УДК 517.5

А. И. Степанец

Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций

Пусть $f \in L(0,2\pi)$; $a_k(f)$ и $b_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$— коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе; $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in R$. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$, то обозначим эту функцию через $f_\beta^\psi(x)$ и назовем ее (ψ, β)-производной функции $f(x)$, а множество функций $f(x)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим через L_β^ψ.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из $L(0, 2\pi)$. Если $f \in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что f принадлежит классу $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Такие классы были введены и впервые изучались в работе [1].

Здесь будем рассматривать уклонения $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$ сумм Фурье $S_{n-1}(f; x)$ от функций f, принадлежащих классам $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ непрерывных функций из $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ в случае, когда $\psi(k) = \exp(-\alpha k^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, а в качестве $\mathfrak{N}$ взяты либо класс M 2π-периодических существенно ограниченных функций $\varphi(x)$: $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)| \leqslant 1$, либо класс H_ω 2π-периодических функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \omega(|x - x'|), \tag{1}$$

где $\omega = \omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности. Такие классы обозначим через $C_{\beta,\infty}^{\alpha,r}$ и $C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$ соответственно; производные $f_\beta^\psi(x)$ — через $f_\beta^{(\alpha,r)}(x)$. Как показано в [1], для $f \in L_\beta^\psi$

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{\psi(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \\ b_k(f) &= \frac{\psi(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) \sin\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Поэтому, если $f \in C_{\beta,\infty}^{\alpha,r}$ (или $f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$), то $|a_k(f)| \leqslant C \exp(-\alpha k^r)$, $|b_k(f)| \leqslant C \exp(-\alpha k^r)$, где C — некоторая абсолютная постоянная. Отсюда заключаем, что $\forall r > 0$ классы $C_{\beta,\infty}^{\alpha,r}$ и $C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$ состоят из бесконечно дифференцируемых (при $r \geqslant 1$ — аналитических) функций. При $r \geqslant 1$ приближения суммами Фурье на этих классах рассмотрено в [1] (см. также [2]). Остановимся на случае, когда $0 < r < 1$, и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < r < 1$ и $\beta \in R$. Тогда, если $f \in C_{\beta,\infty}^{\alpha,r}$, то $\forall n \in N$ и $\forall a > 0$*

$$\rho_n(f, x) = -\exp(-\alpha n^r)/\pi \int_{an^r \leqslant |t| \leqslant n\pi} f_\beta^{(\alpha,r)}(x + t/n) \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} dt + \rho(n, \psi), \tag{3}$$

причем $|\rho(n, \psi)| \leqslant K_1 \psi(n)$. Если же $f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$, то $\forall n \in N$ и $\forall a > 0$

$$\rho_n(f, x) = \exp(-\alpha n^r)/\pi \int_{an^r \leqslant |t| \leqslant n\pi} (f_\beta^{(\alpha,r)}(x) - f_\beta^{(\alpha,r)}(x + t/n)) \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} dt + q(n, \omega, \psi), \tag{3'}$$

при этом $|q(n, \omega, \psi)| \leqslant K_2 \psi(n) \omega(1/n)$, K_1 и K_2 — положительные постоянные, не зависящие от n, f и x.

Доказательство. Остановимся на доказательстве только равенства (3′). Но из хода рассуждений будет видно, что при этом будет доказано и равенство (3).

В силу равенства (3.7) из [1] $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$

$$\rho_n(f; x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t/n) [J_1(t) + J_2(t)] dt, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x, t/n) = f_\beta^\psi(x) - f_\beta^\psi(x + t/n),\ J_1(t) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{2n\sin t/2n}{t^2}(t + 3\pi/2 - t/2n)\right),\ J_2(t) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos(vt + \beta\pi/2)dv,$$

$$\psi(v) = \exp(-\alpha v^r).$$

Принимая во внимание соотношение (5.26) из [1] и равенства (2), имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t/n) J_1(t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n(f)| + |b_n(f)|) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2\pi}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\cos(kt + \beta\pi/2)\, dt\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\sin(kt + \beta\pi/2)\, dt\right|\right). \quad (5)$$

Если $f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$, то $f_\beta^\omega \in H_\omega$. Поэтому (см., напр., [3, с. 30]) $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$ $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\cos(kt + \beta\pi/2)\, dt\right| \leqslant K\omega(1/n)$. Здесь и всюду в дальнейшем K — некоторая абсолютная положительная постоянная. Такая же оценка верна и для второго слагаемого в (5). Отсюда, согласно (4) и (5), заключаем, что $\forall n \in N$

$$\rho_n(f; x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t/n) J_2(t)\, dt + q_1(n, \omega, \psi),\quad |q_1(n, \omega, \psi)| \leqslant k\psi(n)\,\omega(1/n). \quad (6)$$

Покажем, что $\forall n \in N$ и $\forall a > 0$

$$\left|\int_{|t| \leqslant an^r} \varphi(x, t/n) J_2(t)\, dt\right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n) \quad \forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega. \quad (7)$$

Имеем

$$J_2(t) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos(vt + \beta\pi/2)\, dv = \frac{1}{\pi}\left(\cos(\beta\pi/2)\int_1^\infty \psi(nv)\cos vt dv - \right.$$

$$\left. - \sin(\beta\pi/2)\int_1^\infty \psi(nv)\sin vt dv\right).$$

Ясно, что соотношение (7) будет доказано, если показать, что $\forall n \in N$, $\forall a > 0$ и $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$

$$\left|\int_{|t| \leqslant an^r} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt\right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n),\quad C(t) = \int_1^\infty \psi(nv)\cos vt dv \quad (8)$$

и

$$\left|\int_{|t| \leqslant an^r} \varphi(x, t/n)\, S(t)\, dt\right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n),\quad S(t) = \int_1^\infty \psi(nv)\sin vt dv. \quad (8')$$

Для доказательства этих неравенств воспользуемся методом оценок интегралов, изложенным в [3]. Сначала убедимся, что $\forall n \in N$, $\forall a > 0$ и $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$

$$\left|\int_0^{an^r} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt\right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n). \quad (9)$$

Пусть $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — множество нулей интегрального синуса $\mathrm{Si}\, x = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$, перенумерованное в возрастающем порядке. Известно (см., напр., [3, с. 96]), что для значений x_k справедлива асимптотическая формула

$$x_k = k\pi/2 + \beta_k,\ 0 < \beta_k < \pi/6. \tag{10}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$C_1(x) = \int\limits_x^\infty C(t)\, dt = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt - \int\limits_x^\infty \frac{n}{t} \int\limits_1^\infty \psi'(nv) \sin vt\, dv dt \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Si}\, x - n \int\limits_x^\infty J_3(t)\, dt.$$

В [1] показано, что

$$\operatorname{sign} \int\limits_{x_k}^\infty J_3(t)\, dt = (-1)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Поэтому $\operatorname{sign} \int\limits_{x_k}^\infty C(t)\, dt = (-1)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а так как функция $C_1(x)$ непрерывна, то на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}) она имеет простой нуль $\bar{x}_k$, причем, согласно (10),

$$k\pi + \pi/2 < \bar{x}_k < (k+1)\pi + 2\pi/3. \tag{12}$$

Выберем число k' из условия $\bar{x}_{k'-1} < an < \bar{x}_{k'}$. Тогда

$$\left| \int\limits_0^{an'} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int\limits_0^{\bar{x}_0} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k'-2} \left| \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt \right| + \left| \int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an'} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt \right|. \tag{13}$$

Поскольку $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ $\int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} C(t)\, dt = 0$, то $\forall \xi \in \Delta_k \overset{\mathrm{df}}{=} [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}]$

$$e_k \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} \varphi(x, t/n)\, C(t)\, dt = \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} (\varphi(x, t/n) - \varphi(x, \xi/n)\, C(t)\, dt.$$

Если $f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$, то вследствие (1) $|\varphi(x, t/n) - \varphi(x, \xi/n)| \leqslant \omega(|t - \xi|/n)$. Значит, $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$

$$|e_k| \leqslant \omega\left(\frac{|\Delta_k|}{n}\right) \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} |C(t)|\, dt \leqslant K\omega(1/n) \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} |C(t)|\, dt.$$

Подставляя эту оценку в (13) и замечая, что в силу равенства $\varphi(x, 0) = 0$ первое слагаемое в правой части (13) не превышает величины

$$\omega\left(\frac{\bar{x}_0}{n}\right) \int\limits_0^{\bar{x}_0} |C(t)|\, dt,$$

а последнее — величины $K\omega(n^{r-1})\int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an^r}|C(t)|\,dt$, $\forall f\in C_\beta^{\alpha,r}H_\omega$ получаем

$$\left|\int\limits_0^{an^r}\varphi(x,\,t/n)\,C(t)\,dt\right|\leqslant K\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\int\limits_0^{an^r}|C(t)|\,dt+(\omega(n^{r-1})-$$

$$-\omega\left(\frac{1}{n}\right))\int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an^r}|C(t)|\,dt. \tag{15}$$

Функция $\psi(nv)=\exp(-\alpha(nv)^r)$ монотонно убывает, неотрицательна и $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(nv)=0$. Поэтому функция $\Phi_1(x)=\int\limits_x^\infty\psi(nv)\cos vtdv$ при каждом фиксированном $n\in N$ непрерывна и обращается в нуль на любом промежутке $[\pi/2t+k\pi/t,\ \pi/2t+(k+1)\pi/t]$. Пусть t_0 — ближайший от точки $x=1$ такой нуль. Тогда $t_0<1+2\pi/t$ и

$$|C(t)|=\left|\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos vtdv\right|=|\Phi_1(v)|=\left|\int\limits_1^{t_0}\psi(nv)\cos vtdv\right|\leqslant\int\limits_1^{1+2\pi/t}\psi(nv)\,dv. \tag{16}$$

Учитывая эту оценку, имеем

$$\int\limits_0^{an^r}|C(t)|\,dt\leqslant\int\limits_0^{an^r}\int\limits_1^{1+2\pi/t}\psi(nv)\,dvdt=t\int\limits_1^{1+2\pi/t}\psi(nv)\,dv\,\Big|_0^{an^r}+$$

$$+2\pi\int\limits_0^{an^r}\frac{1}{t}\psi(n(1+2\pi/t))\,dt=an^r\int\limits_1^{1+2\pi/an^r}\psi(nv)\,dv+$$

$$+2\pi\int\limits_{2\pi(an^r)^{-1}}^\infty(\psi(n(t+1))/t)\,dt\leqslant K\psi(n)+2\pi\int\limits_\gamma\psi(nt)/(t-1)\,dt,$$

$$\gamma=\gamma(n,\,r,\,a)=1+2\pi(an^r)^{-1}. \tag{17}$$

Выполняя последовательно замены переменных, находим

$$\int\limits_\gamma^\infty\frac{\psi(nt)}{t-1}\,dt=\int\limits_\gamma^\infty\frac{\exp(-\alpha n^rt^r)}{t-1}dt=\frac{\exp(-\alpha n^r)}{r}\int\limits_{\gamma^r-1}\frac{\exp(-\alpha n^rt)}{(t+1)\,(1-(t+1)^{-\frac{1}{r}})}dt.$$

Но при $t\geqslant\gamma^r-1$ $1-(t+1)^{-1/r}\geqslant1-(\gamma^r-1+1)^{-1/r}=1-\gamma^{-1}=1-$ $-(1+2\pi(an^r)^{-1})^{-1}>2\pi/((2\pi+a)\,n^r)$. Следовательно,

$$\int\limits_\gamma^\infty\frac{\psi(nt)}{t-1}\,dt<\frac{(2\pi+a)\exp(-\alpha n^r)\,n^r}{2r\pi}\int\limits_{\gamma^r-1}^\infty\frac{\exp(-\alpha n^rt)}{t+1}\,dt<$$

$$<\frac{(2\pi+a)\exp(-\alpha n^r)\,n^r}{2r\pi}\int\limits_0^\infty\exp(-\alpha n^rt)\,dt=\frac{2\pi+a}{2r\pi\alpha}\exp(-\alpha n^r). \tag{18}$$

Объединяя соотношения (17) и (18), видим, что

$$\int\limits_0^{an^r}\int\limits_1^{1+2\pi/t}\psi(nv)\,dv\leqslant K\psi(n). \tag{19}$$

Далее, пользуясь оценкой (16), получаем

$$\int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an^r} |C(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an^r} \int\limits_{1}^{1+2\pi/t} \psi(nv)\,dvdt \leqslant \psi(n) \int\limits_{\bar{x}_{k'-1}}^{an^r} \frac{2\pi}{t}\,dt =$$

$$= 2\pi\psi(n)\ln\frac{an^r}{\bar{x}_{k'-1}}. \qquad (20)$$

Но $\bar{x}_{k'-1} = an^r - h$, причем значение h вследствие оценки (19) удовлетворяет условию $0 < h < 2\pi$. Следовательно,

$$\ln(an^r/\bar{x}_{k'-1}) = \ln(1 + h/(an^r - h)) < h/(an^r - h) \leqslant Kn^{-r}. \qquad (21)$$

Сопоставляя оценки (15) и (19) — (21), имеем

$$\left|\int\limits_{0}^{an^r} \varphi(x, t/n)\,C(t)\,dt\right| \leqslant K(\omega(1/n)\,\psi(n) + n^{-r}\omega(n^r n)\,\psi(n)) \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n), \qquad (22)$$

поскольку для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ $\omega(\lambda t) \leqslant (1+\lambda) \times \omega(t)$, $\lambda > 0$. Этим соотношение (9) доказано. Вследствие четности функции $C(t)$ такая же оценка будет иметь место и для интеграла $\int\limits_{-an^r}^{0} \varphi(x, t/n)\,C(t)\,dt$, что и доказывает справедливость неравенства (8).

Пусть $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — множество нулей интегрального косинуса $\mathrm{Ci}(x) = \int\limits_{x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$. Для него также имеет место аналог формулы (10) (см. [3, с. 102]). В [1] отмечено, что функция

$$\Phi_4(x) = \int\limits_{x}^{\infty} J_4(t)\,dt \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{x}^{\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{1}^{\infty} \psi'(nv)\cos vt\,dvdt$$

в точках x_k меняет поочередно знак. Отсюда следует, что функция

$$S_1(x) = \int\limits_{x}^{\infty} S(t)\,dt = \int\limits_{x}^{\infty}\int\limits_{1}^{\infty} \psi(nv)\sin vt\,dvdt =$$

$$= \int\limits_{x}^{\infty}\left(\frac{\cos t}{t} + \frac{n}{t}\int\limits_{1}^{\infty} \psi'(nv)\cos vt\,dv\right)dt$$

будучи, очевидно, непрерывной на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, имеет простой нуль $\bar{x}_k$, причем $k\pi < \bar{x}_k < (k+1)\pi + \pi/6$.

Теперь можно установить аналоги оценок (13) и (22) для функции $S(t)$ и тем самым завершить доказательство соотношения (7).

Из (6) и (7) заключаем, что $\forall n \in N$, $\forall a > 0$ и $\forall f \in C_\beta^{\alpha,r} H_\omega$

$$\rho_n(f; x) = -\int\limits_{|t| \geqslant an^r} \varphi(t, t/n)\,J_2(t)\,dt + q_2(n, \omega, \psi), \ |q_2(n, \omega, \psi)| \leqslant K\psi(n)\omega(1/n). \qquad (23)$$

Далее, представляя $J_2(t)$ в виде

$$J_2(t) = -\psi(n)\sin(t + \beta\pi\ 2)/\pi t - \frac{n}{\pi t}\int\limits_{1}^{\infty} \psi'(nv)\sin(vt + \beta\pi/2)\,dv =$$

$$= -\psi(n)\sin(t + \beta\pi/2)/\pi t - n(\cos(\beta\pi/2)\,J_3(t) + \sin(\beta\pi/2)\,J_4(t))/\pi, \qquad (24)$$

покажем, что $\forall n\in N$, $\forall a>0$ и $\forall f\in C_\beta^{\alpha,r}H_\omega$

$$\left|\frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant an^r}\varphi(x,t/n)\left(\cos(\beta\pi/2)J_3(t)+\sin(\beta\pi/2)J_4(t)\right)dt\right|\leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n). \quad (25)$$

Сначала убедимся, что $\forall n\in N$, $\forall a>0$ и $\forall f\in C_\beta^{\alpha,r}H_\omega$

$$\left|\frac{n}{\pi}\int\limits_{an^r}^{\infty}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|\leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n). \quad (26)$$

Из (11) следует, что на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}), $k=0,1,2,\dots$, где x_k — по-прежнему нули интегрального синуса, функция $\Phi_3(x)=\int\limits_x^\infty J_3(t)\,dt$ имеет простой нуль $\bar{x}_k$, удовлетворяющий условию (12). Пусть опять k' — число, выбранное из условия $\bar{x}_{k'-1}<an^r\leqslant\bar{x}_{k'}$. Тогда

$$\left|\frac{n}{\pi}\int\limits_{an^r}^{\infty}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|\leqslant\frac{n}{\pi}\left(\left|\int\limits_{an^r}^{\bar{x}_{k'}}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=k'}^{\infty}\left|\int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|\right). \quad (27)$$

Полагая $e_k'=\int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt$, как и при получении оценки (14), придем к неравенству $|e_k'|\leqslant K\omega(1/n)\int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}}|J_3(t)|\,dt$. Подставляя эту оценку в (27) и замечая, что

$$\left|\int\limits_{an^r}^{\bar{x}_k}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|\leqslant\omega(\bar{x}_{k'}/n)\int\limits_{an^r}^{\bar{x}_{k'}}|J_3(t)|\,dt\leqslant K\omega(n^{r-1})\int\limits_{an^r}^{\bar{x}_{k'}}|J_3(t)|\,dt,$$

находим

$$\left|\frac{n}{\pi}\int\limits_{an^r}^{\infty}\varphi(x,t/n)J_3(t)\,dt\right|\leqslant Kn\left(\omega(1/n)\int\limits_{an^r}^{\infty}|J_3(t)|\,dt+\omega(n^{r-1})\int\limits_{an^r}^{\bar{x}_{k'}}|J_3(t)|\,dt\right). \quad (28)$$

Воспользуемся следующей оценкой (см. [1, с. 20]):

$$|J_3(t)|\leqslant(\psi(n)-\psi(n(1+2\pi/t)))/nt,\ \ t>0. \quad (29)$$

Имеем

$$n\int\limits_{an^r}^{\infty}|J_3(t)|\,dt<\int\limits_{an^r}(\exp(-\alpha n^r)-\exp(-\alpha n^r(1+2\pi/t)^r))/t\,dt=$$

$$=\exp(-\alpha n^r)\int\limits_{an^r}(1-\exp(-\alpha n^r((1+2\pi/t)^r-1))))/t\,dt<$$

$$<\exp(-\alpha n^r)\int\limits_{an^r}^{\infty}(1-\exp(-Kn^r/t))\,t\,dt<K\exp(-\alpha n^r)=K\psi(n). \quad (30)$$

Далее, учитывая оценки (29) и (21), получаем

$$n \int_{an^r}^{\bar{x}_{k'}} |J_3(t)\,dt < \int_{an^r}^{\bar{x}_{k'}} (\psi(n) - \psi(n(1+2\pi/t)))/t dt <$$

$$< 2\psi(n) \ln(\bar{x}_{k'}/(an^r)) < K\psi(n)\, n^{-r}. \tag{31}$$

Объединяя соотношения (28), (30) и (31), видим, что

$$\left| \frac{n}{\pi} \int_{an^r}^{\infty} \varphi(x, t/n) J_3(t)\,dt \right| \leqslant K(\omega(1/n)\psi(n) + \omega(n^{r-1}) n^{-r} \psi(n)),$$

а это равносильно неравенству (26).

Вследствие четности функции $J_3(t)$ неравенство, аналогичное (26), будет выполняться и для интеграла, взятого по промежутку $t < -an^r$. Отсюда заключаем, что $\forall n \in N$, $\forall a > 0$ и $\forall f \in C_\beta^{\alpha, r} H_\omega$

$$\left| \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geqslant an^r} \varphi(x, t/n) J_3(t)\,dt \right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n). \tag{32}$$

Используя информацию о нулях функции $\Phi_4(x)$ (а она такая же, как и для функции $\Phi_3(x)$) и поступая так же, как и при нахождении оценки (32), получим

$$\left| \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geqslant an^r} \varphi(x, t/n) J_4(t)\,dt \right| \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n),$$

что вместе с (32) и доказывает справедливость неравенства (25).

Сопоставляя ооотношения (23), (24) и (25), видим, что $\forall n \in N$, $\forall a > 0$ и $\forall f \in C_\beta^{\alpha, r} H_\omega$

$$\rho_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{|t| \geqslant an^r} (\varphi(x, t/n)(\sin(t + \beta\pi/2))/t)\,dt + q_3(n, \omega, \psi),$$

$$q_3(n, \omega, \psi) \leqslant K\psi(n)\,\omega(1/n),$$

и для доказательства теоремы остается показать, что

$$|J_n(f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left| \int_{|t| \geqslant n\pi} (\varphi(x, t/n)(\sin(t + \beta\pi/2))/t)\,dt \right| \leqslant K\omega(1/n). \tag{33}$$

Имеем

$$J_n(f) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{-(2k+1)\pi n}^{-(2k-1)\pi n} (\varphi(x, t)(\sin(nt + \beta\pi/2))/t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{(2k-1)\pi n}^{(2k+1)\pi n} (\varphi(x, t)(\sin(nt + \beta\pi/2))/t)\,dt \right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, \ ) \sin(nt + \beta\pi/2) \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{(2k\pi + t)} - \frac{1}{(2k\pi - t)}\,dt = \right.$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t) \sin(nt + \beta\pi/2) \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t/2) - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Таким образом,

$$|J_n(f)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t) \sin(n' + \beta\pi\ 2) \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(t/2) - \frac{1}{t} \right) dt \right|.$$

Пользуясь этим равенством, оценку (33) получим так же, как в [1] была найдена оценка остатка $r_n(\varphi)$ в формуле (4.17).

Теорема доказана.

В качестве следствий из теоремы 1, применяя рассуждения, аналогичные тем, при помощи которых в [1] были доказаны теоремы 2 и 3 (см. также [3, п. 5. 6]), получим асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty}) = \sup\{|\rho_n(f;x)| : f \in C^{\alpha,r}_{\beta,\infty}\}$ и $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta}H_\omega) = \sup\{|\rho_n(f;x)| : f \in C^{\alpha,r}_{\beta}H_\omega\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < r < 1$ *и* $\beta \in R$. *Тогда величины* $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty})$ *и* $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta}H_\omega)$ *не зависят от точки* x *и при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty}) = (4(1-r)\ln n\psi(n))/\pi^2 + O(\psi(n)),\ \mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta}H_\omega) = $$
$$= (2(1-r)\ln n\psi(n)s_n(\omega))/\pi^2 + O(\psi(n)\omega(1/n)),$$

где $\psi(n) = \exp(-\alpha n^r)$; $s_n(\omega) = \sup\left\{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(2t/(2n+1))\sin t dt : \varphi \in H_\omega\right\}$.

В заключение добавим, что, как хорошо известно (см., напр., [3]), каков бы ни был модуль непрерывности $\omega = \omega(t)$, $s_n(\omega) \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \omega(4t/(2n+1))\sin t dt$, причем для выпуклых модулей непрерывности это соотношение является равенством.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики ; 83.10)
2. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1980, **145**, с. 126—151.
3. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев Наук. думка, 1981.— 340 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 13.10.83