УДК 519.21

Б. В. Бондарев, Е. Е. Ковтун (Донецк. нац. ун-т)

НЕКОТОРЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ Н. Н. БОГОЛЮБОВА

An estimate is established for the rate of convergence of a solution of ordinary differential equation under influence of ergodic stochastic process to a stationary solution of a determined averaged system on time intervals of order $e^{1/\varepsilon^{\rho}}$ for some $0 < \rho < 1$.

Встановлено оцінку швидкості зближення розв'язку звичайного диференціального рівняння, що зазнає впливу ергодичного випадкового процесу, зі стаціонарним розв'язком детермінованої усередненої системи на інтервалах часу порядку $e^{1/\varepsilon^{\rho}}$ для деяких $0 < \rho < 1$.

Введение. Рассмотрим уравнение

$$d\xi_{\varepsilon}(t) = \varepsilon a(\xi_{\varepsilon}(t), \eta(t))\,dt, \quad \xi_{\varepsilon}(0) = \xi_0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый числовой параметр, $\eta(t)$ — случайный процесс. Если функция $a(x, y)$ растет не слишком быстро [1], то на каждом конечном интервале времени $[0, T]$ решение уравнения (1) равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$ к $\xi_0(t) \equiv \xi_0$. Однако обычно интерес представляет поведение $\xi_{\varepsilon}(t)$ на отрезках времени порядка $1/\varepsilon$ и больших, так как только на временах порядка $1/\varepsilon$ происходят значимые изменения [1]. Пусть функция $a(x, y)$ непрерывна по x, y, ограничена и удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от y. Если существует равномерно по x и по t предел

$$\lim_{T \to +\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(x, \eta(t))\,dt - \bar{a}(x)\right| > \delta\right\} = 0, \tag{2}$$

то можно доказать тот факт, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно на каждом конечном отрезке времени траектория $\xi_{\varepsilon}(1/\varepsilon)$ сходится к решению уравнения

$$d\xi_0(t) = \bar{a}(\xi_0(t))\,dt, \quad \xi_0(0) = \xi_0,$$

а именно, для любых $T > 0$, $\delta > 0$ имеет место

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left\{\sup_{0 \le t \le T}\left|\xi_{\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi_0(t)\right| > \delta\right\} = 0,$$

причем нормированная разность $\dfrac{\xi_{\varepsilon}(t/\varepsilon) - \xi_0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$ не стремится, вообще говоря, ни к какому пределу, а только имеет предельное распределение, коим является, как правило, распределение некоторого диффузионного процесса. Отметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left\{\sup_{0 \le t \le T}\left|\xi_{\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi_0(t)\right| > \delta\right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left\{\sup_{0 \le t \le T/\varepsilon}\left|\xi_{\varepsilon}(t) - \xi_0(t\varepsilon)\right| > \delta\right\} = 0.$$

Как отмечено в [1, с. 289], для выполнения условия (2) достаточно, чтобы существовала функция $r(x, s, \tau)$ такая, что

$$\left|\mathrm{M}\left[a(x, \eta(s)) - \mathrm{M}a(x, \eta(s))\right]\left[a(x, \eta(s+\tau)) - \mathrm{M}a(x, \eta(s+\tau))\right]\right| \le$$
$$\le r(x, s, \tau) \to 0, \quad \tau \to +\infty, \tag{3}$$

равномерно по x, s (очевидно, что в случае стационарности процесса $\eta(t)$ функция $r(x, s, \tau)$ зависит только от x, τ, т. е. $r(x, s, \tau) = r(x, \tau)$).

В случае $\bar{a}(x) = 0$ при любом x из этого результата следует [1, с. 303], что за время $[0, T/\varepsilon]$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ не отойдет на заметное расстояние от ξ_0. Оказывается, что в этом случае перемещения порядка 1 происходят за временные интервалы порядка $1/\varepsilon^2$. По-видимому, на этот факт впервые было обращено внимание в работе Р. Л. Стратоновича [2]. Там же на физическом уровне строгости установлено, что семейство процессов $\xi_\varepsilon(1/\varepsilon^2)$ при некоторых условиях слабо сходится к некоторому диффузионному процессу, и вычислены характеристики предельного процесса. Строгое обоснование этого утверждения было дано Р. З. Хасьминским [3]. При существенно менее ограничительных предположениях доказательство приведено в работе А. Н. Бородина [4] (см. также [5]).

Вместе с тем в детерминированном случае при определенных условиях возможно усреднение и на бесконечном интервале времени. Этот факт известен как вторая основная теорема Н. Н. Боголюбова [6 – 8]. В данной работе авторы поставили перед собой задачу: получить аналог второй теоремы Н. Н. Боголюбова в стохастическом случае. В стохастическом случае результат, аналогичный второй теореме Н. Н. Боголюбова, в полной мере получить не удалось; удалось лишь доказать сближение решений исходной системы со стационарным решением усредненной системы на интервалах времени порядка e^{1/ε^ρ} для некоторых $0 < \rho < 1$.

Постановка задачи. Необходимые сведения. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}\}$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_0^t, t \geq 0\}$ — неубывающее семейство σ-алгебр, $\{W_t, \mathfrak{F}_0^t, t \geq 0\}$ — одномерный стандартный винеровский процесс. Пусть

$$d\eta(t) = b(\eta(t))\,dt + \sigma(\eta(t))\,dW_t, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

с начальным условием η_0.

Относительно коэффициентов уравнения (2) будем предполагать выполнение условия: $\gamma \leq \sigma^2(x) \leq 1/\gamma$, $\gamma \in (0, 1]$, функции $b(x)$, $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1, коэффициенты $b(x)$, $\sigma^2(x)$ имеют ограниченные гельдеровы производные.

Функция $a(x, y)$ периодична по y с периодом 1, т. е. $a(x, y+1) = a(x, y)$ для любого x, y. Будем также предполагать, что $|a(x, y)| \leq C < +\infty$, частные производные первого порядка функции $a(x, y)$ ограничены постоянной K и равномерно непрерывны по x, вторая частная производная по x ограничена постоянной $\bar{K}$. Эти ограничения назовем условием (A). Обозначим

$$\vartheta(x) = \exp\left\{\int_0^x \frac{2b(y)\,dy}{\sigma^2(y)}\right\},$$

тогда

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1)\int_x^{x+1}\vartheta^{-1}(y)\,dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x) - \vartheta(x+1)]}\left[\int_0^1 \frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1)\int_x^{x+1}\vartheta^{-1}(y)\,dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x) - \vartheta(x+1)]}\,dx\right]^{-1}, \tag{5}$$

если

$$\int_0^1 \frac{b(x)}{\sigma^2(x)}\,dx \neq 0,$$

и

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)}{\sigma^2(x)}\left[\int_0^1 \frac{\vartheta(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\right]^{-1}, \tag{6}$$

если

$$\int_0^1 \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy = 0,$$

будет плотностью эргодической меры, соответствующей решению уравнения (2), причем $\rho(x)$ — решение периодической задачи

$$L^*\rho = \frac{1}{2}\frac{d^2(\rho(x)\sigma^2(x))}{dx^2} - \frac{d(\rho(x)b(x))}{dx} = 0, \qquad \rho(x) = \rho(x+1), \tag{7}$$

однозначно определяется условием нормировки

$$\int_0^1 \rho(x)\,dx = 1.$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)\frac{d^2U}{dy^2} + b(y)\frac{dU}{dy} = a(x,y) - \bar{a}(x), \tag{8}$$

$$U(x,y) = U(x,y+1), \qquad U'_y(x,y) = U'_y(x,y+1),$$

где

$$\bar{a}(x) = \int_0^1 a(x,y)\rho(y)\,dy, \tag{9}$$

а $\rho(x)$ определено в (5) либо в (6). Заметим, что при выполнении условия (A) существует плотность вероятности перехода у процесса $\eta(s)$ [9, с. 371] и имеет место экспоненциально быстрая сходимость к эргодическому распределению [9, с. 373]. Как известно [10, с. 466], этого достаточно для того, чтобы имелось экспоненциально быстрое равномерно сильное перемешивание у процесса $\eta(s)$, что в свою очередь влечет за собой выполнение условия (2) (см., например, [10, с. 392]), а $|a(x,y)| \le C < +\infty$.

Пусть сначала

$$\int_0^1 \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy \ne 0,$$

тогда $\bar{a}(x)$ находится по формуле (9), где $\rho(x)$ определено в (5). Поскольку

$$\int_0^1 [a(x,y) - \bar{a}(x)]\rho(y)\,dy = 0,$$

в силу теорем Фредгольма [11] решение $U(x,y)$ задачи (8) существует.

Как нетрудно заметить, в этом случае

$$\psi(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\displaystyle\int_y^{y+1} \vartheta(z)\frac{2[a(x,z) - \bar{a}(x)]}{\sigma^2(z)}dz}{\vartheta(y+1) - \vartheta(y)}.$$

Если

$$\int_0^1 \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy = 0,$$

то решением задачи (8) будет

$$\psi(x, y) = C\vartheta^{-1}(y) + \psi_0(x, y),$$

где $\psi_0(x, y)$ — некоторое частное периодическое решение задачи (8).

Пусть $|\psi(x, y)| \le D_1 < +\infty$. Заметим, что если

$$\int_0^1 \psi(x, y)\,dy \equiv 0,$$

то нахождение в явном виде функции $U(x, y)$ необязательно, достаточно знать лишь оценку ее модуля, которая непосредственно следует из неравенства

$$\sup_{|x|<+\infty}\ \sup_{0\le y\le 1} |U(x, y)| \le \sup_{|x|<+\infty} \int_0^1 |\psi(x, y)|\,dy \le D_1 < +\infty. \tag{10}$$

Построение экспоненциальных неравенств. Покажем, что справедлива оценка вида

$$P\left\{\sup_{0\le t\le R(T)} \left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[a(x, \eta(t)) - \bar{a}(x)]ds\right| > \delta + \frac{2C + 2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}.$$

Пусть $U(x, y)$ — решение задачи (8). Известно [11], что функция $U(x, y)$ имеет достаточную гладкость по y. Применяя формулу Ито [12] к процессу $U(x, \eta(t))$, получаем

$$d_t U(x, \eta(t)) = LU(x, \eta(t))\,dt + \sigma(\eta(t))\,\frac{dU(x, \eta(t))}{dy}\,dW_t. \tag{11}$$

Из (11) в силу (8) следует

$$d_t U(x, \eta(t)) = [a(x, \eta(t)) - \bar{a}(x)]dt + \sigma(\eta(t))\,\frac{dU(x, \eta(t))}{dy}\,dW_t. \tag{12}$$

Интегрируя (12), имеем

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[a(x, \eta(t)) - \bar{a}(x)]ds =$$

$$= \frac{-U(x, \eta(t+T)) + U(x, \eta(t))}{T} - \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sigma(\xi_s)\,\frac{dU(x, \eta(s))}{dy}\,dW_s.$$

Далее, пусть $R(T) \to +\infty$, $T \to +\infty$, $[R(T)]$ — целая часть. Тогда

$$P\left\{\sup_{0\le t\le R(T)} \left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[a(x, \eta(t)) - \bar{a}(x)]ds\right| > \delta + \frac{2C + 2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{0\le k\le [R(T)]-1}\ \sup_{k\le t\le k+1} \left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[a(x, \eta(t)) - \bar{a}(x)]ds\right| > \delta + \frac{2C + 2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq k\leq[R(T)]-1}\left|\frac{1}{T}\int_k^{k+T}[a(x,\eta(t))-\bar{a}(x)]ds\right| > \delta+\frac{2D_1}{T}\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq k\leq[R(T)]-1}\left|\frac{1}{T}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s\right| > \delta\right\}\leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{[R(T)]-1}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{T}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s\right| > \delta\right\}. \tag{13}$$

Далее нетрудно убедиться в том, что

$$\mathrm{M}\exp\left\{\frac{\pm z}{\sqrt{T}}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s-\frac{z^2}{2T}\int_k^{k+T}\sigma^2(\eta(s))\left[\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}\right]^2ds\right\} = 1. \tag{14}$$

Действительно, пусть

$$\xi_k^{\pm}(t) = \frac{\pm z}{\sqrt{T}}\int_k^{t}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s-\frac{z^2}{2T}\int_k^{t}\sigma^2(\eta(s))\left[\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}\right]^2ds.$$

По формуле Ито после интегрирования имеем

$$l^{\xi_k^{\pm}(k+1)} = 1\pm\int_k^{k+1}l^{\xi_k^{\pm}(s)}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s,$$

откуда и следует (14). Далее,

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{T}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s\right| > \delta\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s > \delta\sqrt{T}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\frac{-1}{\sqrt{T}}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s > \delta\sqrt{T}\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\frac{z}{\sqrt{T}}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s-\right.$$

$$\left.-\frac{z^2}{2T}\int_k^{k+T}\sigma^2(\eta(s))\left[\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}\right]^2ds > z\delta\sqrt{T}-\frac{z^2D_1^2}{2\gamma}\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\frac{-z}{\sqrt{T}}\int_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}dW_s-\right.$$

$$\left.-\frac{z^2}{2T}\int_k^{k+T}\sigma^2(\eta(s))\left[\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}\right]^2ds > z\delta\sqrt{T}-\frac{z^2D_1^2}{2\gamma}\right\}\leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-z\delta\sqrt{T}+\frac{z^2D_1^2}{2\gamma}\right\}.$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по $z > 0$, при $z = \dfrac{\delta\gamma\sqrt{T}}{D_1^2}$ получаем

$$P\left\{\left|\frac{1}{T}\int\limits_k^{k+T}\sigma(\eta(s))\,\frac{dU(x,\eta(s))}{dy}\,dW_s\right| > \delta\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}. \qquad (15)$$

Из (13) и (15) следует

$$P\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}[a(x,\eta(t)) - \bar{a}(x)]ds\right| > \delta + \frac{2C + 2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}. \qquad (16)$$

Оценка приближения решения исходной системы стационарным решением усредненной. Пусть $\xi_0(t)$ — решение задачи

$$d\xi_0(t) = \bar{a}(\xi_0(t))dt, \quad \xi_0(0) = \xi_0. \qquad (17)$$

В силу условий, наложенных на $a(x,y)$, для $\bar{a}(x)$ имеем [8, с. 72] липшицевость и ограниченность с теми же постоянными. Предположим, что уравнение (17) имеет „квазистатическое" решение [8], т. е.

$$\xi_0(t) \equiv \xi_0, \qquad \bar{a}(\xi_0(t)) = 0.$$

Пусть

$$\left(\frac{d\bar{a}(x)}{dx}\right)_{x=\xi_0} = H < 0,$$

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0 + b(\varepsilon, t).$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде [8, с. 91]

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(b,\eta(t)), \qquad (18)$$

где

$$B(b,\eta(t)) = Z(\xi_0 + b, \eta(t)) + \bar{a}(\xi_0 + b) - \left(\frac{d\bar{a}(x)}{dx}\right)_{x=\xi_0} b,$$

$$Z(\xi_0 + b,\eta(t)) = a(\xi_0 + b,\eta(t)) - \bar{a}(\xi_0 + b).$$

Из (16) имеем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}[a(\xi_0 + b,\eta(t)) - \bar{a}(\xi_0 + b)]ds\right| > \delta + \frac{2C + 2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}.$$

Отсюда, обозначая

$$B(b) = \bar{a}(\xi_0 + b) - \bar{a}(\xi_0) - \left(\frac{d\bar{a}(x)}{dx}\right)_{x=\xi_0} b,$$

$$\frac{\partial B(b)}{\partial b} = \frac{\partial\bar{a}(\xi_0 + b)}{\partial b} - \left(\frac{d\bar{a}(x)}{dx}\right)_{x=\xi_0},$$

получаем оценки

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[B(b,\eta(t))\,dt - B(b)]\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\},$$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\frac{\partial B(b,\eta(t))}{\partial b} - \frac{\partial B(b)}{\partial b}\right]ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}.$$

Поскольку [8, с. 92] при $b=0$ $B(0)=0$, $\left(\dfrac{\partial B(b)}{\partial b}\right)_{b=0}=0$, то

$$\left|B(b_1)-B(b_2)\right| \le \eta(\delta)\left|b_1-b_2\right|,$$

где $\eta(\delta)\to 0$, $\delta\to 0$, если $|b_1|\le\delta$, $|b_2|\le\delta$.

Рассмотрим функции

$$B_1(b,\eta(t)) = B(b,\eta(t)) - B(b),$$

$$\frac{\partial B_1(b,\eta(t))}{\partial b} = \frac{\partial B(b,\eta(t))}{\partial b} - \frac{\partial B(b)}{\partial b}.$$

Очевидно, что

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}B_1(b,\eta(t))\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}, \quad (19)$$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\partial B_1(b,\eta(t))}{\partial b}\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}. \quad (20)$$

Пусть

$$B_{1\theta}(t,b) = \int_0^t e^{-\theta(t-\tau)}B_1(b,\eta(\tau))\,d\tau,$$

$$\frac{\partial B_{1\theta}(t,b)}{\partial b} = \int_0^t e^{-\theta(t-\tau)}\frac{\partial B_1(b,\eta(\tau))}{\partial b}\,d\tau, \quad (21)$$

θ — пока произвольный положительный параметр.

Из (21) имеем

$$\frac{dB_{1\theta}(t,b)}{dt} = -\theta B_{1\theta}(t,b) + B_1(b,\eta(t)), \quad (22)$$

откуда

$$\int_t^{t+T}\frac{dB_{1\theta}(s,b)}{dt}\,ds = -\theta\int_t^{t+T}B_{1\theta}(s,b)\,ds + \int_t^{t+T}B_1(b,\eta(s))\,ds. \quad (23)$$

Поскольку

$$\int_t^{t+T}\frac{dB_{1\theta}(s,b)}{dt}\,ds = \frac{d}{dt}\int_t^{t+T}B_{1\theta}(s,b)\,ds,$$

из (23) получаем

$$\frac{d}{dt}\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds = -\theta\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds + \int_t^{t+T} B_1(b,\eta(s))\,ds.$$

Далее, так

$$e^{\theta t}\left[\frac{d}{dt}\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds + \theta\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds\right] = e^{\theta t}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(s))\,ds,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}e^{\theta t}\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds = e^{\theta t}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(s))\,ds,$$

то

$$e^{\theta t}\int_t^{t+T} B_{1\theta}(s,b)\,ds = \int_{-\infty}^{t} e^{\theta s}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(\tau))\,d\tau\,ds.$$

Согласно теореме о среднем

$$\theta B_{1\theta}(\tilde{s},b) = \theta\int_0^t e^{\theta s-\theta t}\,\frac{1}{T}\int_s^{s+T} B_1(b,\eta(\tau))\,d\tau\,ds. \tag{24}$$

Из (24) с учетом (19) следует оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}.$$

Действительно,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left(\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\},\right.$$

$$\left.\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| \le \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\}\right) +$$

$$+ \mathrm{P}\left(\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\},\right.$$

$$\left.\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\}\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right), \tag{25}$$

так как

$$\mathrm{P}\left(\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\},\right.$$

$$\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| \le \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\}\Bigg) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\left\{\left(\delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right)(1-e^{-\theta R(T)}) > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\},\right.$$

$$\left.\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| \le \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\}\right) = 0.$$

Аналогично тому, как была получена оценка (25), имеем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta\,\frac{\partial B_{1\theta}(t,b)}{\partial b}\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B_1(b,\eta(t))\,ds\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right). \tag{26}$$

Из (25) и (26) с учетом (19), (20) получаем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta B_{1\theta}(t,b)\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\},$$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\theta\,\frac{\partial B_{1\theta}(t,b)}{\partial b}\right| > \delta + \frac{2C+2D_1}{T}\right\} \le 2R(T)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma T}{2D_1^2}\right\}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся согласно схеме из [8].

Обозначим $b = h + \varepsilon\vartheta(t,h)$, где $\vartheta(t,h) = B_{1\theta}(t,h)$. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon\,\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\,\frac{dh}{dt} = -\varepsilon\,\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \varepsilon Hh - \varepsilon^2 H\vartheta + \varepsilon B(h+\varepsilon\vartheta,\eta(t)). \tag{27}$$

Из (22) имеем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = -\theta\vartheta + B(b,\eta(t)) - B(b).$$

Подставляя значение $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$ в уравнение (27), получаем

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon\,\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\,\frac{dh}{dt} = \varepsilon\theta\vartheta(t,h) - \varepsilon Hh - \varepsilon^2 H\vartheta(t,h) +$$

$$+\ \varepsilon B(h+\varepsilon\vartheta,\eta(t)) - \varepsilon B(h,\eta(t)) + \varepsilon B(h). \tag{28}$$

Пусть $\theta = \varepsilon$,

$$L(t,h,\varepsilon) = \varepsilon\vartheta(t,h) - \varepsilon H\vartheta(t,h) + B(h+\varepsilon\vartheta,\eta(t)) - B(h,\eta(t)),$$

тогда

$$\left(1+\varepsilon\,\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right)\frac{dh}{dt}\,dt = -\varepsilon Hh + \varepsilon L(t,h,\varepsilon) + \varepsilon B(h).$$

Положим $T = 1/\varepsilon$, тогда

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\varepsilon\,\frac{\partial\vartheta(t,h)}{\partial h}\right| > \delta + \varepsilon(2C+2D_1)\right\} \le 2R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left\{-\frac{\delta^2\gamma}{\varepsilon 2D_1^2}\right\}.$$

Из (28) имеем

$$\frac{dh}{dt} = \left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}[-\varepsilon Hh + \varepsilon L(t, h, \varepsilon) + \varepsilon B(h)]. \tag{29}$$

Переходя в (29) к быстрому времени, получаем

$$h_\varepsilon(t) = \int_0^t \left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}[-Hh_\varepsilon(s) + L(s, h_\varepsilon(s), \varepsilon) + B(h_\varepsilon(s))]\,ds. \tag{30}$$

Уравнение (30) можно записать в виде

$$h_\varepsilon(t) = \int_0^t \left[-Hh_\varepsilon(s) + \left(L(s, h_\varepsilon(s), \varepsilon) + B(h_\varepsilon(s)) + h_\varepsilon(s)H\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right)\left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}\right]ds. \tag{31}$$

Пусть

$$Q(t, h, \varepsilon) = \left(L(s, h, \varepsilon) + B(h) + hH\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right)\left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}$$

и событие $A(\delta, \varepsilon)$ определено как

$$A(\delta, \varepsilon) = \left\{\sup_{0\le t\le R(T)}\left|\varepsilon\frac{\partial\vartheta(t, h)}{\partial h}\right| \le \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1),\right.$$

$$\left.\sup_{0\le t\le R(T)}|\varepsilon\vartheta(t, h)| \le \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1)\right\},$$

где

$$\delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1) < 1, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Поскольку

$$\left|\frac{\partial L(t, h, \varepsilon)}{\partial h}\right| = \varepsilon(1 + H)\left|\frac{\partial\vartheta(t, h)}{\partial h}\right| + \left|\frac{\partial B(\tilde{h}, \eta(t))}{\partial h}\right||\varepsilon\vartheta(t, h)|,$$

на $A(\delta, \varepsilon)$ имеем

$$\left|\frac{\partial L(t, h, \varepsilon)}{\partial h}\right| \le 2(1 + H + K)(\delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1)),$$

$$|Q(t, 0, \varepsilon)| = \left|\left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}\right|(|L(t, 0, \varepsilon)| + |B(0)|) \le$$

$$\le [1 - (\delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1))]^{-1}(1 + H + K)(\delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1)) = \alpha(\varepsilon)$$

в силу того, что

$$|L(t, 0, \varepsilon) + B(0)| = |\varepsilon\vartheta(t, 0)|(1 + H) + \left|B\left(\varepsilon\vartheta(t, 0), \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - B\left(0, \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right| \le$$

$$\le |\varepsilon\vartheta(t, 0)|(1 + H + K).$$

Далее,

$$|Q(t, h, \varepsilon) - Q(t, 0, \varepsilon)| \le \lambda(\varepsilon, h)|h|,$$

где

$$\lambda(\varepsilon, h) = \left|\frac{\partial Q(t, h, \varepsilon)}{\partial h}\right| \le (2(1 + H + K)(\delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1)) +$$

$$+ \overline{K}|h|^2 + \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C + 2D_1) + 2\overline{K}H|h| +$$

$$+\left((1+H+K)\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)+K|h|+\right.$$
$$\left.+H|h|\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)\right)2\bar{K}\,)\left[1-\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)\right]^{-2}\to 0,$$
$$\varepsilon\to 0,\qquad |h|\to 0.$$

Здесь

$$\left|\frac{d^2a(x,y)}{dx^2}\right|\le\bar{K}<+\infty.$$

Действительно,

$$\varepsilon\frac{\partial^2\vartheta}{\partial h^2}=\frac{\partial^2B_{1\theta}(t,h)}{\partial h^2}=\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial^2B_1(h,\eta(\tau))}{\partial h^2}d\tau=$$
$$=\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial^2[a(h,\eta(\tau))-\bar{a}(h)]}{\partial h^2}d\tau,$$

откуда

$$\left|\varepsilon\frac{\partial^2\vartheta}{\partial h^2}\right|\le 2\bar{K},$$

$$\frac{\partial Q(t,h,\varepsilon)}{\partial h}=\left(\frac{\partial L(s,h,\varepsilon)}{\partial h}+\frac{\partial B(h)}{\partial h}+H\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}+hH\varepsilon\frac{\partial^2\vartheta}{\partial h^2}\right)\left[1+\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-2}-$$
$$-\left(L(s,h,\varepsilon)+B(h)+hH\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right)\varepsilon\frac{\partial^2\vartheta}{\partial h^2}\left[1+\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial Q(t,h,\varepsilon)}{\partial h}\right|\le\left(2(1+H+K)\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)+\right.$$
$$+\bar{K}|h|^2+\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)+2\bar{K}H|h|+$$
$$+\left((1+H+K)\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)+K|h|+\right.$$
$$\left.+H|h|\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)\right)2\bar{K}\,)\left[1-\left(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)\right)\right]^{-2}=\lambda(\varepsilon,h).$$

Рассмотрим класс $F_D\left[0,R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ заданных на $\left[0,R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ ограниченных непрерывных функций, $f\in F_D\left[0,R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$: $\sup\limits_{0\le t\le R(1/\varepsilon)}|f|\le D<+\infty$. Будем рассматривать преобразование S, переводящее функцию $f\in F_D\left[0,R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$: $\sup\limits_{0\le t\le R(1/\varepsilon)}|f|\le D<+\infty$ в функцию

$$S(f)=e^{-Ht}\int_0^t e^{Hs}Q(s,f,\varepsilon)\,ds. \tag{32}$$

Из преобразования (32) следует

$$|S(f)|=e^{-Ht}\int_0^t e^{Hs}|Q(s,f,\varepsilon)|\,ds\le$$
$$\le e^{-tH}\int_0^t e^{sH}\alpha(\varepsilon)\,ds+e^{-tH}\int_0^t e^{sH}\lambda(\varepsilon,D)|D|\,ds\le\frac{1}{H}[\alpha(\varepsilon)+\lambda(\varepsilon,D)D].$$

Выбирая $\varepsilon > 0$, D достаточно малыми, получаем

$$\sup_{0 \le t \le R(1/\varepsilon)} |S(f)| \le D < +\infty.$$

Последнее будет иметь место, если, например,

$$\frac{1}{H}\left[\frac{\alpha(\varepsilon)}{D} + \lambda(\varepsilon, D)\right] \le 1.$$

Таким образом, установлено, что преобразование S действует из $F_D\left[0, R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ в $F_D\left[0, R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$.

Далее,

$$\left|S(f_1) - S(f_2)\right| \le e^{-Ht}\int_0^t e^{Hs}\left|Q(s, f_1, \varepsilon) - Q(s, f_2, \varepsilon)\right| ds \le$$

$$\le e^{-Ht}\int_0^t e^{Hs}\lambda(\varepsilon, D) \sup_{0 \le s \le R(1/\varepsilon)} |f_1(s) - f_2(s)| ds =$$

$$= \frac{1}{H}\lambda(\varepsilon, D) \sup_{0 \le s \le R(1/\varepsilon)} |f_1(s) - f_2(s)| \le \frac{1}{2} \sup_{0 \le s \le R(1/\varepsilon)} |f_1(s) - f_2(s)|,$$

т. е. при

$$\frac{1}{H}\lambda(\varepsilon, D) \le \frac{1}{2}$$

имеем

$$\left|S(f_1) - S(f_2)\right| \le \frac{1}{2} \sup_{0 \le s \le R(1/\varepsilon)} |f_1(s) - f_2(s)|.$$

Из последнего неравенства следует, что преобразование $S(f)$ — сжимающий оператор, отображающий полное нормированное пространство на себя. В силу теоремы Банаха уравнение

$$f = S(f)$$

имеет единственное решение. Обозначим это решение через $\bar{f}$. Покажем, что $\bar{f}(t) = h_\varepsilon(t)$. Действительно, так как

$$\bar{f}(t) = e^{-Ht}\int_0^t e^{Hs} Q(s, \bar{f}, \varepsilon) ds, \tag{33}$$

продифференцировав (33), получим

$$\bar{f}(t) = \int_0^t \left[-H\bar{f}(s) + \left(L(s, \bar{f}(s), \varepsilon) + B(\bar{f}(s)) + \bar{f}(s)H\varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right)\left[1 + \varepsilon\frac{\partial\vartheta}{\partial h}\right]^{-1}\right] ds,$$

т. е. $\bar{f}(t)$ является решением уравнения (31). Из (33) следует, что

$$\sup_{0 \le t \le R(1/\varepsilon)} |h_\varepsilon(t)| = \sup_{0 \le t \le R(1/\varepsilon)} \left|\bar{f}(t)\right| \le D < +\infty.$$

Выбирая $D = D(\varepsilon)$ так, что

$$\left[\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} + \lambda(\varepsilon, D(\varepsilon))\right] \le H,$$

имеем

$$\sup_{0\le t\le R(1/\varepsilon)} |h_\varepsilon(t)| \le D(\varepsilon).$$

Здесь

$$\lambda(\varepsilon, D(\varepsilon)) = (2(1+H+K)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)) +$$
$$+ \overline{K} D^2(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C+2D_1) + 2\overline{K} H D(\varepsilon) +$$
$$+ ((1+H+K)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)) + KD(\varepsilon) +$$
$$+ HD^2(\varepsilon)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)))2\overline{K})[1-(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1))]^{-2}.$$

Таким образом, чтобы найти $D(\varepsilon)$, надо доказать неравенство

$$[1-(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1))](1+H+K)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1))\frac{1}{D(\varepsilon)} +$$
$$+ (2(1+H+K)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)) + \overline{K} D^2(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) + \varepsilon(2C+2D_1) +$$
$$+ 2\overline{K} H D(\varepsilon) + ((1+H+K)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)) + KD(\varepsilon) +$$
$$+ HD^2(\varepsilon)(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1)))2\overline{K}) + 2(\delta(\varepsilon)+\varepsilon(2C+2D_1))H \le H. \quad (34)$$

Укажем подходящий вариант. Пусть $\delta(\varepsilon) = \sqrt[4]{\varepsilon}$, $D(\varepsilon) = \sqrt[8]{\varepsilon}$, тогда достаточным для выполнения (34) будет выполнение неравенства

$$\sqrt[8]{\varepsilon}(2(4+5\overline{K}H+2K)(4+(2C+2D_1)) \le H, \quad (35)$$

т. е. $\varepsilon > 0$ настолько мало, что выполнено (35). Тогда в качестве $D(\varepsilon)$ можно использовать $D(\varepsilon) = \sqrt[8]{\varepsilon}$. В силу того, что при $\varepsilon \to 0$

$$2R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}\gamma}{\varepsilon 2D_1^2}\right\} \to 0,$$

в качестве $R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ можно использовать

$$R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = o\left(\exp\left\{\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}2D_1^2}\right\}\right) \to +\infty, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Например,

$$R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\exp\left\{\frac{\gamma}{\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2}\right\} \to +\infty, \qquad \varepsilon \to 0.$$

На основании изложенного выше нетрудно получить оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 2\exp\{\gamma/(\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2)\}} |\xi_\varepsilon(t)-\xi_0| > \sqrt[8]{\varepsilon} + \sqrt[4]{\varepsilon} + \varepsilon(2C+2D_1)\right\} \le$$
$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le 2\exp\{\gamma/(\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2)\}} |h(t)| + \varepsilon|\vartheta(t,h)| > \sqrt[8]{\varepsilon} + \sqrt[4]{\varepsilon} + \varepsilon(2C+2D_1)\right\} =$$
$$= P\left\{\left(\sup_{0\le t\le 2\exp\{\gamma/(\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2)\}} |h(t)| + \varepsilon|\vartheta(t,h)| > \sqrt[8]{\varepsilon} + \sqrt[4]{\varepsilon} + \varepsilon(2C+2D_1)\right) \cap A(\varepsilon, \sqrt[4]{\varepsilon})\right\} +$$
$$+ P\{\overline{A}(\varepsilon, \sqrt[4]{\varepsilon})\} = P\{\overline{A}(\varepsilon, \sqrt[4]{\varepsilon})\} \le 8\exp\left\{-\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}2D_1^2}\right\}\exp\left\{\frac{\gamma}{\sqrt[4]{\varepsilon}2D_1^2}\right\} =$$

$$= 8\exp\left\{-\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}2D_1^2}\left[1-\sqrt[4]{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Последний результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. *Пусть дана система уравнений* (1) *и* (2). *Относительно коэффициентов уравнения* (2) *будем предполагать выполненными условия* (A). *Пусть*

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1)\int_x^{x+1}\vartheta^{-1}(y)\,dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x)-\vartheta(x+1)]}\left[\int_0^1\frac{\vartheta(x)\vartheta(x+1)\int_x^{x+1}\vartheta^{-1}(y)\,dy}{\sigma^2(x)[\vartheta(x)-\vartheta(x+1)]}\,dx\right]^{-1},$$

если

$$\int_0^1\frac{b(x)}{\sigma^2(x)}\,dx \neq 0, \tag{36}$$

либо

$$\rho(x) = \frac{\vartheta(x)}{\sigma^2(x)}\left[\int_0^1\frac{\vartheta(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\right]^{-1},$$

если

$$\int_0^1\frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy = 0, \tag{37}$$

где

$$\vartheta(x) = \exp\left\{\int_0^x\frac{2b(y)\,dy}{\sigma^2(y)}\right\}.$$

Пусть $\bar{a}(x)$ *— среднее по эргодическому распределению, т. е.*

$$\bar{a}(x) = \int_0^1 a(x,y)\rho(y)\,dy.$$

Предположим, что существует $\xi_0(t)\equiv\xi_0$ *— стационарное решение усредненной задачи, т. е.*

$$\bar{a}(\xi_0(t)) = 0,$$

причем справедливо

$$\left(\frac{d\bar{a}(x)}{dx}\right)_{x=\xi_0} = -H < 0.$$

Пусть

$$\psi(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\int_y^{y+1}\vartheta(z)\,\frac{2[a(x,z)-\bar{a}(x)]}{\sigma^2(z)}\,dz}{\vartheta(y+1)-\vartheta(x,y)},$$

если имеет место (36), *либо*

$$\psi(x,y) = C\vartheta^{-1}(y)+\psi_0(x,y),$$

если имеет место (37). *Предположим, что интеграл по периоду равен нулю, т. е.*

$$\int_0^1 \psi(x, y)\,dy \equiv 0$$

и D_1 *такое, что* $|\psi(x, y)| \le D_1 \le +\infty$. *Будем предполагать, что параметр* $\varepsilon > 0$ *настолько мал, что выполняется неравенство*

$$\sqrt[8]{\varepsilon}\,(2(4 + 5\bar{K}H + 2K)(4 + (2C + 2D_1))) \le H.$$

Тогда справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{0 \le t \le 2\exp\{\gamma/(\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2)\}} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_0| > 2\sqrt[8]{\varepsilon} + \varepsilon(2C + 2D_1) \right\} \le$$

$$\le 8\exp\left\{ -\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}2D_1^2}\left[1 - \sqrt[4]{\varepsilon}\right] \right\}.$$

Выводы. Итак, если рассмотреть уравнение

$$d\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon a(\xi_\varepsilon(t), \eta(t))\,dt, \qquad \xi_\varepsilon(0) = \xi_0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый числовой параметр, $\eta(t)$ — случайный процесс, имеющий эргодические свойства, при условии, что функция $a(x, y)$ растет не слишком быстро, то на каждом конечном интервале времени $[0, T]$ решение этого уравнения равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$ к $\xi_0(t) = \xi_0$ и только на временах порядка $1/\varepsilon$ происходят значимые изменения. Пусть функция $a(x, y)$ непрерывна по $x, y,$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от y.

Если существует равномерно по x и по t предел

$$\lim_{T \to +\infty} \mathrm{P}\left\{ \left| \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(x, \eta(t))\,dt - \bar{a}(x) \right| > \delta \right\} = 0,$$

то при $\varepsilon \to 0$ равномерно на каждом конечном отрезке времени траектория $\xi_\varepsilon(1/\varepsilon)$ сходится к решению уравнения

$$d\xi_0(t) = \bar{a}(\xi_0(t))\,dt, \qquad \xi_0(0) = \xi_0,$$

а именно, если

$$\sup_t \mathrm{M}|a(x, \eta(t))|^2 < +\infty,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left\{ \sup_{0 \le t \le T} \left| \xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \xi_0(t) \right| > \delta \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left\{ \sup_{0 \le t \le T/\varepsilon} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t\varepsilon)| > \delta \right\} = 0.$$

В случае $\bar{a}(x) = 0$ при любом x за время $[0, T/\varepsilon]$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ не отойдет на заметное расстояние от ξ_0; в этом случае перемещения порядка 1 происходят за временные интервалы порядка $1/\varepsilon^2$. Вместе с тем в детерминированном случае при определенных условиях возможно усреднение и на бесконечном интервале времени, т. е. имеет место сближение решений исходной задачи со стационарным решением усредненной задачи на бесконечном временном интервале. Этот факт известен как вторая основная теорема Н. Н. Боголюбова [6 – 8]. В данной работе авторы поставили перед собой задачу: получить аналог второй теоремы Н. Н. Боголюбова в стохастическом случае. В стохастическом случае результат, аналогичный второй теореме Н. Н. Боголюбова, в полной мере получить не удалось; удалось лишь оценить скорость сближения решений исходной системы со стационарным решением усредненной системы на интервалах времени порядка $e^{1/\varepsilon^{\rho}}$ для некоторых $0 < \rho < 1$, а именно, при некоторых предположениях установлена оценка скорости сближения решений уравнений вида

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 2\exp\{\gamma/(\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2)\}} \left|\xi_\varepsilon(t)-\xi_0\right| > 2\sqrt[8]{\varepsilon}+\varepsilon(2C+2D_1)\right\} \le$$

$$\le 8\exp\left\{-\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}2D_1^2}\left[1-\sqrt[4]{\varepsilon}\right]\right\},$$

т. е. построена оценка скорости сближения по вероятности в равномерной метрике на интервале времени $0 \le t \le 2\exp\left\{\frac{\gamma}{\sqrt[8]{\varepsilon}2D_1^2}\right\}$.

1. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
2. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966. – 319 с.
3. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применение. – 1966. – **11**, № 2. – С. 240 – 259.
4. *Бородин А. Н.* Предельная теорема для решения дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Там же. – 1977. – **22**, № 3. – С. 498 – 511.
5. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
6. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
7. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1950. – Вып. 14. – С. 9 – 34.
8. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
9. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – North-Holland Publ. Co., 1978. – 700 p.
10. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
11. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
12. *Сафонова О. А.* Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 245 – 252.
13. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.

Получено 28.11.2003,
после доработки — 28.10.2004