УДК 519.21

М. П. Карликова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПЕРЕНОСЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫМ ПОТОКОМ*

Depending on a space variable, properties of a solution of stochastic differential equation with interaction are investigated. It is shown that $x(u,t)-u$ belongs to S under certain conditions on coefficients and, in addition, continuously depends on the initial measure as an element of S. The problem of the existence of a solution of equation guided by a generalized function is also studied.

Досліджуються властивості розв'язку стохастичного диференціального рівняння із взаємодією в залежності від просторової змінної. Показано, що за певних умов на коефіцієнти $x(u,t)-u\in S$ і, крім того, неперервно залежить від початкової міри як елемент S. Також вивчається питання існування розв'язку рівняння, керованого узагальненою функцією.

1. Введение. Основным объектом исследования в статье является уравнение со взаимодействием

$$dx(u,t) = \int_{R^d} f\big(x(u,t),x(v,t)\big)\mu(dv)dt + b\big(x(u,t)\big)dw(t),$$

$$x(u,0) = u, \quad u\in\mathbb{R}^d, \quad t\geq 0. \tag{1}$$

Здесь w — d-мерный винеровский процесс, μ — вероятностная мера. Известно [1], что если f и b удовлетворяют условию Липшица и ограничены, то уравнение (1) имеет решение. В работе исследуются свойства решения x в зависимости от пространственной переменной. Будет показано, что при определенных условиях на коэффициенты $x(\cdot,t)-\cdot\in S$ для любого $t\in[0,1]$ и, кроме того, $x(\cdot,t)-\cdot$ непрерывно зависит от начальной меры μ.

Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, γ — метрика Вассерштейна на $\mathfrak{M}$ [2]:

$$\gamma(\mu,\nu) = \inf_{\kappa\in Q(\mu,\nu)} \iint_{\mathbb{R}^d} \frac{|u-v|}{1+|u-v|}\kappa(du,dv),$$

где $Q(\mu,\nu)$ — множество мер на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, для которых μ и ν являются проекциями. Известно [2], что сходимость в метрике γ эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер.

Пусть S — пространство основных функций на $\mathbb{R}^d$ с метрикой

$$\rho(\varphi,\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\varphi-\psi\|_k}{1+\|\varphi-\psi\|_k}\cdot 2^k,$$

где $\|\varphi-\psi\|_k = \sup_{u\in\mathbb{R}^d}\left(1+|u|^k\right)\left|\mathcal{D}^{\alpha}(\varphi(u)-\psi(u))\right|$ — метрика в пространстве S_k, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Далее мы модифицируем уравнение (1), заменяя в нем меру обобщенной функцией $\kappa\in S^*(\mathbb{R}^d)$, имеющей порядок m. Кроме того, будем рассматривать детерминированный случай. Для уравнения

$$dx(u,t) = \big\langle \kappa(v), f\big(x(u,t),x(v,t)\big)\big\rangle dt,$$

$$x(u,0) = u, \tag{2}$$

* Частично поддержана Министерством образования и науки Украины (проект GP / F8 / 86).

© М. П. КАРЛИКОВА, 2005

решением на отрезке $[0, T]$ назовем функцию $x: \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ такую, что $x(u,t) - u \in C([0,T], S_m)$ и (2) выполнено для всех $u \in \mathbb{R}^d$, $t \leq T$. Будет показано, что при определенных условиях на f (2) имеет решение на некотором отрезке $[0, T_0]$.

2. Принадлежность $x(u,t) - u$ пространству S. Пусть $f \in S(\mathbb{R}^{2d})$, $b \in S(\mathbb{R}^d)$. Тогда $x(\cdot, t)$ имеет все производные [3]. Кроме того, легко показать, что множество, на котором $x(\cdot, t) - \cdot \in S$, является случайным событием. Далее под принадлежностью $x(u,t) - u$ пространству S будем понимать выполнение этого включения почти наверное.

Теорема 1. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}^{2d})$, $b \in S(\mathbb{R}^d)$. *Тогда для любого* $t \in [0, T]$ *решение уравнения* (1) *удовлетворяет условию* $x(\cdot, t) - \cdot \in S$.

Доказательство. Чтобы избежать громоздких технических выкладок, рассмотрим случай $d = 1$. Случай $d > 1$ аналогичен. Рассмотрим для $t \in [0, T]$

$$\mathrm{E}|x(u,t) - u - (x(v,t) - v)|^p \leq$$

$$\leq 2^p \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(x(u,s), x(z,s)) - f(x(v,s), x(z,s))|^p \mu(dz)ds +$$

$$+ 2^p \mathrm{E}\left|\int_0^t \big(b(x(u,s)) - b(x(v,s))\big)dw(s)\right|^p.$$

Легко показать, что для любого $m \geq 1$ справедливы оценки

$$|f(u_1, u_2) - f(v_1, v_2)| \leq$$

$$\leq C_m(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)\left(\frac{1}{1 + |u_1|^m} + \frac{1}{1 + |v_1|^m}\right)\left(\frac{1}{1 + |u_2|^m} + \frac{1}{1 + |v_2|^m}\right), \quad (3)$$

$$|b(u) - b(v)| \leq C_m|u - v|\left(\frac{1}{1 + |u|^m} + \frac{1}{1 + |v|^m}\right), \quad (4)$$

где C_m — постоянная. Используя (3), (4), а также неравенство Буркхолдера [3], получаем

$$\mathrm{E}|x(u,t) - u - (x(v,t) - v)|^p \leq C_{p,m}\mathrm{E}\int_0^t |x(u,s) - x(v,s)|^p \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1 + |x(u,s)|^m} + \frac{1}{1 + |x(v,s)|^m}\right)ds.$$

Оценим

$$\mathrm{E}\big|x(u,t) - \big(x(v,t)\big)\big|^{2p} \leq |u - v|^{2p} + C'_p \mathrm{E}\int_0^t |x(u,s) - x(v,s)|^{2p} ds,$$

откуда

$$\mathrm{E}\big|x(u,t) - \big(x(v,t)\big)\big|^{2p} \leq C_p|u - v|^{2p}.$$

Далее, по формуле Ито

$$\mathrm{E}\frac{1}{1 + |x(u,t)|^{2m}} =$$

$$= \frac{1}{1+|u|^{2m}} + \mathrm{E}\int_0^t \frac{-2mx(u,s)^{2m-1}}{\left(1+|x(u,s)|^{2m}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} f(x(u,s), x(v,s))\mu(dv)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{E}\int_0^t \left(\frac{-2m(2m-1)x(u,s)^{2m-2}}{\left(1+|x(u,s)|^{2m}\right)^3} + \frac{2\left(2mx(u,s)^{2m-1}\right)^2}{\left(1+|x(u,s)|^{2m}\right)^3} \right) b^2(x(u,s))\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{1+|u|^{2m}} + \mathrm{E}\int_0^t C'_m \frac{1}{1+|x(u,s)|^{2m}}\,ds,$$

откуда согласно лемме Гроноулла

$$\mathrm{E}\frac{1}{1+|x(u,t)|^{2m}} \le C_m \frac{1}{1+|u|^{2m}}. \tag{5}$$

Тогда

$$\mathrm{E}|x(u,t) - u - (x(v,t) - v)|^p \le$$

$$\le C_{p,m}\int_0^t \sqrt{C_p|u-v|^{2p}} \sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+|x(u,s)|^m} + \frac{1}{1+|x(v,s)|^m} \right)^2}\,ds \le$$

$$\le C'_{p,m}|u-v|^p \left(\frac{1}{1+|u|^m} + \frac{1}{1+|v|^m} \right). \tag{6}$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда из (6) следует [3]

$$\mathrm{E}\sup_{n\le u\le n+1}|x(u,t)-u|^p \le C_{m,p}\left(\mathrm{E}|x(n,t)-n|^p + \frac{1}{1+|n|^m} \right) \le C''_{p,m}\frac{1}{1+|n|^m},$$

где использована оценка

$$\mathrm{E}|x(u,t)-u|^p \le C_{p,m}\frac{1}{1+|u|^m}, \tag{7}$$

которая следует из (5). Далее получаем

$$\mathrm{E}\sup_{u\in\mathbb{R}}|x(u,t)-u|^p\left(1+|u|^l\right) \le$$

$$\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{E}\sup_{n\le u\le n+1}|x(u,t)-u|^p\left(1+|m|^l+|n+1|^l\right) \le$$

$$\le C''_{p,m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1+|n|^l+|n+1|^l}{1+|n|^m}. \tag{8}$$

Если $m \ge l+2$, то ряд сходится, т. е.

$$\mathrm{E}\sup_{u\in\mathbb{R}}|x(u,t)-u|^p\left(1+|u|^l\right) < \infty.$$

Рассмотрим теперь производную

$$x'(u,t) - 1 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_1'(x(u,s), x(v,s))\,x'(u,s)\mu(dv)\,ds +$$

$$+ \int_0^t b'(x(u,s))\,x'(u,s)\,dw(s).$$

Сначала из ограниченности f_1' и b' получаем оценку

$$E|x'(u,t)|^{2p} \le C_p,$$

затем оцениваем

$$E|x'(u,t)-1|^{2p} \le \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \sqrt{C_p}\sqrt{E|f_1'(x(u,s),x(v,s))|^{2p}}\,\mu(dv)ds + $$

$$+ \int_0^t \sqrt{C_p}\sqrt{E|b'(x(u,s))|^{2p}}\,ds \le \frac{C_{p,m}}{1+|u|^m},$$

и, аналогично,

$$E|x'(u,t)-x'(v,t)|^p \le C_{p,m}|u-v|^p\left(\frac{1}{1+|u|^m}+\frac{1}{1+|v|^m}\right),$$

откуда следует

$$E\sup_{u\in\mathbb{R}}|x'(u,t)-1|^p\left(1+|u|^m\right) < \infty.$$

Уравнение для k-й производной имеет вид

$$dx^{(k)}(u,t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\{ f_1'(x(u,t),x(v,t))x^{(k)}(u,t)+\ldots+f_1^{(k)}(x(u,t),x(v,t))(x'(u,t))^k \right\}\mu(dv)dt +$$

$$+ \left\{ b'(x(u,t))x^{(k)}(u,t)+\ldots+b^{(k)}(x(u,t))(x'(u,t))^k \right\}dw(t).$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла и оценки для младших производных, получаем неравенство, аналогичное (6), откуда, в свою очередь,

$$E\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|x^{(k)}(u,t)\right|^p\left(1+|u|^m\right) < \infty.$$

В силу произвольности p и m получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{|x(u,t)|}{|u|} = 1. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $x(\cdot,t)-\cdot\in S$, то

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{|x(u,t)-u|}{|u|} = 0,$$

откуда следует (9).

Заметим, что стандартным является утверждение о существовании предела

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{|x(u,t)|}{|u|^{1+\beta}} = 0,$$

где $\beta > 0$ [3], что слабее, чем (9).

Следующий пример показывает, что в общем случае может выполняться

$$\overline{\lim_{|u|\to\infty}}\frac{|x(u,t)|}{|u|} = +\infty \quad \text{п. н.} \tag{10}$$

***Пример* 1.** Пусть $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n(2+n)$. Рассмотрим уравнение

$$dx(u,t) = h\big(x(u,t),t\big)\,dw(t), \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{11}$$

Пусть для $u \in \left[\dfrac{b_n}{2}, b_n(2+n)\right]$

$$h(u,t) = \sum_{i=0}^{k_n-1} \alpha_{i,n} g_n(u) \sin k_n t\, \mathbb{1}_{\left[\frac{2\pi i}{k_n}, \frac{2\pi(i+1)}{k_n}\right]}(t),$$

где k_n — последовательность

$$\underbrace{1, 1,}_{2^1 \text{ раза}}\ \underbrace{2, 2, 2, 2,}_{2^2 \text{ раза}}\ \underbrace{3, 3, \ldots, 3,}_{2^3 \text{ раза}} \ldots,$$

$$g_n(u) = b_n, \quad u \in \left[\frac{3}{4} b_n, b_n(1+n)\right], \qquad g_n\!\left(\frac{b_n}{2}\right) = g_n\big(b_n(2+n)\big) = 0,$$

линейная на $\left[\dfrac{b_n}{2}, \dfrac{3}{4} b_n\right]$ и на $[\,b_n(1+n), b_n(2+n)\,]$, $\alpha_{i,n} = \pm 1$, причем рассматриваются все возможные наборы. Очевидно, что h удовлетворяет условию Липшица по u и непрерывна по t.

Обозначим

$$B_{k_n} = \left\{ \omega: \sup_{t \in \left[\frac{2\pi i}{k_n}, \frac{2\pi(i+1)}{k_n}\right]} \left| \int_{2\pi i/k_n} \sin k_n s\, dw(s) \right| < \frac{1}{4},\ i = 0, 1, \ldots, k_n - 1 \right\},$$

$$A_n = B_{k_n} \cap \left\{ \omega: \operatorname{sign} \int_{2\pi i/k_n}^{2\pi(i+1)/k_n} \sin k_n s\, dw(s) = \alpha_{i,n},\ i = 0, 1, \ldots, k_n - 1 \right\}.$$

Оценим

$$\mathrm{P}\big(\overline{B}_{k_n}\big) = 1 - \mathrm{P}\big(B_{k_n}\big) = 1 - \prod_{i=0}^{k_n-1} \mathrm{P}\left(\sup_{t \in \left[\frac{2\pi i}{k_n}, \frac{2\pi(i+1)}{k_n}\right]} \left| \int_{2\pi i/k_n}^{t} \sin k_n s\, dw(s) \right| < \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 1 - \left\{ 1 - \mathrm{P}\left(\sup_{t \in \left[0, \frac{2\pi}{k_n}\right]} \left| \int_0^t \sin k_n s\, dw(s) \right| \ge \frac{1}{4} \right) \right\} \le$$

$$\le 1 - \left\{ \frac{\mathrm{E} \sup\limits_{t \in [0, 2\pi/k_n]} \left| \int_0^t \sin k_n\, dw(s) \right|^6}{(1/4)^6} \right\}^{k_n} \le$$

$$\le 1 - \left\{ 1 - \frac{c\left(\int_0^{2\pi/k_n} \sin^2 k_n s\, ds \right)^3}{(1/4)^6} \right\}^{k_n} \le 1 - \left\{ 1 - \frac{C_1}{k_n^3} \right\}^{k_n}.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{k_n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{C_1}{k_n^3}\right)^{k_n}\right) < \infty,$$

согласно лемме Бореля – Кантелли события B_{k_n} происходят начиная с некоторого k_n с вероятностью 1. На множестве A_n

$$x(b_n, 2\pi) = b_n + \sum_{i=0}^{k_n-1} b_n \left|\int_{2\pi i/k_n}^{2\pi(i+1)/k_n} \sin k_n s\, dw(s)\right|,$$

так как $x(b_n, t)$ получаются методом последовательных приближений. $\int_0^{2\pi} \sin ks\, dw(s)$ при разных k — независимые случайные величины, имеющие распределение $N(0, \pi)$, поэтому

$$\overline{\lim_{k_n\to\infty}} \sum_{i=0}^{k_n-1}\left|\int_{2\pi i/k_n}^{2\pi(i+1)/k_n} \sin k_n s\, dw(s)\right| = +\infty \quad \text{п. н.}$$

Пусть для $\omega\in\Omega$ $n_l(\omega)$ — последовательность, для которой

$$\operatorname{sign}\int_{2\pi i/k_{n_l}}^{2\pi(i+1)/k_{n_l}} \sin k_{n_l} s\, dw(s) = \alpha_{i,n_l}, \qquad i = 0, 1,\ldots, k_{n_l}-1.$$

Тогда начиная с некоторого l

$$x\left(b_{n_l}, 2\pi\right) = b_{n_l} + b_{n_l}\sum_{i=0}^{k_{n_l}-1}\left|\int_{2\pi i/k_{n_l}}^{2\pi(i+1)/k_{n_l}} \sin k_{n_l} s\, dw(s)\right|,$$

поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x(b_n, t)-b_n}{b_n} = +\infty,$$

откуда следует (10).

3. Непрерывная зависимость потока от начальной меры.

Лемма 1. *Пусть семейство случайных элементов* $\{x^{\alpha},\ \alpha\in\mathfrak{A}\}\subset S$ *удовлетворяет условиям*

$\forall\, k=(k_1,\ldots,k_d)$ $\forall\, m\geq 1$:

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{\sup_{u\in\mathbb{R}^d}\left(1+|u|^m\right)\left|\mathcal{D}^k x^{\alpha}(u)\right| > N\right\}\to 0, \qquad N\to\infty.$$

Тогда семейство $\{x^{\alpha},\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *компактно по распределению в* S.

Доказательство стандартно и поэтому не приводится.

Пусть x^{μ} обозначает решение (1) для начальной меры μ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда* $y^{\mu}(\cdot, t) = x^{\mu}(\cdot, t) - \cdot$, *как элемент* S, *является стохастически непрерывной функцией начальной меры* μ, *т. е.*

$$\forall\,\varepsilon > 0:\ \mathrm{P}\left\{\rho\left(y^{\mu}(\cdot,t), y^{\nu}(\cdot,t)\right)>\varepsilon\right\}\to 0, \qquad \gamma(\mu,\nu)\to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим для $t\in[0, T]$ и произвольной меры $\kappa\in Q(\mu,\nu)$ соотношение

$$\mathrm{E}\left|x^{\mu}(u,t)-x^{\nu}(v,t)\right|^{p} \leq C_p\Bigg(|u-v|^p +$$

$$+\ \mathrm{E}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}} \left| f\big(x^{\mu}(u,s), x^{\mu}(v_1,s)\big) - f\big(x^{\nu}(v,s), x^{\nu}(v_2,s)\big)\right|^p \kappa(dv_1, dv_2)\,ds\ +$$

$$+\ \mathrm{E}\int_0^t \left| b\big(x^{\mu}(u,s)\big) - b\big(x^{\nu}(v,s)\big)\right|^p ds \Bigg) \leq$$

$$\leq C_p'\Bigg(|u-v|^p + \mathrm{E}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}} \left(\left|x^{\mu}(z_1,s)-x^{\nu}(z_2,s)\right|^p \wedge 1\right)\kappa(dz_1, dz_2)\,ds\ +$$

$$+\ \mathrm{E}\int_0^t \left(\left|x^{\mu}(u,s)-x^{\nu}(v,s)\right|^p \wedge 1\right) ds\Bigg), \tag{12}$$

где использована ограниченность функций f и b, а также их производных. Обозначим

$$\varphi(\kappa,t) = \mathrm{E}\iint_{\mathbb{R}} \left(\left|x^{\mu}(u,t)-x^{\nu}(v,t)\right|^{2p} \wedge 1\right)\kappa(du,dv).$$

Из (12) получаем

$$\varphi(\kappa,t) \leq C_p''\left(\left(|u-v|^p \wedge 1\right)\kappa(du,dv) + \int_0^t \varphi(\kappa,s)\,ds\right),$$

откуда согласно лемме Гронуолла

$$\varphi(\kappa,t) \leq C_p''\iint_{\mathbb{R}} \left(|u-v|^p \wedge 1\right)\kappa(du,dv)\,e^{C_p''t}.$$

Выбрав κ так, чтобы выполнялось

$$\iint_{\mathbb{R}} \frac{|u-v|}{1+|u-v|}\kappa(du,dv) < 2\gamma(\mu,\nu),$$

получим

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi(\kappa,t) \to 0, \qquad \gamma(\mu,\nu)\to 0.$$

Подставим в (12) $v = u$. Тогда, воспользовавшись леммой Гронуолла, получим

$$\mathrm{E}\left|x^{\mu}(u,t)-x^{\nu}(u,t)\right|^{p} \leq C_p'\,e^{C_p't}\int_0^t \varphi(\kappa,s)\,ds,$$

что сходится к 0 при $\gamma(\mu,\nu)\to 0$.

Пусть теперь $\mu_n \Rightarrow \mu$. Докажем, что семейство $\left\{x^{\mu_n}(\cdot,t)-x^{\mu}(\cdot,t),\ n\geq 1\right\}$ слабо компактно в S. Для этого проверим выполнение условия леммы 2 для каждого из семейств $\left\{y^{\mu_n}(\cdot,t),\ n\geq 1\right\}$ и $\left\{y^{\mu}(\cdot,t)\right\}$. Для второго семейства это условие, очевидно, выполнено, поскольку оно состоит из одной точки. Проверим выполнение условия для первого семейства.

Выражение

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E} \sup_{u\in\mathbb{R}^d} \left(1+|u|^m\right)\left|\mathcal{D}^k x^{\mu_n}(u,t)\right|^p$$

оценивается суммой ряда, аналогичного (8), члены которого не зависят от меры μ_n. В силу аддитивности условия леммы 1 получим слабую компактность семейства $\left\{x^{\mu_n}(\cdot,t)-x^{\mu}(\cdot,t),\ n\geq 1\right\}$ в S. Из оценки (12) следует, что конечномерные распределения $x^{\mu_n}(\cdot,t)-x^{\mu}(\cdot,t)$ сходятся к конечномерным распределениям тождественного нуля. Поэтому

$$x^{\mu_n}(\cdot,t) - x^{\mu}(\cdot,t) \xrightarrow{d} 0, \qquad n\to\infty, \qquad \text{в } S.$$

Отсюда следует, что $x^{\mu_n}(\cdot,t)-x^{\mu}(\cdot,t)\to 0,\ n\to\infty,$ по вероятности, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

***Пример* 1.** Пусть $\mu^{\varepsilon}=\dfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]},\ \mu=\delta_0$. Очевидно, что $\mu^{\varepsilon}\Rightarrow\mu,\ \varepsilon\to 0$.

Рассмотрим уравнение

$$dx^{\varepsilon}(u,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{\varepsilon}(u,t)^2-x^{\varepsilon}(v,t)^2}\mu^{\varepsilon}(dv)\,dt,$$

$$x^{\varepsilon}(u,0) = u.$$

Обозначим

$$h^{\varepsilon}(t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{-x^{\varepsilon}(v,s)^2}\mu^{\varepsilon}(dv)\,ds.$$

Тогда $x^{\varepsilon}(u,t)=\Phi^{-1}\left(\Phi(u)+h^{\varepsilon}(t)\right)$, где $\Phi(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

$h^{\varepsilon}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dh^{\varepsilon}(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left\{\Phi^{-1}\left(\Phi(u)+h^{\varepsilon}(t)\right)\right\}^2}\mu^{\varepsilon}(du).$$

Прежде всего, очевидно, что $0\leq h^{\varepsilon}(t)\leq t$. Функция $g(u,h)=e^{-\left(\Phi^{-1}(\Phi(u)+h)\right)^2}$ липшицева по обеим переменным на множестве $\mathbb{R}\times[0,t]$, поэтому $h^{\varepsilon}(t)\to$ $\to h(t),\ \varepsilon\to 0$. Отсюда следует, что $x^{\varepsilon}(u,t)-u\to x(u,t)-u$ в S.

4. О переносе обобщенных функций потоком со взаимодействием.

Теорема 3. *Пусть* $\kappa\in S^*(\mathbb{R}^d)$ — *обобщенная функция порядка* m, $f\in S(\mathbb{R}^{2d})$. *Тогда уравнение* (2) *имеет решение на некотором отрезке* $[0,T_0]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательные приближения

$$x_0(u,t) = u,$$

$$x_{n+1}(u,t) = u + \int_0^t \left\langle \kappa(v), f\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)\right\rangle ds.$$

Легко проверить, что они определены корректно и $x_n(u,t)-u\in S_m$. Оценим

$$\|x_{n+1}(u,t)-u\|_m = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ 0\le\alpha\le m}}\left(1+|u|^m\right)\left|\int_0^t\left\langle \kappa(v),\mathcal{D}_u^{\alpha} f\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)\right\rangle ds\right| \le$$

$$\le C\int_0^t \sup_{\substack{u\in\mathbb{R},\ v\in\mathbb{R}\\ 0\le\alpha\le m,\ 0\le\beta\le m}}\left(1+|u|^m\right)\left(1+|v|^m\right)\left|\mathcal{D}_u^{\alpha}\mathcal{D}_v^{\beta} f\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)\right|ds \le$$

$$\le C'\int_0^t \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ v\in\mathbb{R}}}\left(1+|u|^m\right)\left(1+|v|^m\right)\sum_{\substack{0\le\alpha\le m\\ 0\le\beta\le m}}\left|f^{(\alpha)(\beta)}\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)\right| \times$$

$$\times\left(1+\sum_{i=1}^m\left|x_n^{(i)}(u,s)\right|\right)^m\left(1+\sum_{j=1}^m\left|x_n^{(j)}(v,s)\right|\right)^m \le C''\int_0^t\left(1+\|x_n(u,s)-u\|_m^{2m}\right)ds.$$

Здесь учтено, что $f^{(\alpha)(\beta)}$ ограничены. При $T\le 1/2C''$ по индукции проверяем, что $\|x_n(u,t)-u\|_p\le 1,\ t\le T.$

Теперь

$$\|x_{n+1}(u,t)-x_n(u,t)\|_m =$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ 0\le\alpha\le m}}\left(1+|u|^m\right)\left|\int_0^t\left\langle \kappa(v),\mathcal{D}_u^{\alpha}\left(f\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)-f\left(x_{n-1}(u,s),x_{n-1}(v,s)\right)\right)\right\rangle ds\right| \le$$

$$\le C'\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ v\in\mathbb{R}}}\left(1+|u|^m\right)\left(1+|v|^m\right)\int_0^t\left(\sum_{\substack{0\le\alpha\le m\\ 0\le\beta\le m}}\left|f^{(\alpha)(\beta)}\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)-\right.\right.$$

$$\left.-f^{(\alpha)(\beta)}\left(x_{n-1}(u,s),x_{n-1}(v,s)\right)\right|\left(1+\sum_{i=1}^m\left|x_n^{(i)}(u,s)\right|\right)^m\left(1+\sum_{j=1}^m\left|x_n^{(j)}(v,s)\right|\right)^m +$$

$$+\sum_{i=1}^m\left|x_n^{(i)}(u,s)-x_{n-1}^{(i)}(u,s)\right|^m\times$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^m\left|x_n^{(j)}(v,s)-x_{n-1}^{(j)}(v,s)\right|^m\sum_{\substack{0\le\alpha\le m\\ 0\le\beta\le m}}\left|f^{(\alpha)(\beta)}\left(x_n(u,s),x_n(v,s)\right)\right|\right)ds \le$$

$$\le C''\int_0^t\left(\|x_n(u,s)-x_{n-1}(u,s)\|_m+\|x_n(u,s)-x_{n-1}(u,s)\|_m^{2m}\right)ds.$$

Далее, поскольку для любого $n\ge 0$ $\|x_n(u,s)-u\|_m\le 1$, то $\|x_n(u,s)-x_{n-1}(u,s)\|_m\le 2$. Отсюда получаем

$$\|x_{n+1}(u,t)-x_n(u,t)\|_m \le C''\int_0^t\left(2^{2m-1}+1\right)\|x_n(u,s)-x_{n-1}(u,s)\|_m ds.$$

В силу полноты S_m получаем существование предела $x(u,t)-u=\lim_{n\to\infty}\left(x_n(u,t)-u\right)$ в S_m.

Для проверки того, что x — решение (2), достаточно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \kappa(v), f(x_n(u,s), x_n(v,s))\rangle ds = \int_0^t \langle \kappa(v), f(x(u,s), x(v,s))\rangle ds.$$

Последнее равенство следует из оценок

$$\|x_n(u,t)-u\|_m \le 1, \qquad \|x(u,t)-u\|_m \le 1.$$

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что увеличение длины отрезка в общем случае невозможно.

***Пример* 2.** Рассмотрим уравнение

$$dx(u,t) = \langle \delta_0'(v), h(x(u,t))\varphi(x(v,t))\rangle dt, \tag{13}$$

где $h\in S$, $\varphi\in S$ такие, что:

1) $h(u)=u$, $u\in[-1,1]$,

2) $\varphi'(0)>0$.

Покажем, что решение на $[0,+\infty)$ не существует. Перепишем (13) в виде

$$dx(u,t) = h(x(u,t))\varphi'(x(0,t))x'(0,t)dt.$$

Обозначим $g(t)=\varphi'(x(0,t))x'(0,t)$. Предположим, что существует решение на всей полуоси. Тогда согласно определению решения для любого $T>0$ g непрерывна на $[0,T]$, а поэтому ограничена. Положим

$$C_T = \sup_{t\in[0,T]} |g(t)|.$$

Тогда для $|u|\le e^{-C_T T}$

$$x(u,t) = ue^{\int_0^t g(s)ds}.$$

Поэтому

$$x'(0,t) = e^{\int_0^t g(s)ds},$$

откуда

$$\varphi'(0)e^{\int_0^t g(s)ds} = g(t).$$

Решение этого уравнения

$$g(t) = \frac{\varphi'(0)}{1-\varphi'(0)t}$$

существует не на всей полуоси. Следовательно, и уравнение (13) не имеет решения на $[0,+\infty)$.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Smooth stationary solutions of quasilinear differential equations. Finite mass. – Ohio, 1997. – Preprint No. 97-145, CWRU.
2. *Dorogovtsev A. A.* Properties of the random measures // Theory Stochast. Process. – 2000. – **6(22)**, issue 1-2. – P. 26–33.
3. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – P. 352.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Получено 24.11.2004