УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВИНЕРОВСКОМ ПОТОКЕ СО СКЛЕИВАНИЕМ

We study properties of a stochastic flow that consists of Brownian particles coalescing at contact time.

Вивчаються властивості стохастичного потоку, що складається з броунівських частинок, які склеюються в момент зустрічі.

Случайный процесс, описывающий движение броуновских частиц, которые при встрече склеиваются, но не замедляют движения, был построен в [1]. Приведем вкратце соответствующее построение. Пусть W — винеровский лист на $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ [2]. Рассмотрим неотрицательную функцию $\varphi\in C_0^2(\mathbb{R})$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)du = 1.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим функцию φ_ε на $\mathbb{R}$ соотношением

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^{1/2}.$$

Пусть для каждого $u\in\mathbb{R}$ $x_\varepsilon(u,t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$dx_\varepsilon(u,t) = \int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(u,t)-p)W(dp,dt) \tag{1}$$

с начальным условием $x_\varepsilon(u,0)=u$. Известно [3], что при сделанных предположениях относительно функции φ можно выбрать модификацию случайного поля $\{x_\varepsilon(u,t);\ u\in\mathbb{R},\ t\ge 0\}$, непрерывную по совокупности переменных. Случайный процесс $\{x_\varepsilon(u,t);\ t\ge 0\}$ при фиксированном $u\in\mathbb{R}$ можно рассматривать как процесс движения частицы, находившейся в начальный момент времени в точке u и движущейся под влиянием случайных возмущений W [2]. Отметим, что $\{x_\varepsilon(u,t);\ t\ge 0\}$ является непрерывным мартингалом с характеристикой t и, следовательно, винеровским процессом. Таким образом, x_ε — семейство винеровских процессов. При этом для разных начальных точек u_1 и u_2 случайные процессы зависимы (в вероятностном смысле), так как из неравенства $u_1 < u_2$ следует

$$\mathrm{P}\{\forall t\ge 0:\ x_\varepsilon(u_1,t) < x_\varepsilon(u_2,t)\} = 1.$$

В работе [1] доказано, что для произвольных $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, $n\ge 1$, случайные процессы $\{x_\varepsilon(u_1,t),\ \ldots,\ x_\varepsilon(u_n,t);\ t\in[0;T]\}$ сходятся по распределению при $\varepsilon\to 0+$ в пространстве $C([0;T],\mathbb{R}^n)$ для каждого T. Предельное распределение на $C([0;+\infty),\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mu_{u_1\ldots u_n}$. Семейство $\{\mu_{u_1\ldots u_n};\ u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{R},\ n\ge 1\}$ является согласованным семейством конечномерных распределений и, согласно теореме Колмогорова, ему соответствует случайный процесс $\{x(u,\cdot);\ u\in\mathbb{R}\}$ со значениями в $C([0;+\infty))$. При этом меры $\mu_{u_1\ldots u_n}$ на $C([0;+\infty),\mathbb{R}^n)$ могут быть полностью охарактеризованы следующим набором свойств:

1) на множестве $G\subset C([0;+\infty),\mathbb{R}^n)$ вида

$$G = \{\vec{f}: f_k(0) = u_k,\ k = 1, \ldots, n,$$
$$\forall t \ge 0: f_1(t) < f_2(t) < \ldots < f_n(t)\}$$

мера $\mu_{u_1 \ldots u_n}$ совпадает с распределением стандартного n-мерного винеровского процесса, стартовавшего из точки $(u_1, \ldots, u_n)$;

2) одномерные распределения $\mu_{u_1 \ldots u_n}$ (т. е. соответствующие выбору любой одной координаты) являются винеровскими мерами;

3) $\mu_{u_1 \ldots u_n}(\overline{G}) = 1$, где $\overline{G}$ — замыкание G в $C([0; +\infty), \mathbb{R}^n)$ в топологии равномерной сходимости на компактах.

Отметим, что процесс x имеет ряд хороших свойств. Так, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $\{x(u, \cdot);\ u \in \mathbb{R}\}$ — *однородный марковский процесс в* $C([0; +\infty))$, *непрерывный по вероятности.*

Доказательство. Построим предполагаемую переходную функцию для процесса x. Пусть $f \in C([0; +\infty))$, $u \ge 0$, w — стандартный одномерный винеровский процесс, Δ — борелевское подмножество $C([0; +\infty))$. Определим случайный момент времени

$$\tau = \inf\{t: w(t) + u + f(0) = f(t)\}.$$

Положим

$$w_f^u(t) = \begin{cases} w(t) + u + f(0), & t \le \tau, \\ f(t), & t \ge \tau. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$P_u(f, \Delta) = \mathrm{P}\{w_f^u \in \Delta\}.$$

То, что P_u по второму аргументу является вероятностной мерой, очевидно. Докажем измеримость P_u по первому аргументу. Для этого рассмотрим на $C([0; +\infty))^2$ операцию склеивания функций. Пусть

$$A = \{(f, g) \in C([0; +\infty))^2: f(0) \le g(0)\}.$$

Заметим, что A — борелевское подмножество $C([0; +\infty))^2$. Для $(f, g) \in A$ определим

$$t_0 = \inf\{t: g(t) = f(t)\},$$

$$g_f(t) = \begin{cases} g(t), & t \le t_0, \\ f(t), & t \ge t_0. \end{cases}$$

Отображение

$$C([0; +\infty))^2 \ni (f, g) \mapsto g_f \in C([0; +\infty))$$

является измеримым по совокупности переменных. Действительно, определим в $C([0; +\infty))^2 \times [0; +\infty)$ множество

$$B = \{(f, g, t): f(t) = g(t)\}.$$

Легко проверить, что B — замкнутое множество в $C([0; +\infty))^2 \times [0; +\infty)$. Следовательно [4], отображение

$$(f, g) \mapsto \tau_{f,g} = \inf\{t: f(t) = g(t)\}$$

является измеримым как дебют множества B. С учетом этого факта измеримость операции $(f, g) \mapsto g_f$ очевидна.

Теперь отметим, что

$$P_u(f, \Delta) = \mathrm{M}\,\mathrm{I}_\Delta\big((w+u)_f\big).$$

Поэтому измеримость $P_u(f,\Delta)$ по f является следствием стандартных аргументов теории меры [4]. Проверим, что семейство $\{P_u,\ u \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет уравнению Чепмена – Колмогорова. Рассмотрим $f \in C([0;+\infty])$ и числа $u_1 \geq 0$ и $u_2 \geq 0$. Для описания ядер P_{u_1}, P_{u_2} и $P_{u_1+u_2}$ возьмем два независимых стандартных винеровских процесса w_1 и w_2. Тогда для произвольного борелевского Δ в $C([0;+\infty))$

$$\int\limits_{C([0;+\infty))} P_{u_2}(h,\Delta) P_{u_1}(f, dh) = \mathrm{M}\,\mathrm{I}_\Delta\big(w_2 + u_2 + u_1 + f(0)\big)_{(w_1+u_1+f(0))_f}.$$

Для того чтобы выражение в правой части было более простым, введем в рассмотрение случайные моменты

$$\tau_1 = \inf\{t:\ w_2(t) + u_2 = w_1(t)\},$$

$$\tau_2 = \inf\{t:\ w_1(t) + u_1 + f(0) = f(t)\}.$$

Построим новый случайный процесс w следующим образом:

$$w(t) = \begin{cases} w_2(t), & t \leq \tau_1, \\ w_1(t) - u_2, & t \geq \tau_1. \end{cases}$$

Процесс $\{w(t);\ t \geq 0\}$ является стандартным винеровским процессом. Действительно, τ_1 — момент остановки относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t = \sigma(w_1(s), w_2(s),\ s \leq t),\ t \geq 0\}$. Поэтому в силу строго марковского свойства [3] процессы $w_2(s+\tau_1) - w_2(\tau_1)$ и $w_1(s+\tau_1) - w_1(\tau_1)$, $s \geq 0$, являются стандартными винеровскими процессами, не зависящими от σ-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_1}$. Следовательно, процесс

$$w(t) = w_2(1)\mathrm{I}_{\{t\leq\tau_1\}} + \big[w_2(\tau) + (w_1(t) - w_1(\tau_1))\big]\mathrm{I}_{\{t>\tau_1\}} =$$

$$= w_2(t)\mathrm{I}_{\{t\leq\tau_1\}} + \big[w_1(\tau_1) - u_2 + w_1(t) - w_1(\tau_1)\big]\mathrm{I}_{\{t>\tau_1\}} =$$

$$= w_2(1)\mathrm{I}_{\{t\leq\tau_1\}} + \big(w_1(t) - u_2\big)\mathrm{I}_{\{t>\tau_1\}}$$

является стандартным винеровским процессом. Теперь несложно проверить, что

$$(w_2 + u_2 + u_1 + f(0))_{(w_1+u_1+f(0))_f} = (w + u_2 + u_1 + f(0))_f.$$

Тем самым

$$\int\limits_{C([0;+\infty))} P_{u_2}(h,\Delta) P_{u_1}(f,dh) =$$

$$= \mathrm{P}\{(w + u_2 + u_1 + f(0))_f \in \Delta\} = P_{u_1+u_2}(f,\Delta).$$

Следовательно, семейство $\{P_u\}$ удовлетворяет уравнению Чепмена – Колмогорова. Построим на $\mathbb{R}$, как на параметрическом множестве, однородный марковский процесс с переходными вероятностями $\{P_u\}$. Обозначим через μ_v распределение в $C([0;+\infty))$ винеровского процесса, стартовавшего из v. Заметим, что для произвольных $u \geq 0$, $v \in \mathbb{R}$, аналогично доказанному ранее,

$$\int\limits_{C([0;+\infty))} P_u(h,\Delta)\mu_v(dh) = \mu_{v+u}(\Delta). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь семейство конечномерных распределений вида

$$\nu_{v_1\ldots v_n}(\Delta_1\times\ldots\times\Delta_n) =$$
$$= \int\limits_{\Delta_1}\mu_{v_1}(dh_1)\int\limits_{\Delta_2}P_{v_2-v_1}(h_1,dh_2)\ldots\int\limits_{\Delta_{n-1}}P_{v_n-v_{n-1}}(h_{n-1},\Delta_n). \tag{3}$$

Здесь $v_1\le\ldots\le v_n$, $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ — борелевские подмножества $C([0;+\infty))$. В силу (2) и того факта, что $\{P_u\}$ удовлетворяют уравнению Чепмена — Колмогорова, семейство $\{\nu_{v_1\ldots v_n}\}$ является семейством согласованных конечномерных распределений, которому соответствует марковский процесс на $\mathbb{R}$ со значениями в $C([0;+\infty))$. Отметим теперь, что меры $\{\nu_{v_1\ldots v_n}\}$ совпадают с конечномерными распределениями процесса x. Это следует из построения ядер $\{P_u\}$ и определения (3). Следовательно, x является марковским процессом.

Рассмотрим для $v_1\le v_2$ и произвольного $T>0$ величину

$$\eta_{v_1v_2} = \sup_{[0;T]}\left|x(v_1,t) - x(v_2,t)\right|.$$

Величина $\eta_{v_1v_2}$ имеет такое же распределение, как

$$\eta'_{v_1v_2} = \sup_{[0;T]}(\tilde{w}(t)+(v_2-v_1)),$$

где процесс $\tilde{w}$ получен из стандартного винеровского процесса w следующим образом:

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases}\sqrt{2}\,w(t), & t\le\tau,\\ -(v_2-v_1), & t\ge\tau,\end{cases}$$
$$\tau = \inf\left\{t:\sqrt{2}\,w(t) = -(v_2-v_1)\right\}.$$

Следовательно,

$$\forall\,\varepsilon>0:\ \mathrm{P}\{\eta_{v_1v_2}>\varepsilon\} = \mathrm{P}\{\eta'_{v_1v_2}>\varepsilon\}\to 0,\quad v_2-v_1\to 0+.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Процесс x имеет cadlág модификацию как случайный процесс, заданный на $\mathbb{R}$ и принимающий значения в пространстве $C([0;1])$.*

Доказательство. Для каждого $n\ge 1$ обозначим через A_n множество чисел $\{k/2^n;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Выберем последовательность чисел $\{t_n;\ n\ge 1\}$ монотонно убывающей к 0 так, чтобы

$$\mathrm{P}\left\{\exists n_0\,\forall n\ge n_0\,\forall r\in A_n\bigcap[-n;n]:\ \sup_{\substack{\tau\in[0;t_n]\\ s\in[0;1-t_n]}}\left|x(r,s+\tau)-x(r,s)\right| < \frac{1}{n}\right\} = 1. \tag{4}$$

Такую последовательность можно выбрать в силу леммы Бореля – Кантелли с учетом того факта, что при каждом r случайный процесс $\{x(r,s)-r;\ s\in[0;1]\}$ является стандартным винеровским процессом.

Далее, для каждого $u\in\mathbb{R}$ определим случайную функцию $\tilde{x}(u,\cdot)$ следующим образом. Пусть $\{0=s_{n1}<\ldots<s_{nm_n}=1,\ n\ge 1\}$ — последовательность вложенных разбиений отрезка $[0;1]$ такая, что

$$\forall\, n \geq 1: \max_{k=0,\ldots,m_n-1} (s_{nk+1} - s_{nk}) \leq t_n.$$

Для каждого числа s_{nk} положим

$$\tilde{x}(u, s_{nk}) = \lim_{\substack{r \to u+ \\ r \in A}} x(r, s_{nk}).$$

Здесь $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и предел существует для каждого $u \in \mathbb{R}$ и всех ω из вероятностного пространства в силу монотонности x по пространственной переменной. Отметим теперь, что в силу (4) полученные случайные функции равномерно непрерывны на множестве $\{s_{nk};\, 0 \leq k \leq m_n,\, n \geq 1\}$ при всех u и при всех ω из множества полной вероятности Ω_1, не зависящего от u. Поэтому $\tilde{x}(u, \cdot)$ при всех $u \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \Omega_1$ продолжается однозначно до непрерывной функции на $[0;\, 1]$. Докажем, что для произвольного $\omega \in \Omega_1$ $\tilde{x}$ является cadlág функцией, заданной на $\mathbb{R}$ и принимающей значения в $C([0;1])$. Для этого заметим, что по построению для произвольного $l \geq 1$ и $\omega \in \Omega_1$ функции $\{\tilde{x}(u, \cdot);\, u \in [-l; l]\}$ образуют равностепенно равномерно непрерывное семейство. При этом в силу монотонности x по r и определения $\tilde{x}$ для каждого числа s_{nk}

$$\tilde{x}(u, s_{nk}) = \lim_{v \to u+} \tilde{x}(v, s_{nk}),$$

$$\exists \lim_{v \to u-} \tilde{x}(v, s_{nk}) = \tilde{x}(u-, s_{nk}).$$

Из равностепенной равномерной непрерывности следует, что в $C([0;1])$

$$\tilde{x}(u, \cdot) = \lim_{v \to u+} \tilde{x}(v, \cdot),$$

$$\exists \lim_{v \to u-} \tilde{x}(v, \cdot) = \tilde{x}(u-, \cdot).$$

Проверим, что $\tilde{x}$ является модификацией x. Действительно, в силу стохастической непрерывности x и определения $\tilde{x}$ для любого $u \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\{\forall n \geq 1\ \forall k = 0, \ldots, m_n : x(u, s_{nk}) = \tilde{x}(u, s_{nk})\} = 1.$$

Поскольку $x(u, \cdot)$ и $\tilde{x}(u, \cdot)$ — непрерывные случайные функции, то

$$x(u, \cdot) = \tilde{x}(u, \cdot) \quad \text{п. н.}$$

Теорема доказана.

Немного видоизменив доказательство приведенной теоремы, можно доказать существование cadlág модификации x как случайного процесса со значениями в $C([0; +\infty))$.

Рассмотрим теперь для cadlág модификации процесса x случайный процесс

$$m(t) = -\inf\{u \leq 0 : x(u, t) = x(0, t)\}, \quad t \geq 0.$$

Одномерные распределения процесса m легко вычисляются. А именно, $\forall\, t > 0$, $a \geq 0$:

$$\mathrm{P}\{m(t) \geq a\} = \mathrm{P}\{x(-a, t) = x(0, t)\}.$$

Одномерные случайные процессы $x(0, \cdot)$ и $x(-a, \cdot)$ таковы, что их разность $x(0, \cdot) - x(-a, \cdot)$ представляет собой винеровский процесс с дисперсией $\sqrt{2}$, в момент времени 1 стартовавший из a и равный 0 после первого попадания в 0. Поэтому

$$\mathrm{P}\{m(t) \geq a\} \;=\; 2\int\limits_{a/\sqrt{2\pi t}}^{+\infty} e^{-x^2/2t}dx \;=\; \mathrm{P}\left\{\sup_{[0;t]} w(s) \;>\; \frac{a}{\sqrt{2}}\right\},$$

где w — стандартный винеровский процесс. Отметим, что несмотря на то, что одномерные распределения случайных процессов m и

$$m'(t) \;=\; \sup_{[0;t]} \sqrt{2}\,w(s), \quad t \geq 0,$$

совпадают, эти процессы имеют различные распределения (как случайные процессы). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим случайные моменты времени, связанные с m и m':

$$\tau_a \;=\; \inf\{t : m(t) \geq a\},$$

$$\tau'_a \;=\; \inf\{t : m'(t) \geq a\}.$$

Заметим, что

$$\tau_a \;=\; \inf\{t : x(-a, t) = x(0, t)\}.$$

С учетом описания конечномерных распределений процесса x (см. [1]) и симметрии справедливо равенство

$$\mathrm{P}\{\tau_1 = \tau_2\} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Действительно, событие $\tau_1 = \tau_2$ наступает тогда и только тогда, когда склейка $x(-1, \cdot)$ и $x(-2, \cdot)$ происходит не позже склейки $x(0, \cdot)$ и $x(-1, \cdot)$.

С другой стороны, в силу непрерывности винеровского процесса

$$\mathrm{P}\{\tau'_1 = \tau'_2\} \;=\; 0.$$

В приведенном рассуждении использовано то, что x, рассматриваемый как поток случайных отображений, может склеивать различные точки. Свойства x, как стохастической полугруппы, планируется исследовать в отдельной статье. Здесь мы приведем лишь утверждения об отображениях $x(\cdot, t)$ при фиксированном t.

Теорема 3. *Пусть* $t \geq 0$. *Тогда вероятность того, что* $x(\cdot, t)$, *как отображение из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, *разрывно, равна* 1.

Доказательство. Рассмотрим вначале сужение $x(\cdot, t)$ на произвольный отрезок $[a; b]$. Определим случайные величины

$$\zeta_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(x\left(a + \frac{k+1}{n}(b-a),\, t\right) - x\left(a + \frac{k}{n}(b-a),\, t\right)\right)^2.$$

Поскольку $x(\cdot, t)$ — неубывающая функция, то

$$\zeta_n \;\geq\; \zeta_{n+1} \;\geq\; 0, \qquad n \geq 1.$$

При этом

$$\mathrm{M}\zeta_n \;=\; n\mathrm{M}\,w_n^+(t)^2,$$

где w_n^+ — стандартный винеровский процесс, стартовавший из $(b-a)/n$ и равный 0 после попадания в 0. Поэтому

$$\mathrm{M}\zeta_n \;=\; n\int\limits_0^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-(x-(b-a)/n)^2/2t} - e^{-(x+(b-a)/n)^2/2t}\right)dx.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\mathrm{M}\zeta_n \to \frac{b-a}{2t}\int_0^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx, \quad n \to \infty.$$

Воспользуемся теперь теоремой Лебега о мажорируемой сходимости по отношению к последовательности $\{\zeta_n;\ n \ge 1\}$. Имеем

$$\mathrm{M} \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \frac{b-a}{2t}\int_0^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx.$$

Поэтому с положительной вероятностью

$$\zeta_\infty = \lim_{n\to\infty} \zeta_n > 0. \tag{5}$$

Поскольку функция $x(\cdot, t)$ монотонна, то на множестве тех ω, для которых справедливо (5), $x(\cdot, t)$ имеет скачки на $[a, b]$.

Рассмотрим теперь два отрезка: $[a; a+1]$ и $[b; b+1]$. Пусть $\zeta_\infty(a)$ и $\zeta_\infty(b)$ — случайные величины, построенные по этим отрезкам так, как это было сделано выше. Тогда с учетом описания конечномерных распределений процесса x

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \left|\mathrm{P}\{\zeta_\infty(a) < \alpha,\ \zeta_\infty(b) < \beta\} - \mathrm{P}\{\zeta_\infty(a) < \alpha\}\mathrm{P}\{\zeta_\infty(b) < \beta\}\right| \to 0, \tag{6}$$

$$|b-a| \to +\infty,$$

$$\mathrm{P}\{\zeta_\infty(a) < \alpha\} = \mathrm{P}\{\zeta_\infty(b) < \alpha\}. \tag{7}$$

Соотношение (6) остается справедливым и в том случае, когда отрезки с левыми концами в a и b имеют различную (но фиксированную) длину. Теперь можно построить последовательность $\{a_n;\ n \ge 1\}$ такую, что для случайных величин $\{\zeta(a_n);\ n \ge 1\}$, соответствующих отрезкам $\{[a_n; a_{n+1}];\ n \ge 1\}$, будет справедливо соотношение

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\zeta(a_n) > 0\}\right) = 1.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в [5] показан результат, который применительно к процессу x можно сформулировать следующим образом. Для произвольных $t > 0$ и $u \in \mathbb{R}$ на множестве вероятности 1 справедливо включение

$$x(u, t) \in \overline{\{x(r,t);\ r \in \mathbb{Q}\}}.$$

Однако, поскольку указанное множество вероятности 1, вообще говоря, зависит от u, отсюда не следует выполнение утверждения теоремы 3.

1. *Dorogovtsev A. A.* One Brownian stochastic flow // Theory Stochast. Processes. – 2004. – **10 (26)**, № 3-4. – P. 21 – 25.
2. *Kotelenez P.* A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean - Vlasov type with mass conservation // Probab. Theory Related Fields. – 1995. – **102**. – P. 159 – 188.
3. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press., 1990. – 346 p.
4. *Dellacherie C.* Capacites et processus stochastiques. – Berlin: Springer, 1980.
5. *Darling R. W. R.* Constructing nonhomeomorphic stochastic flows // Mem. AMS. – 1987. – **10**, № 376. – 98 p.

Получено 01.12.2004