УДК 519.21

М. І. Портенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

We construct a Wiener process on a plane with semipermeable membrane situated on a fixed circle and acting in the normal direction. The method of constructing takes into account the symmetry properties both of a circle and the Wiener process. For this reason, the method is reduced to the perturbation of a Bessel process by drift coefficient characterized as a δ-function concentrated at a point. This leads to a pair of renewal equations which determine the transition probability of radial part of the process desired.

Побудовано вінерів процес на площині з напівпрозорою мембраною, що розташована на фіксованому колі і діє в нормальному напрямку. Метод побудови враховує властивості симетрії як кола, так і вінерового процесу. Тому справа зводиться до збурення бесселевого процесу коефіцієнтом переносу, що має характер δ-функції, зосередженої в точці. Це й приводить до пари рівнянь відновлення, з допомогою яких знаходиться ймовірність переходу радіальної частини шуканого процесу.

1. Вступ. Загальні методи побудови дифузійних процесів, які описують фізичне явище дифузії в середовищах із розташованими на деяких поверхнях мембранами, не враховують властивостей симетрії як цих поверхонь, так і коефіцієнтів, що характеризують дифузійні характеристики середовища (див. [1]). Природно сподіватись, що врахування цих властивостей приводить до значного спрощення побудови відповідного процесу. Метою цієї роботи якраз і є показати, що таке спрощення справді має місце на прикладі двовимірного вінерового процесу з мембраною, що розташована на колі і діє по нормалі.

Відомо (див., наприклад, [2]), що вінерів процес на площині в полярних координатах можна записати у вигляді $(r(t), \theta(t))_{t\geq 0}$, де $r(\cdot)$ — радіальна частина процесу, а $\theta(\cdot)$ — його циркулярна частина. Процес $(r(t))_{t\geq 0}$ називається бесселевим процесом і є неперервним однорідним процесом Маркова на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ з щільністю ймовірності переходу (щодо лебегової міри на $\mathbb{R}_+$)

$$h_0(t, \rho, r) = \frac{r}{t}\exp\left\{-\frac{\rho^2 + r^2}{2t}\right\} I_0\left\{\frac{\rho r}{t}\right\},$$

де $t > 0$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$, $I_0(\cdot)$ — так звана модифікована бесселева функція нульового порядку (див. [2]),

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} / (n!)^2.$$

Що стосується циркулярного процесу, то його можна записати у вигляді

$$\theta(t) = \theta_0\left(\int_0^t r(s)^{-2}\, ds\right), \qquad t \geq 0,$$

де $(\theta_0(t))_{t\geq 0}$ — не залежний від процесу $r(\cdot)$ вінерів процес на колі радіуса 1, тобто неперервний однорідний процес Маркова на $[0, 2\pi]$ (точки 0 та 2π ототожнюються) з щільністю ймовірності переходу (щодо лебегової міри на $[0, 2\pi]$)

$$g_0(t, \theta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(\zeta - \theta + 2k\pi)^2\right\},$$

де $t > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\zeta \in [0, 2\pi)$, а $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

Бесселів процес в $\mathbb{R}_+$ можна розглядати як дифузійний з одиничним коефіцієнтом дифузії та коефіцієнтом переносу $\alpha_0(\rho) = (2\rho)^{-1}$, $\rho > 0$. Зафіксуємо тепер деяке число $a > 0$ і параметр $q \in [-1, 1]$. Через $\delta_a(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, позначимо δ-функцію Дірака, зосереджену в точці $\rho = a$, тобто узагальнену функцію, яка діє на пробну функцію φ на $\mathbb{R}_+$ за правилом $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Наше завдання полягає в побудові узагальненого дифузійного процесу $\tilde{r}(t)$, $t \geq 0$, в $\mathbb{R}_+$, у якого коефіцієнт дифузії залишається одиничним, а коефіцієнт переносу $\alpha(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, записується у вигляді

$$\alpha(\rho) = \alpha_0(\rho) + q\delta_a(\rho), \qquad \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Побудові цього процесу присвячено пп. 2, 3. Якщо процес $\tilde{r}(\cdot)$ вже побудовано і якщо взяти не залежний від нього варіант процесу $\theta_0(\cdot)$ і покласти

$$\tilde{\theta}(t) = \theta_0\left(\int_0^t \tilde{r}(s)^{-2}\, ds\right), \qquad t \geq 0,$$

то процес $\left(\tilde{r}(t), \tilde{\theta}(t)\right)_{t \geq 0}$ і буде заданим у полярних координатах шуканим процесом, тобто вінеровим процесом на площині, у якого на колі радіуса a з центром у початку координат розташована мембрана, яка діє в нормальному напрямку і має своїм коефіцієнтом прозорості число q.

Якщо $q = -1$, то частина цього процесу в крузі $B_a(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a\right\}$ є вінеровим процесом у цьому крузі з миттєвим відбиттям по нормалі на його межі, тобто на колі $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = a\right\}$. Якщо $q = +1$, то частина побудованого процесу в доповненні до цього круга є вінеровим процесом там із миттєвим відбиттям по нормалі на тому ж колі, але в протилежному напрямку. Якщо $q = 0$, то мембрани немає. В усіх інших випадках маємо двовимірний вінерів процес із напівпрозорою мембраною на колі $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = a\right\}$.

2. Рівняння відновлення. Для $t > 0$, $\rho \in \mathbb{R}_+$ та $r \in \mathbb{R}_+$ позначимо через $Q(t, \rho, r)$ похідну по ρ функції h_0

$$Q(t, \rho, r) = \frac{r}{t^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2 + r^2}{2t}\right\}\left[r I_1\left(\frac{\rho r}{t}\right) - \rho I_0\left(\frac{\rho r}{t}\right)\right], \tag{1}$$

де $I_1(\cdot)$ — модифікована бесселева функція 1-го порядку

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} / n!(n+1)!$$

(ми скористались рівністю $I_0'(z) = I_1(z)$). Покладемо $H_\rho(t) = Q(t, \rho, \rho)$ для $t > 0$, $\rho > 0$, тобто

$$H_\rho(t) = \frac{\rho^2}{t^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{t}\right\}\left[I_1\left(\frac{\rho^2}{t}\right) - I_0\left(\frac{\rho^2}{t}\right)\right]. \tag{2}$$

Оскільки $I_1(z) < I_0(z)$ при всіх $z \in \mathbb{R}^1$, то $H_\rho(t) < 0$ при всіх $t > 0$. Зрозуміло, що при фіксованому $\rho > 0$ маємо

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 H_\rho(t) = -\rho^2. \tag{3}$$

Дослідити поведінку функцій H_ρ та Q при $t \downarrow 0$ можна з допомогою асимптотичної формули (див. [3, с. 147])

$$I_\nu(z) = (2\pi z)^{-1/2} \exp\{z\}\left(1 + O(z^{-1})\right), \tag{4}$$

що справджується при $|z| \to +\infty$, $|\arg z| \le \pi/2 - \alpha$. Звідси при фіксованому $\rho > 0$ отримуємо асимптотичну формулу

$$H_\rho(t) = O\left(t^{-1/2}\right), \quad t \downarrow 0. \tag{5}$$

З (3) та (5) випливає, що при фіксованому $\rho > 0$ існує така стала $K > 0$, що при всіх $t > 0$

$$-H_\rho(t) \le K\left(t^{-1/2} \wedge t^{-2}\right), \tag{6}$$

де через $x \wedge y$ позначено менше з чисел $a \in \mathbb{R}^1$ та $b \in \mathbb{R}^1$. Оцінка (6) показує, що функція H_ρ при фіксованому $\rho > 0$ є інтегровною на $(0, +\infty)$. Прості обчислення приводять до результату

$$\int_0^\infty H_\rho(t)\,dt = -1. \tag{7}$$

Отже, функцію $-H_\rho(t)$, $t > 0$, можна розглядати як щільність ймовірнісного розподілу на $(0, +\infty)$.

З асимптотичної формули (4) випливає, крім того, що при $\rho \ne r$ ядро Q можна зобразити у вигляді

$$Q(t, \rho, r) = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \frac{r - \rho}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(r-\rho)^2\right\} + R(t, \rho, r), \tag{8}$$

де ядро R при $t \downarrow 0$ задовольняє співвідношення

$$R(t, \rho, r) = \exp\left\{-\frac{1}{2t}(r-\rho)^2\right\} O\left(t^{-1/2}\right), \tag{9}$$

причому для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta > 0$ та K_ε, що при $\rho \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, $r \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ (вважаємо $\varepsilon < 1$) та $t < \delta$ виконується нерівність

$$|R(t, \rho, r)| \le K_\varepsilon t^{-1/2}. \tag{10}$$

На підставі цих фактів можна довести таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $(v(t))_{t>0}$ *— неперервна функція, для якої при деякому* $T > 0$ (*а отже, і при всіх* $T < +\infty$)

$$\int_0^T |v(t)|\,dt < +\infty.$$

Тоді:

1) *при* $t > 0$ *та* $\rho > 0$ *має місце співвідношення*

$$\lim_{r\to\rho\pm}\int_0^t \upsilon(\tau)Q(t-\tau,\rho,r)\,d\tau \;=\; \pm\upsilon(t) \;+\; \int_0^t \upsilon(\tau)H_\rho(t-\tau)\,d\tau;$$

2) *при* $t>0$ *та* $r>0$ *має місце співвідношення*

$$\lim_{\rho\to r\pm}\int_0^t \upsilon(\tau)Q(t-\tau,\rho,r)\,d\tau \;=\; \mp\upsilon(t) \;+\; \int_0^t \upsilon(\tau)H_r(t-\tau)\,d\tau.$$

Доведення. З формул (8) та (9) випливає, що інтеграл

$$\int_0^t \upsilon(\tau)Q(t-\tau,\rho,r)\,d\tau$$

існує при $t>0$ та $\rho\neq r$ ($\rho>0,\ r>0$), а зі співвідношення (5) — що інтеграл

$$\int_0^t \upsilon(\tau)H_\rho(t-\tau)\,d\tau$$

існує при $t>0$ та $\rho>0$. Далі, рівності

$$\lim_{\rho\to r\pm}\int_0^t \upsilon(\tau)\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\frac{r-\rho}{\sqrt{2\pi(t-\tau)^3}}\exp\left\{-\frac{(r-\rho)^2}{2(t-\tau)}\right\}d\tau \;=\; \mp\upsilon(t)$$

та

$$\lim_{r\to\rho\pm}\int_0^t \upsilon(\tau)\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\frac{r-\rho}{\sqrt{2\pi(t-\tau)^3}}\exp\left\{-\frac{(r-\rho)^2}{2(t-\tau)}\right\}d\tau \;=\; \pm\upsilon(t)$$

встановлюються елементарно. Отже, залишається обчислити границі при $\rho\to\to r\pm$ та при $r\to\rho\pm$ виразу

$$\int_0^t \upsilon(\tau)R(t-\tau,\rho,r)\,d\tau.$$

Якщо $t>0$ фіксоване, то для довільного додатного $\delta'<t$ маємо

$$\lim_{\rho\to r\pm}\int_0^{t-\delta'} \upsilon(\tau)R(t-\tau,\rho,r)\,d\tau \;=\; \int_0^{t-\delta'} \upsilon(\tau)H_r(t-\tau)\,d\tau$$

та

$$\lim_{r\to\rho\pm}\int_0^{t-\delta'} \upsilon(\tau)R(t-\tau,\rho,r)\,d\tau \;=\; \int_0^{t-\delta'} \upsilon(\tau)H_\rho(t-\tau)\,d\tau.$$

Тому лему буде доведено, якщо покажемо, що рівномірно щодо ρ та r в деякому проміжку, відокремленому від нуля, виконується співвідношення

$$\lim_{\delta'\downarrow 0}\int_{t-\delta'}^{t} \upsilon(\tau)R(t-\tau,\rho,r)\,dr \;=\; 0. \tag{11}$$

Зафіксуємо деяке $\varepsilon>0$. Тоді (див. (10)) існують $\delta>0$ та стала $K_\varepsilon>0$, для яких

$$\left|R(t-\tau,\rho,r)\right| \;\le\; K_\varepsilon(t-\tau)^{-1/2}$$

при $\tau \in [(t-\delta)\vee 0, t]$ рівномірно щодо $\rho \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ та $r \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Тому при $\delta' < \delta$ (вважаємо, що $\delta' < t$) маємо

$$\left| \int_{t-\delta'}^{t} v(\tau) R(t-\tau, \rho, r)\, d\tau \right| \le 2K_\varepsilon \sqrt{\delta'} \max_{t-\delta' \le \tau \le t} |v(\tau)|,$$

звідки і випливає (11).

Лему доведено.

Зафіксуємо тепер числа $a > 0$ та $q \in [-1, 1]$ і в області $t > 0$ розглянемо інтегральне рівняння

$$U(t) = f(t) + q \int_0^t U(\tau) H_a(t-\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

в якому $(f(t))_{t>0}$ — задана неперервна функція, а $(U(t))_{t>0}$ — невідома функція. Використавши звичайне позначення для згортки двох функцій α та β на $(0, +\infty)$

$$\alpha * \beta(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\beta(t-\tau)\, d\tau, \qquad t > 0,$$

можемо переписати рівняння (12) у вигляді

$$U(t) = f(t) + qU * H_a(t). \tag{13}$$

Це рівняння називається рівнянням відновлення. Наступні міркування є відомими в теорії таких рівнянь (див., наприклад, [4]).

Покладемо $H_a^{(1)}(t) = H_a(t)$ та $H_a^{(n+1)}(t) = H_a * H_a^{(n)}(t)$ при $t > 0$ та $n \ge 1$. Тоді, як випливає з (6), локально рівномірно щодо $t > 0$ збігається ряд

$$G_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n H_a^n(t) \tag{14}$$

і при цьому для кожного $T > 0$ існує стала N_T така, що при $t \in (0, T]$ виконується нерівність

$$|G_a(t)| \le K_T t^{-1/2}. \tag{15}$$

Функція G_a є розв'язком рівняння

$$G_a(t) = qH_a(t) + qG_a * H_a(t), \qquad t > 0. \tag{16}$$

Тепер розв'язок рівняння (13) можна записати у вигляді

$$U(t) = f(t) + f * G_a(t), \qquad t > 0. \tag{17}$$

Від функції f при цьому досить вимагати, щоб вона була неперервною при $t > 0$ і щоб при деякому $T > 0$ (а отже, і при кожному $T < +\infty$) виконувалась нерівність

$$\int_0^t |f(t)|\, dt < \infty.$$

За таких умов і розв'язок (17) рівняння (13) буде мати ту ж властивість. Більш того, такий розв'язок буде єдиним.

Розглянемо тепер інтегральні рівняння

$$V(t, \rho) = h_0(t, \rho, a) + q\int_0^t V(\tau, \rho) H_a(t-\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$\tilde{V}(t, r) = Q(t, a, r) + q\int_0^t \tilde{V}(\tau, r) H_a(t-\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Змінна $\rho \geq 0$ в першому рівнянні та $r \geq 0$ у другому відіграють роль параметрів (нагадуємо, що $a > 0$ та $q \in [-1, 1]$ — фіксовані параметри).

Як випливає з формули (4), функція $h_0(t, \rho, a)$ при фіксованому $\rho > 0$ для малих t задовольняє нерівність

$$h_0(t, \rho, a) \leq K' \sqrt{\frac{a}{\rho}}(2\pi t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(\rho - a)^2\right\}$$

з деякою сталою $K' > 0$. Крім того, це неперервна за сукупністю змінних $t > 0$ та $\rho > 0$ функція. Тому при кожному $T > 0$ та фіксованому $\rho > 0$ маємо

$$\int_0^T h_0(t, \rho, a)\,dt < \infty.$$

Це дозволяє записати розв'язок рівняння (18) у вигляді (17), тобто

$$V(t, \rho) = h_0(t, \rho, a) + \int_0^t h_0(\tau, \rho, a) G_a(t-\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Очевидно, функція V є неперервною за сукупністю змінних $t > 0$ та $\rho > 0$.

Далі, як випливає з формул (8), (9), при $r \neq a$ функція $Q(t, a, r)$ залишається обмеженою при $t \downarrow 0$. Крім того, вона є неперервною по $t > 0$ (при $r \neq a$), і тому

$$\int_0^T |Q(t, a, r)|\,dt < \infty$$

при всіх $T < +\infty$. Використавши знову формулу (17), можемо записати при $r \neq$ $\neq a$ розв'язок рівняння (19) у вигляді

$$\tilde{V}(t, r) = Q(t, a, r) + \int_0^t Q(\tau, a, r) G_a(t-\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Очевидно, ця функція є неперервною по $t > 0$ та $r > 0$ при $r \neq a$.

Якщо $r = a$, то рівняння (19) набирає вигляду

$$\tilde{V}(t, a) = H_a(t) + q\int_0^t \tilde{V}(\tau, a) H_a(t-\tau)\,d\tau. \tag{22}$$

З рівняння (16) випливає, що розв'язком рівняння (22) є функція

$$\tilde{V}(t, a) = \frac{1}{q} G_a(t), \qquad t > 0. \tag{23}$$

Це так зване пряме значення функції $\tilde{V}(t, r)$ при $r = a$. Застосувавши лему 1 до інтеграла у правій частині (21), отримаємо граничні значення функції $\tilde{V}$ при $r \to a\pm$:

$$\tilde{V}(t, a\pm) = H_a(t) \pm G_a(t) + \int_0^t H_a(\tau) G_a(t-\tau) d\tau.$$

Взявши до уваги (16), дістанемо

$$\tilde{V}(t, a\pm) = \left(\frac{1}{q} \pm 1\right) G_a(t). \tag{24}$$

Отже, функція $\tilde{V}(t, r)$ має розрив, як функція аргументу r, у точці $r = a$.

Тепер для $t > 0$, $\rho \geq 0$, $r \geq 0$ покладемо

$$h(t, \rho, r) = h_0(t, \rho, r) + q \int_0^t V(\tau, \rho) Q(t-\tau, a, r) d\tau, \tag{25}$$

$$\tilde{h}(t, \rho, r) = h_0(t, \rho, r) + q \int_0^t h_0(\tau, \rho, a) \tilde{V}(t-\tau, r) d\tau. \tag{26}$$

(Нагадуємо, що параметри $a > 0$ та $q \in [-1, 1]$ тут, як і вище, є фіксованими.) З формул (20), (21) та (23) випливає, що інтеграли у правих частинах (25) та (26) існують. Більш того, неважко бачити, що функції h та $\tilde{h}$ є неперервними за сукупністю змінних (t, ρ, r) в області $t > 0$, $\rho \geq 0$, $r \geq 0$ при $r \neq a$.

На підставі леми 1 та наведених вище формул для функцій V і $\tilde{V}$ неважко обчислити прямі та граничні значення функцій h та $\tilde{h}$ в точці $r = a$. Наведемо результати цих обчислень:

$$h(t, \rho, a) = \tilde{h}(t, \rho, a) = V(t, \rho), \quad t > 0, \quad \rho \geq 0,$$

$$h(t, \rho, a\pm) = \tilde{h}(t, \rho, a\pm) = (1 \pm q) V(t, \rho), \quad t > 0, \quad \rho \geq 0.$$

Як бачимо, ці значення для функцій h та $\tilde{h}$ збігаються між собою. Виявляється, цей збіг не є випадковим. Ми зараз побачимо, що формули (25) та (26) визначають одну й ту ж функцію, тобто $h(t, \rho, r) = \tilde{h}(t, \rho, r)$.

Справді, використовуючи формули (25), (20), (21) та (26), можемо записати

$$h(t, \rho, r) = h_0(t, \rho, r) + q(V(\cdot, \rho) * Q(\cdot, a, r))(t) =$$

$$= h_0(t, \rho, r) + q([h_0(\cdot, \rho, a) + h_0(\cdot, \rho, a) * G_a]) * Q(\cdot, a, r)(t) =$$

$$= h_0(t, \rho, r) + q(h_0(\cdot, \rho, a) * Q(\cdot, a, r))(t) + q(h_0(\cdot, \rho, a) * (G_a * Q(\cdot, a, r)))(t) =$$

$$= h_0(t, \rho, r) + q(h_0(\cdot, \rho, a) * Q(\cdot, a, r))(t) +$$

$$+ q\Big(h_0(\cdot, \rho, a) * \big[\tilde{V}(\cdot, r) - Q(\cdot, a, r)\big]\Big)(t) =$$

$$= h_0(t, \rho, r) + q\Big(h_0(\cdot, \rho, a) * \tilde{V}(\cdot, r)\Big)(t) = \tilde{h}(t, \rho, r),$$

що й потрібно було довести.

3. Властивості функції $h(t, \rho, r)$. Доведемо тепер, що функція h задовольняє рівняння Колмогорова – Чепмена

$$h(t+s, \rho, r) = \int_0^\infty h(t, \rho, \zeta) h(s, \zeta, r) d\zeta \tag{27}$$

при всіх $s > 0$, $t > 0$, $\rho \geq 0$, $r \geq 0$. Спочатку доведемо таке твердження.

Лема 2. *При* $\theta > 0$ *та* $\tau > 0$ *має місце співвідношення*

$$G_a(\theta + \tau) = q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) V(\tau, \xi) d\xi. \tag{28}$$

Доведення. Маємо (див. (17))

$$G_a(\theta + \tau) = qH_a(\theta + \tau) + q\int_0^{\theta+\tau} G_a(\sigma) H_a(\theta + \tau - \sigma) d\sigma =$$

$$= q\int_0^\infty \left[Q(\theta, a, \xi) + \int_0^\theta G_a(\sigma) Q(\theta - \sigma, a, \xi) d\sigma \right] h_0(\tau, \xi, a) d\xi +$$

$$+ q\int_\theta^{\theta+\tau} G_a(\sigma) H_a(\theta + \tau - \sigma) d\sigma =$$

$$= q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) h_0(\tau, \xi, a) d\xi + q\int_0^\tau G_a(\theta + \sigma) H_a(\tau - \sigma) d\sigma, \tag{29}$$

де використано ту обставину, що функція h_0 задовольняє рівняння Колмогорова – Чепмена. Попередня викладка показує, що функція $u_\theta(\tau) = G_a(\theta + \tau)$ є розв'язком рівняння (в області $\tau > 0$, θ — фіксоване)

$$u_\theta(\tau) = f_\theta(\tau) + q\int_0^\tau u_\theta(\sigma) H_a(\tau - \sigma) d\sigma, \tag{30}$$

де

$$f_\theta(\tau) = q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) h_0(\tau, \xi, a) d\xi.$$

Рівняння (30) — це частинний випадок рівняння (13). Згідно з формулою (17) його розв'язок можна записати у вигляді

$$u_\theta(\tau) = f_\theta(\tau) + \int_0^\tau G_a(\sigma) f_\theta(\tau - \sigma) d\sigma,$$

або інакше

$$G_a(\theta + \tau) = q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) h_0(\tau, \xi, a) d\xi +$$

$$+ q\int_0^\tau G_a(\sigma) d\sigma \int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) h_0(\tau - \sigma, \xi, a) d\xi =$$

$$= q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) \left[h_0(\tau, \xi, a) + q\int_0^\tau h_0(\tau - \sigma, \xi, a) G_a(\sigma) d\sigma \right] d\xi =$$

$$= q\int_0^\infty \tilde{V}(\theta, \xi) V(\tau, \xi) d\xi,$$

що й потрібно було довести.

Тепер доведемо справедливість співвідношення (27). Маємо

$$h(t+s,\rho,r) = h_0(t+s,\rho,r) + q\int_0^{t+s} V(\tau,\rho)Q(t+s-\tau,a,r)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left[h_0(t,\rho,\xi) + q\int_0^t V(\tau,\rho)Q(t-\tau,a,\xi)\,d\tau \right] h_0(s,\xi,r)\,d\xi +$$

$$+ q\int_t^{t+s} V(\tau,\rho)Q(t+s-\tau,a,r)\,d\tau = \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)h_0(s,\xi,r)\,d\xi +$$

$$+ q\int_0^s V(t+\tau,\rho)Q(s-\tau,a,r)\,d\tau.$$

Обчислимо $V(t+\tau,\rho)$. Використовуючи формулу (21) та лему 2, отримуємо

$$V(t+\tau,\rho) = h_0(t+\tau,\rho,a) + \int_0^{t+\tau} h_0(\theta,\rho,a)G_a(t+\tau-\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^\infty h_0(t,\rho,\xi)\left[h_0(\tau,\xi,a) + \int_0^\tau h_0(\tau-\theta,\xi,a)G_a(\theta)\,d\theta \right] d\xi +$$

$$+ \int_\tau^{\tau+t} h_0(t+\tau-\theta,\rho,a)G_a(\theta)\,d\theta = \int_0^\infty h_0(t,\rho,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^t h_0(t-\theta,\rho,a)G_a(\theta+\tau)\,d\theta = \int_0^\infty h_0(t,\rho,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+ q\int_0^t h_0(t-\theta,\rho,a)\left[\int_0^\infty \tilde{V}(\theta,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi \right] d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \left[h_0(t,\rho,\xi) + q\int_0^t h_0(t-\theta,\rho,a)\tilde{V}(\theta,\xi)\,d\theta \right] V(\tau,\xi)\,d\xi = \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Отже,

$$V(t+\tau,\rho) = \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Підставивши цей вираз у знайдену вище формулу для $h(t+s,\rho,r)$, дістанемо

$$h(t+s,\rho,r) = \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)h_0(s,\xi,r)\,d\xi +$$

$$+ q\int_0^s Q(s-\tau,a,r)\left[\int_0^\infty h(t,\rho,\xi)V(\tau,\xi)\,d\xi \right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)\left[h_0(s,\xi,r) + q\int_0^s Q(s-\tau,a,r)V(\tau,\xi)\,d\tau \right] d\xi =$$

$$= \int_0^\infty h(t,\rho,\xi)\,h(s,\xi,r)\,d\xi .$$

Тим самим рівність (27) встановлено.

Очевидно,

$$\int_0^\infty h(t,\rho,r)\,dr = 1$$

при всіх $t>0$, $\rho \ge 0$. Отже, щоб довести, що функція h є щільністю ймовірності переходу деякого процесу, залишилось переконатися в тому, що вона набуває лише невід'ємних значень.

З цією метою зауважимо, що в області $\{(t,\rho)\colon t>0,\ \rho\ge 0,\ \rho\ne a\}$ функція h задовольняє рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial h}{\partial \rho}.$$

Тому якби для деякого $r>0$ та $T>0$ ми мали

$$\inf_{t\in(0,T],\,\rho\ge 0} h(t,\rho,r) = \gamma < 0,$$

то існувало б таке $t_0 \in (0,T]$, що $\gamma = h(t_0,a,r)$.

З леми 1 та з (26) знаходимо

$$\left.\frac{\partial h(t,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a\pm} = \left.\frac{\partial h_0(t,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} \mp q\tilde V(t,r) +$$

$$+ q\int_0^t H_a(\tau)\tilde V(t-\tau,r)\,d\tau = (1\mp q)\tilde V(t,r).$$

Отже, в точці t_0 маємо

$$\left.\frac{\partial h(t_0,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a\pm} = (1\mp q)\tilde V(t_0,r). \tag{31}$$

Звідси випливає, що похідні

$$\left.\frac{\partial h(t_0,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a+} \quad \text{та} \quad \left.\frac{\partial h(t_0,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a-}$$

одночасно або невід'ємні, або ж недодатні. Але, як це випливає з теореми 14 [5, с. 69], у точці строгого мінімуму повинно бути

$$\left.\frac{\partial h(t_0,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a-} < 0, \qquad \left.\frac{\partial h(t_0,\rho,r)}{\partial \rho}\right|_{\rho=a+} > 0.$$

Таким чином, дістали суперечність із рівностями (31). Отже, припущення, що $\gamma<0$, є невірним, що й потрібно було довести.

Залишаємо читачеві перевірку рівностей:

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{\rho\ge 0}\frac{1}{t}\int_{\{r:|r-\rho|>\varepsilon\}} h(t,\rho,r)\,dr = 0, \tag{32}$$

яким би не було $\varepsilon>0$;

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^\infty (r-\rho)h(t,\rho,r)\,dr \;=\; \alpha(\rho), \tag{33}$$

яким би не було ρ (функцію $\alpha(\cdot)$ визначено у вступі);

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^\infty (r-\rho)^2\,h(t,\rho,r)\,dr \;=\; 1 \tag{34}$$

при всіх ρ.

Зауважимо, що оскільки функція $\alpha(\cdot)$ містить δ-функцію, то рівність (33) слід розуміти в тому сенсі, що інтеграли від лівої та правої частин, помножених на пробну функцію $\varphi(\rho)$, $\rho \geq 0$, збігаються між собою.

Рівності (32) – (34) свідчать про те, що існує неперервний процес Маркова $\tilde{r}(t)$, $t \geq 0$, на $[0, +\infty)$, який є там узагальненим дифузійним з одиничним коефіцієнтом дифузії та коефіцієнтом переносу $\alpha(\rho)$, $\rho \geq 0$.

1. *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1995. – **10**. – 200 с.
2. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968. – 394 с.
3. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. – 424 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 424 с.

Одержано 17.06.2005