag{29}$$

Зрозуміло, що $\rho_+(\mu)$, $\rho_1(\mu)$ є коренями многочлена, який міститься в чисельнику в правій частині рівності (29). Якщо ми позначимо через $\rho_2(\mu)$ третій корінь цього многочлена (неважко зрозуміти, що він лежить в інтервалі $(-\beta; 0)$), то можемо записати

$$\frac{1}{k(s) - \mu} = \frac{A_+(\mu)}{s - \rho_+(\mu)} + \frac{A_1(\mu)}{s - \rho_1(\mu)} + \frac{A_2(\mu)}{s - \rho_2(\mu)}, \tag{30}$$

де

$$A_+(\mu) =$$

$$= \frac{(\alpha - \rho_+(\mu))(\beta + \rho_+(\mu))}{-3a\rho_+(\mu)^2 + 2\rho_+(\mu)(a(\alpha - \beta) + \lambda_1 - \lambda_2 + \mu) + \beta(a\alpha + \lambda_1 + \mu) + \alpha(\lambda_2 - \mu)},$$

а щоб отримати зображення для коефіцієнтів $A_1(\mu)$, $A_2(\mu)$, потрібно в цій формулі замість $\rho_+(\mu)$ записати відповідно $\rho_1(\mu)$ та $\rho_2(\mu)$.

Із формул (6), (30) отримуємо

$$B_\mu(x) = A_+(\mu) e^{\rho_+(\mu)x} + A_1(\mu) e^{\rho_1(\mu)x} + A_2(\mu) e^{\rho_2(\mu)x}.$$

Тепер теорема 2 дає наступне зображення для характеристичної функції моменту розорення:

$$M e^{-\mu\tau_-(T,x)} = 1 + C_{00} B_\mu(x) - \lambda_1 \alpha C_{10} \int_0^x e^{\alpha y} B_\mu(x - y)\, dy -$$

$$- (\lambda_1 + \lambda_2) C_0 \int_0^x \overline{F}(T - y) B_\mu(x - y)\, dy + \mu \int_0^x B_\mu(y)\, dy,$$

а коефіцієнти C_0, C_{00}, C_{10} є розв'язком системи рівнянь

$$C_0 a_0(T) + C_{00} b_0(T) + C_{10} b^{10}(T) = d_0,$$

$$C_0 a_1(T) + C_{00} b_1(T) + C_{10} b_1^{10}(T) = d_1,$$

$$C_0 a_{10}(T) + C_{00} b_{10}(T) + C_{10} b_{10}^{10}(T) = d_{10},$$

де

$$d_0 = \mu \int_0^T B_\mu(y)\,dy, \qquad d_1 = \mu B_\mu(T), \qquad d_{10} = \mu \int_0^T e^{-\alpha y} \int_0^y B_\mu(z)\,dz\,dy,$$

$$b_{10}^{10}(T) = \lambda_1 \alpha \int_0^T \int_0^y e^{-\alpha z} B_\mu(z)\,dz\,dy + 1,$$

$$b^{10}(T) = \lambda_1 \alpha \int_0^T e^{\alpha y} B_\mu(T-y)\,dy, \qquad b_1^{10}(T) = \lambda_1 \alpha \int_{-0}^T e^{\alpha(T-y)}\,dB_\mu(y),$$

$$a_0(T) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^T \overline{F}(y) B_\mu(y)\,dy, \qquad a_1(T) = (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{-0}^T \overline{F}(y)\,dB_\mu(y),$$

$$a_{10}(T) = (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^T e^{-\alpha y} \int_0^y \overline{F}(T-z) B_\mu(y-z)\,dz\,dy,$$

$$b_0(T) = -B_\mu(T), \qquad b_1(T) = -B'_\mu(T), \qquad b_{10}(T) = \int_0^T e^{-\alpha y} B_\mu(y)\,dy.$$

1. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
3. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 3 – 14.
4. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка,1990. – 263 с.
5. *Братийчук Н. С.* О резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 96 – 100.

Одержано 01.03.2004