УДК 517.5

В. А. Сорич

Наилучшее одновременное приближение периодических функций и их производных тригонометрическими полиномами

Пусть W^rC — класс 2π-периодических функций $f(x)$, r-е ($r > 0$) производные которых в смысле Вейля удовлетворяют условиям $\operatorname{ess\,sup} |f^{(r)}(x)| \leqslant 1$ и $\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x)\,dx = 0$. Пусть, далее, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — произвольный набор действительных чисел таких, что $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_m < r$, а

$$\sum_{n,m} (f; x; T_{n-1}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} |f^{(r_i)}(x) - T_{n-1}^{(i)}(x)|, \tag{1}$$

где $T_{n-1}^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, m}$, — тригонометрические полиномы порядка $n - 1$. В качестве меры приближения функций и их производных тригонометрическими полиномами рассмотрим величину

$$E_{n,m}(W^rC) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in W^rC} \inf_{T_{n-1}^{(i)}} \Big\| \sum_{n,m} (f; x; T_{n-1}^{(i)}) \Big\|_C \tag{2}$$

и назовем ее наилучшим одновременным приближением на классе W^r в метрике C.

В случае $m = 1$, $r - r_1 \in N$ задача отыскания величины (2) сводится к классической задаче наилучшего приближения дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, решенной в [1, 2], и при $(r - r_1)$ дробном — к задаче, решенной в [3, 4]. Рассмотрение функционала (1) в качестве меры одновременного приближения функций и их производных предложено А. И. Степанцом, им же был исследован аналогичный функционал для сумм Фурье (см. [5]).

В настоящей статье найдена величина $E_{n,m}(W^rC)$ при некоторых ограничениях на числа r_i.

Теорема 1. I) *Пусть* $s \in Z$, $0 \leqslant s \leqslant m$. *Если при* $i = \overline{1, s}$ $(r - r_i)$ — *целые нечетные числа, а при* $i = \overline{s+1, m}$ *выполнены условия* $0 < r - r_i < 1$, *то*

$$E_{n,m}(W^rC) = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{i=1}^{m} |\sin(r - r_i)\pi/2)| \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^{r - r_i + 1}. \tag{3}$$

II) *Если* $(r-r_i)$ — *целые четные числа*, $i=\overline{1, m}$, *то*

$$E_{n,m}(W^rC)=n^{-r}\sum_{i=1}^{m}K_{r-r_i}, \tag{4}$$

где $K_{r-r_i}=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j/(2j+1)^{r-r_i+1}$ — *константы Фавара.*

III) *Если* $m=2$, $r_2-r_1=1$, *а* $r-r_1$ *и* $r-r_2$ — *целые числа, то*

$$E_{n,2}(W^rC)=\frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin[(2j+1)\beta n-(r-r_i)\pi/2]}{(2j+1)^{r-r_i+1}}\right|, \tag{5}$$

где β — *число, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos[(2j+1)\beta n-(r-r_i)\pi/2]}{(2j+1)^{r-r_i}}=0. \tag{6}$$

Доказательство. В связи с тем, что доказательства первой и второй части теоремы 1 похожи, будем проводить их одновременно.

Для величины $E_{n,m}(W^rC)$ справедлива следующая оценка сверху:

$$E_{n,m}(W^rC)=\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\left\|\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}|f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x)|\right\|_C\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}\|f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x)\|_C\leqslant\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\|f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x)\|_C. \tag{7}$$

Используя результаты работ [1—4], из (7) получим в первой части теоремы

$$E_{n,m}(W^rC)\leqslant\frac{4}{\pi n^r}\sum_{i=1}^{m}|\sin((r-r_i)\pi/2)|\sum_{j=0}^{\infty}1/(2j+1)^{r-r_i+1}, \tag{8}$$

во второй части

$$E_{n,m}(W^rC)\leqslant\frac{4}{\pi n^r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j/(2j+1)^{r-r_i+1}. \tag{9}$$

Докажем, что в (8), (9) в действительности имеет место равенство. Для этого сначала покажем, что соотношение (2) можно записать в виде

$$E_{n,m}(W^rC)=\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}(f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x))\right\|_C. \tag{10}$$

Действительно, как легко видеть, $\forall x$ справедливо $\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}|f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x)|=\max_{|\alpha_i|=1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}(f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x))$. Поэтому нетрудно показать, что $\left\|\sum_{n,m}(f;x;T_{n-1}^{(i)})\right\|_C=\max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}(f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x))\right\|_C$, откуда получим, что

$$E_{n,m}(W^rC)=\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}(f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}^{(i)}(x))\right\|_C=$$

$$=\sup_{f\in W^rC}\inf_{T_{n-1}}\max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}f^{(r_i)}(x)-T_{n-1}(x)\right\|_C.$$

Далее понадобится такое утверждение С. М. Никольского [6]. Будем говорить, что функция $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*), $n = 1, 2, \ldots$, если 1) функция $K(t)$ — суммируемая, 2π-периодическая и тождественно не равна нулю; 2) существует тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка $U_{n-1}^*(t) = \xi_0^*/2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\xi_k^* \cos kt + \eta_k^* \sin kt)$ и положительное число $\lambda \leqslant \pi/n$ такое, что если $K_*(t) = K(t) - U_{n-1}^*(t)$, $\varphi_*(t) = \operatorname{sign} K_*(t)$, то почти для всех t $\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t)$.

Обозначим через $H_M^{(p)}$ класс существенно ограниченных функций $\varphi \in M$ с нормой, не превышающей единицы $(\|\varphi\|_M \leqslant 1)$, ортогональных ко всем тригонометрическим полиномам порядка $p-1$, $p>0$, $\int_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{matrix}\cos kt \\ \sin kt\end{matrix} dt = 0$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$. $H_M^{(0)}$ — множество функций $\varphi \in M$, у которых $\|\varphi\|_M \leqslant 1$.

Для функций $F(x)$, представимых в виде свертки $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)\,dt$, где $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*), а $\varphi(t)$ — функция из класса $H_M^{(p)}$, имеет место равенство, установленное в ([6, с. 228]):

$$\sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} \inf_{T_{n-1}} \|F(x) - T_{n-1}(x)\|_C = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \|F\|_C = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K(t) - U_{n-1}^*(t)|\,dt,$$
$$p = 0, 1, \ldots, n \qquad (11)$$

Как известно, функции $f(x)$ из класса W^rC представимы в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - r\pi/2)\,dt \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) B_r(t)\,dt. \quad (12)$$

Кроме того, при $r_i < r$ $f^{(r_i)}(x) \in W^{r-r_i}C$. Пусть, далее, $F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i n^{-r_i} f^{(r_i)}(x)$, $U_{n-1}^*(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i n^{-r_i} U_{n-1}^{*(i)}(t)$, где $U_{n-1}^{*(i)}(t)$ — тригонометрические полиномы наилучшего приближения в метрике L соответствующих ядер Бернулли $B_{r-r_i}(t)$. Как следует из работ [1 — 4], для полиномов $U_{n-1}^{*(i)}(t)$ уравнения $B_{r-r_i}(t) - U_{n-1}^{*(i)}(t) = 0$, $i = \overline{1, m}$, имеют корни на $(0; 2\pi)$ в точках $k\pi/n$, $k = \overline{1, 2n-1}$, при r_i, удовлетворяющих условиям первой части теоремы, и в точках $\pi/2n + k\pi/n$, $k = \overline{0, 2n-1}$, при $(r - r_i)$ четных. Других корней на $(0; 2\pi)$ эти уравнения не имеют.

Если числа α_i выбрать следующим образом: при r_i, удовлетворяющих ограничениям первой части теоремы,

$$\alpha_i = \begin{cases} -1, & \text{если } B_{r-r_i}(\pi/2n) - U_{n-1}^{*(i)}(\pi/2n) < 0, \\ \ \ 1, & \text{если } B_{r-r_i}(\pi/2n) - U_{n-1}^{*(i)}(\pi/2n) > 0, \end{cases} \qquad (13)$$

при $(r - r_i)$ четных

$$\alpha_i = \begin{cases} -1, & \text{если } B_{r-r_i}(0) - U_{n-1}^{*(i)}(0) < 0, \\ \ \ 1, & \text{если } B_{r-r_i}(0) - U_{n-1}^{*(i)}(0) > 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \qquad (14)$$

то уравнение вида

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i n^{-r_i} (B_{r-r_i}(t) - U_{n-1}^{*(i)}(t)) = 0 \qquad (15)$$

будет иметь корни на $(0;\ 2\pi)$ в точках $k\pi/n,\ k=\overline{1, 2n-1}$, в первом случае и в точках $\pi/2n+k\pi/n,\ k=\overline{0,\ 2n-1}$ — во втором. Так как слагаемые в (15) между соседними корнями принимают значения одинакового знака, то уравнение (15) на $(0;\ 2\pi)$ других корней не имеет. Если коэффициенты $\alpha_i^*,\ \ i=\overline{1,\ m}$, вида (13)—(14), то функция $K(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^* n^{-r_i}B_{r-r_i}(t)$, как видно из приведенных выше рассуждений, удовлетворяет условию (A_n^*), в котором $\lambda=\pi/n,\ U_{n-1}^{*(i)}(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^* n^{-r_i}U_{n-1}^{*(i)}(t)$. Поэтому, принимая во внимание представление (12), для функций

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^* n^{-r_i}f^{(r_i)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t-x)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^* n^{-r_i}B_{r-r_i}(t)\,dt$$

равенство (11) можно записать следующим образом:

$$\sup_{\varphi\in H_M^{(p)}}\inf_{T_{n-1}}\|F(x)-T_{n-1}(x)\|_C=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^* n^{-r_i}B_{r-r_i}(t)-U_{n-1}^*(t)\right|dt=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_i^* n^{-r_i}\left[B_{r-r_i}(t)-U_{n-1}^{*(i)}(t)\right]\operatorname{sign}\sin n(t-\beta)\,dt\right|, \tag{16}$$

где $\beta=\begin{cases}0, \text{ если при } i=\overline{1,s}\ \ (r-r_i) \text{ нечетные, и если при } i=\overline{s+1,m}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0<r-r_i<1;\\ \pi/2n, \text{ если } (r-r_i) \text{ четные.}\end{cases}$

Подставив в (16) разложение функций $B_{r-r_i}(t)$ и $\operatorname{sign}\sin n(t-\beta)$ в ряды Фурье

$$B_{r-r_i}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(r-r_i)}\cos(kt-(r-r_i)\pi/2),\quad \operatorname{sign}\sin n(t-\beta)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)(nt-n\beta)]}{2\nu+1}$$

и применив равенство Парсеваля, получим

$$\sup_{\varphi\in H_M^{(p)}}\inf_{T_{n-1}}\|F(x)-T_{n-1}(x)\|_C=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n^r}\sum\limits_{i=1}^{m}|\sin((r-r_i)\pi/2)|\sum\limits_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-(r-r_i+1)} & \text{в случае 1),}\\ \dfrac{4}{\pi n^r}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)^{-(r-r_i+1)} & \text{в случае 2).}\end{cases} \tag{17}$$

Из (10) следует, что $E_{n,m}(W^rC)\geqslant\sup\limits_{\varphi\in H_M^{(p)}}\inf\limits_{T_{n-1}}\|F(x)-T_{n-1}(x)\|_C$. Сравнивая это неравенство, с учетом (17), и неравенства (8), (9), убеждаемся в справедливости соотношений (3), (4).

Для доказательства третьей части теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Тригонометрический полином степени не выше $n-1$ интерполирует функцию вида $K(t)=\alpha_1 n^{-s}B_{r-s}(t)+\alpha_2 n^{-s+1}B_{r-s+1}(t),\ r-s\in N$, $\alpha_1\ \alpha_2\in R$, на промежутке $(0;\ 2\pi)$ не более чем в $2n$ точках.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда функция $\Delta(t)=K(t)-T_{n-1}(t)$ имеет на $(0;\ 2\pi)$ не менее $2n+1$ нулей. Если $r-$

$-s>1$, то $\Delta(t)$ и все ее производные до $(r-s-2)$-го порядка непрерывные 2π-периодические функции, поэтому количество их нулей на периоде четно. Значит, $\Delta(t)$ имеет на периоде по крайней мере $2n+2$ нуля. Применяя последовательно теорему Ролля к $\Delta(t)$ и первым ее $r-s-2$ производным и учитывая их непрерывность и периодичность, получим, что $\Delta^{(r-s-2)}(t)$ имеет на периоде не меньше $2n+2$ нулей. Отсюда по этой же теореме $\Delta^{(r-s+1)}(t)$ имеет на интервале $(0;2\pi)$ не меньше $2n-1$ нуля. Так как $B_1(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-1}\cos(kt-\pi/2)=(\pi-t)/2$, $t\in(0;2\pi)$, то $\Delta^{(r-s+1)}(t)$ — тригонометрический полином степени $n-1$ и, следовательно, $\Delta^{(r-s+1)}(t)\equiv 0$, Поэтому $\Delta(t)\equiv 0$, что невозможно.

Если $r-s=1$, то функция $\Delta^{(2)}(t)$ должна иметь на $(0;2\pi)$ не меньше $2n-1$ нуля и быть тригонометрическим полиномом степени $n-1$. Получено противоречие, лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $(r-r_i)$, $i=\overline{1,m}$, — натуральные числа, среди которых хотя бы одно четное. Тогда существует тригонометрический полином степени $n-1$ $U^*_{n-1}(t)$, интерполирующий функцию вида* $K(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}B_{r-r_i}(t)$, *где* $\alpha_i=\cos((r-r_i)\pi/2)$ $(-\cos((r-r_i)\pi/2))$ *при $(r-r_i)$ четных и $|\alpha_i|=1$ при $(r-r_i)$ нечетных, в точках $\beta+k\pi/n$, $k=\overline{0,2n-1}$, $\beta\in(0;\pi/n)$ — число, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_i\cos[(2j+1)\beta n-(r-r_i)\pi/2]/(2j+1)^{r-r_i}=0. \qquad (18)$$

Доказательство. Следуя [7], положим

$$H(\varphi)=K(\varphi)-K(\varphi+\pi/n)+K(\varphi+2\pi/n)-\ldots-K(\varphi+(2n-1)\pi/n). \qquad (19)$$

При каждом действительном β и при любых натуральных l и n имеют место равенства ([3, с. 945]):

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k e^{il(k\pi/n+\beta)}=\frac{e^{il\beta}}{1+e^{il\pi/n}}[1-(-e^{il\pi/n})^{2n}]=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } l\neq(2j+1)n,\\ 2n\exp[i(2j+1)n\beta], & \text{если } l=(2j+1)n.\end{cases} \qquad (20)$$

А. Пусть $r-r_m=1$. Учитывая (20), непрерывность функций $B_r(t)$, $r>1$, на $[0,2\pi]$ и $B_1(t)$ на $(0;2\pi)$, из (19) получим

$$H(0+0)=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\sum_{i=1}^{m}\alpha_i n^{-r_i}B_{r-r_i}(k\pi/n+0)=\alpha_m\pi/2n^{r-1}\pm$$

$$\pm\sum_{i:r-r_i=2d_i,d_i\in N}2n^{-(r-1)}\sum_{j=0}^{\infty}1/(2j+1)^{r-r_i}. \qquad (21)$$

(Если при $(r-r_i)$ четных $\alpha_i=\cos((r-r_i)\pi/2)$, второе слагаемое имеет знак «+», если же $\alpha_i=-\cos((r-r_i)\pi/2)$, то «—»).

Аналогично можно получить

$$H(\pi/n-0)=\alpha_m\pi/2n^{r-1}\mp\sum_{i:r-r_i=2d_i,d_i\in N}2n^{-(r-1)}\sum_{j=0}^{\infty}1/(2j+1)^{r-r_i}. \qquad (22)$$

Из (21), (22) нетрудно видеть, что числа $H(0+0)$ и $H(\pi/n-0)$ разных знаков. Поэтому из непрерывности функции $H(\varphi)$ на $(0;\pi/n)$ следует существование хотя бы одной точки $\beta\in(0;\pi/n)$, в которой $H(\beta)=0$.

Б. Пусть $r - r_m > 1$. Существование такой точки β вытекает из очевидного равенства для непрерывных функций $H(0) = -H(\pi/n)$.

Заметим, что для любого тригонометрического полинома степени не выше $n-1$ из равенств (20) следует

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k U_{n-1}(\beta + k\pi/n) = 0. \qquad (23)$$

Из (23) и условия $H(\beta) = 0$ можно сделать вывод, что если некоторый тригонометрический полином $U^*_{n-1}(t)$ степени не выше $n-1$ интерполирует функцию $K(t)$ в $2n-1$ точке $\beta, \beta + \pi/n, \ldots, \beta + (2n-2)\pi/n$, то он будет интерполировать ее также в точке $\beta + (2n-1)\pi/n$.

Принимая во внимание вид функции $K(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i n^{-r_i} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(r-r_i)} \times \cos[kt - (r - r_i)\pi/2]$ и учитывая (20), из (19) найдем, что число β должно быть корнем уравнения (18). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Поскольку к функциям $K_1(t) = n^{-s}B_{r-s}(t) + n^{-s+1}B_{r-s+1}(t)$, $K_2(t) = n^{-s}B_{r-s}(t) - n^{-s+1}B_{r-s+1}(t)$, $r - s \in N$, применимы леммы 1 и 2, то существуют тригонометрические полиномы $U^*_1(t)$ и $U^*_2(t)$ порядка не выше $n-1$, интерполирующие функции $K_1(t)$, $K_2(t)$ в точках $\beta_1 + k\pi/n$, $\beta_2 + k\pi/n$ соответственно, $k = \overline{0, 2n-1}$, и других точек интерполяции на $(0; 2\pi)$ нет. В силу теоремы А. А. Маркова [8, с. 98] среди всевозможных полиномов степени не выше $n-1$ полином $U^*_1(t)$ $(U^*_2(t))$ является полиномом наилучшего приближения функции $K_1(t)$ $(K_2(t))$ в метрике L.

Нетрудно проверить, что $K_1(t)$ и $K_2(t)$ удовлетворяют условию (A^*_n) при $\lambda = \pi/n$. Поэтому для функций, представимых в виде свертки с ядрсм $K_1(t)$ $(K_2(t))$, справедливо равенство (11). Кроме того, можно показать, что $\forall t \in (0; 2\pi)$ $K_1(2\pi - t) - U^*_1(2\pi - t) = -[K_2(t) - U^*_2(t)]$. Учитывая все это, из (10) и (11) получим

$$E_{n,2}(W^rC) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_1(t) - U^*_1(t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_2(t) - U^*_2(t)|\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} K_1(t)\,\mathrm{sign}\sin n(t - \beta_1)\,dt\right|.$$

Подставим вместо функций $K_1(t)$ и $\mathrm{sign}\sin n(t-\beta_1)$ их разложения в ряды Фурье и после применения равенства Парсеваля получим соотношение (5). Причем, как следует из леммы (2), число β удовлетворяет условию (6). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу наилучшего одновременного приближения функций из классов W^rL (т. е. суммируемых 2π-периодических функций, у которых $\|f^{(r)}\|_L \leqslant 1$) в метрике L:

$$E_{n,m}(W^rL) = \sup_{f \in W^rL} \inf_{T^{(i)}_{n-1}} \Big\| \sum_{n,m} (f;\ x;\ T^{(i)}_{n-1}) \Big\|_L. \qquad (24)$$

Соотношения двойственности, полученные в [6], дают возможность доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Для произвольного набора чисел* r_i $E_{n,m}(W^rL) = \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} \times E_n(W^{r-r_i}L)$, *где* $E_n(W^{r-r_i}L)$ — *величина наилучшего приближения на классе* $W^{r-r_i}L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем соотношение двойственности применительно к нашему случаю. Пусть $f \in L$, тогда

$$\inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_L = \sup_{h \in H^{(n)}_M} \int_0^{2\pi} f(t)\,h(t)\,dt. \qquad (25)$$

Используя равенство (25), будем иметь

$$E_{n,m}(W^rL) = \sup_{f\in W^rL}\inf_{T_{n-1}^{(i)}}\left\|\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}|f^{(r_i)} - T_{n-1}^{(i)}|\right\|_L = \sup_{f\in W^rL}\sum_{i=1}^{m}\inf_{T_{n-1}^{(i)}} n^{-r_i}\|f^{(r_i)} -$$

$$- T_{n-1}^{(i)}\|_L = \sup_{\|f^{(r)}\|_L\leq 1}\sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\int_0^{2\pi} f^{(r_i)}(x)\,h_i(x)\,dx =$$

$$= \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\sup_{\|f^{(r)}\|_L\leq 1}\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\,B_{r-r_i}(t)\,h_i(x)\,dtdx.$$

Применяя теорему Фубини о возможности перемены порядка интегрирования, получим

$$E_{n,m}(W^rL) = \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\sup_{\|f^{(r)}\|_L\leq 1}\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\int_0^{2\pi} B_{r-r_i}(x-t)\,h_i(x)\,dxdt =$$

$$= \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\sup_{\|f^{(r)}\|_L\leq 1}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{r-r_i}(x-t)\,h_i(x)\,dxdt =$$

$$= \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\left\|\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{r-r_i}(x-t)\,h_i(x)\,dx\right\|_M =$$

$$= \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\left\|\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{r-r_i}(x-t)\,h_i(-t)\,dt\right\|_M.$$

Принимая во внимание, что вместе с $h_i(t)$ множеству $H_M^{(n)}$ принадлежат и $h_i(-t)$, можем записать

$$E_{n,m}(W^rL) = \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\left\|\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{r-r_i}(x-t)\,h_i(t)\,dt\right\|_M = \sup_{h_i\in H_M^{(n)}}\left\|\sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}f^{(r_i)}\right\|_M$$

Как следует из результатов работы [6], $\sup\limits_{h\in H_M^{(n)}}\|n^{-r_i}f^{(r_i)}\|_M = n^{-r_i}E_n(W^{r-r_i}L)$,

откуда и получим утверждение теоремы.

1. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polunômes trigonométriques.— Bull. de Sciences Math., 1937, **61**, p. 209—224; 243—256.
2. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.— Докл. АН СССР, 1937, **15**, № 3, с. 107—112.
3. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 6, с. 933—950.
4. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 1, с. 67—92.
5. *Степанец А. И.* Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье.— Докл. АН СССР, 1980, **254**, № 3, с. 543—544.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, **10**, № 3, с. 207—256.
7. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций.— Докл. АН СССР, 1938, **18**, № 4—5, с. 245—249.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 408 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев Поступила 23.12.83