УДК 519.21

М. С. Герич (Ужгород. нац. ун-т),
Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ГЕНЕРАТРИСИ ЕКСТРЕМУМІВ ТА ЇХ ДОПОВНЕНЬ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

For an integer-valued compound Poisson process with geometrically distributed jumps of a certain sign (these processes are called lattice almost upper (or lower) semicontinuous) defined on a finite regular Markov chain, we establish relations (without projections) for the moment generating functions of extrema and their complements. Unlike the relations obtained earlier in terms of projections, the proposed new relations for the moment generating functions are determined by the inversion of the perturbed matrix cumulant function. These matrix relations are expressed via the moment generating functions for the distributions of the corresponding jumps.

Для целочисленного сложного пуассоновского процесса с геометрически распределенными скачками одного знака (такие процессы называются почти полунепрерывными сверху или снизу), заданного на конечной регулярной цепи Маркова, установлены соотношения без проектирования для генератрис экстремумов и их дополнений. В отличие от ранее полученных соотношений в терминах проекций, новые соотношения для генератрис определяются через обращение возмущенной матричной кумулянты. Эти матричные соотношения устанавливаются в терминах генератрис распределения соответствующих скачков.

Вступ. У теорії процесів Леві крім процесів з неперервним розподілом стрибків розглядаються моделі процесів із дискретним розподілом (біноміальним та іншими) стрибків, які часто використовуються в теорії масового обслуговування та в теорії ризику (див. [1 – 3]). Одержані результати для ризикових характеристик цих моделей використовуються для апроксимації відповідних характеристик пуассонівських (класичних) процесів ризику. Опису процесів, заданих на ланцюгах Маркова (ЛМ) або керованих ланцюгами Маркова, присвячено роботи [4 – 6], в [5] їх називають напівмарковськими, в [4 – 6] — однорідними за другою компонентою, а в [7] — процесами в марковському середовищі. Граничні задачі для процесів Леві на ЛМ вивчались у [7 – 9]. У [8, 9] встановлено матричні аналоги основної факторизаційної тотожності (о. ф. т.), компоненти якої визначають генератриси розподілу граничних функціоналів (екстремуми, абсолютні екстремуми, перестрибкові функціонали, що мають теоретико-ризикову інтерпретацію). Встановлені в [10] (див. розділ 7) співвідношення для генератрис функціоналів звичайного цілочислового процесу узагальнюються в матричній формі в [11 – 14] для відповідних функціоналів процесу, заданого на ЛМ. У [12] уточнено ймовірнісний сенс компонент право- та лівосторонньої факторизацій, а в [13] конкретизовано зображення всіх компонент о. ф. т., що визначають генератриси екстремумів та їх доповнень, для майже напівнеперервних процесів. Зокрема, в [14] для напівнеперервних зверху процесів одержано співвідношення для генератрис вказаних функціоналів у термінах хвостів розподілу від'ємних стрибків.

У даній роботі для цілочислового майже напівнеперервного зверху процесу встановлюються узагальнення співвідношень для генератрис розподілу мінімуму (в тому числі й абсолютного) та доповнення до максимуму безпосередньо через генератрису хвоста розподілу від'ємних (не геометрично розподілених) стрибків процесу. У випадку ґратчастого майже напівнеперервного знизу процесу визначаються співвідношення для генератрис розподілу максимуму (в тому числі й абсолютного) та доповнення до мінімуму безпосередньо через генератрису розподілу додатних (не геометрично розподілених) стрибків процесу.

Зауважимо, що скалярні значення $\xi(t)$ залежать від значення „керуючого" ЛМ $x(\cdot)$ у початковий момент 0 та змінного додатного моменту $t>0$. Тому відповідні розподіли і усереднення (математичне сподівання) є матричними характеристиками, що далі будемо позначати жирним шрифтом: $\mathbf{P}\{\cdot\}, \mathbf{E}[\cdot]$. Наприклад, $\mathbf{P}\big\{\xi(t)=l\big\}=\mathbf{P}\big\{\xi(t)=l, x(t)=r|x(0)=k\big\}=\|p_{kr}(l)\|$.

1. Майже напівнеперервні цілочислові пуассонівські процеси на ланцюгах Маркова. Нехай $\mathbf{Y}(t)=\{\xi(t),x(t)\}$ — двовимірний марковський процес зі значеннями в фазовому просторі $\{\mathbb{Z}\times\mathbb{E}\}$, заданий на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega,\,\mathcal{F},\mathrm{P}\}$, на якому визначено потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ $(\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F},\,0\leqslant s\leqslant t)$. Компонента $x(t)$ — скінченний ергодичний ЛМ із значеннями в $\mathbb{E}=\{1,\ldots,m\}$, матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t)=\big\|\mathrm{P}\{x(t)=r|x(0)=k\}\big\|_{k,r\in\mathbb{E}}=e^{\mathbf{Q}t}$$

і твірною матрицею $\mathbf{Q}$ (див. (14) [17, с. 372]). Для детальнішого опису $\xi(t)$ — „керованого ЛМ $x(t)$" з m станами в $\mathbb{E}$ — слід задати набір пуассонівських процесів $\big\{\xi_k(t)\big\}_{k=1}^m$ із довільним розподілом стрибків у $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та послідовність незалежних сукупностей однаково розподілених цілочислових випадкових величин $\big\{\chi_{kr}^{(n)}\big\}_{n\geqslant 1}$, $k,r\in\mathbb{E}$. Як і для випадку дійснозначного $\xi(t)$ (див. [4, 8, 9], $\mathbf{Y}(t)$ є марковським адитивним процесом відносно $\{\mathcal{F}_t\}$ — σ-алгебри подій, породжених $\{\mathbf{Y}(s),\,0\leqslant s\leqslant t\}$, а компонента $\xi(t)$ — процесом з умовно незалежними приростами. В [4] $\mathbf{Y}(t)$ було названо марковським процесом, „однорідним за компонентою $\xi(t)$".

Позначимо $\mathbf{\Lambda}=\|\delta_{kr}\lambda_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\delta_{kr}=I_{\{k=r\}}$, λ_k — інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ із розподілом стрибків $\mathbf{p}(x)=\big\|\delta_{kr}\mathrm{P}\{\xi_k^{(1)}=x\}\big\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\mathbf{N}=\big\|\delta_{kr}n_k\big\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, де $\big\{n_k>0,k\in\mathbb{E}\big\}$ — параметри показниково розподілених випадкових величин $\zeta_k^{(\cdot)}$ — часів перебування $x(t)$ в стані k. Матриця перехідних імовірностей вкладеного ЛМ $y_n=x(\sigma_n+0)$, де σ_n — момент n-ї зміни станів $x(t)$: $\mathbf{P}=\|p_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\mathbf{f}(x)=\|p_{kr}\mathrm{P}\{\chi_{kr}^{(\cdot)}=x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$ — розподіл стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$ на переходах ЛМ $x(t)$, незалежний від верхнього індексу, $\widetilde{\mathbf{f}}(z)=\big\|p_{kr}Ez^{\chi_{kr}^{(\cdot)}}\big\|$, $\widetilde{\mathbf{f}}(z)=\mathbf{P}$, якщо $\mathrm{P}\{\chi_{kr}^{(\cdot)}=x\}=0$ при $x\neq 0$, тобто при відсутності стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$. Твірна матриця $\mathbf{Q}$ має вигляд $\mathbf{Q}=\mathbf{N}(\mathbf{P}-\mathbf{I})$. Крім того, позначимо розподіл 1-го сумарного стрибка $\xi(t)$ на ЛМ через $\mathbf{\Pi}_0(x)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x)+\mathbf{N}\mathbf{f}(x)$, що є дискретним аналогом стрибкової міри Леві $\Pi(dx)=\lambda dF(x)$ для числового складного пуассонівського процесу (див. (1.7) в [10]).

Якщо $\xi(0)=0$, то значення $\xi(t)$ можна описати таким чином:

$\xi(t)=\xi_k(t),\,0\leqslant t<\zeta_k^{(1)}=\sigma_1,\,\mathrm{P}\big\{\zeta_k^{(1)}>t\big\}=e^{-n_kt}$ $(n_k>0,\,k=\overline{1,m})$,

$\xi(\sigma_1)=\xi_k(\sigma_1-0)+\chi_{kr}^{(1)}$, якщо σ_1 — момент 1-го переходу ЛМ із k в r,

$\xi(t)=\xi(\sigma_1)+\xi_r(t)-\xi_r(\sigma_1),\sigma_1\leqslant t<\sigma_1+\zeta_r^{(2)}=\sigma_2$, якщо $x(t)$ перебуває в стані r,

$\xi(\sigma_2)=\xi_l(\sigma_2-0)+\chi_{rl}^{(2)}$, якщо $x(t)$ переходить із r в l,

$\xi(t)=\xi(\sigma_2)+\xi_l(t)-\xi_l(\sigma_2),\,\sigma_2\leqslant t<\sigma_2+\zeta_l^{(3)}=\sigma_3$,

де $\xi_r(t)-\xi_r(\sigma_1)\doteq\xi_r(t-\sigma_1),\,\xi_l(t)-\xi_l(\sigma_2)\doteq\xi_l(t-\sigma_2),\ldots;\,\sigma_1,\,\sigma_2,\,\sigma_3,\ldots$ — відповідно моменти 1-, 2-, 3-ї, ... зміни станів ЛМ $x(t)$, послідовність яких позначимо $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 1}$.

Розглянемо стохастичні співвідношення, що використовувались у [8] при виведенні оберненого рівняння Колмогорова для розподілу дійснозначного процесу Леві на ЛМ $\xi(t)$ або $\xi(\theta_s)$ $\big(\mathrm{P}\{\theta_s>t\}=e^{-st},\,s>0,\,t>0\big)$:

$$[\xi(t)]_{kr} \doteq \begin{cases} 0, & \zeta_k^{(1)} > t, \quad \eta_k^{(1)} > t, \\ \xi_k^{(1)} + [\xi(t - \eta_k^{(1)})]_{kr}, & \eta_k^{(1)} < t, \quad \eta_k^{(1)} < \zeta_k^{(1)}, \\ \chi_{kj}^{(1)} + [\xi(t - \zeta_k^{(1)})]_{jr}, & \zeta_k^{(1)} < t, \quad \zeta_k^{(1)} < \eta_k^{(1)}, \end{cases} \tag{1}$$

де $\eta_k^{(1)}$ — момент першого стрибка $\xi_k(t)$ $\big(\mathrm{P}\{\eta_k^{(1)} > t\} = e^{-\lambda_k t},\, t > 0\big)$.

Шляхом усереднення по розподілу перших стрибків $\xi_k^{(1)}$ та $\chi_{kr}^{(1)}$ на основі (1) визначається розподіл $\xi(t)$:

$$\mathbf{P}_t(x) = \big\|P_{kr}\{\xi(t) = x)\}\big\| = \mathbf{I}_{\{x=0\}} e^{-(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})t} + \int_0^t \sum_y e^{-(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})u} \mathbf{\Pi}_0(y) \mathbf{P}_{t-u}(x-y)du. \tag{2}$$

Після перетворення Лапласа – Карсона по t з (2) випливає матрично-операторне рівняння для $\mathbf{P}(s,x) = \big\|P_{kr}\{\xi(\theta_s) = x\}\big\|$:

$$\mathbf{L}_s \mathbf{P}(s,x) = s\mathbf{I}_{\{x=0\}}, \quad x \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbf{L}_s = s\mathbf{I} - \mathbf{L}. \tag{3}$$

Твірний оператор $\mathbf{L}$ визначається ядром $\mathbf{\Pi}_0(x)$ на класі обмежених вимірних в $\{\mathbb{Z}\times\mathbb{E}\}$ матричних функцій $\mathcal{F}(x)$:

$$\mathbf{L}\mathcal{F}(x) = \sum_x \mathbf{\Pi}_0(y)\big[\mathcal{F}(x-y) - \mathcal{F}(x)\big] + \mathbf{Q}\mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Після твірного перетворення по x з рівняння (3) генератриса $\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)}]$ визначається через діагональну кумулянту $\mathbf{K}_d(z) = \mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{I})$ та генератрису $\widetilde{\mathbf{f}}(z)$:

$$\mathbf{g}(s,z) = s\big(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)\big)^{-1},$$

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{K}_d(z) + \mathbf{N}\big(\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}\big) + \mathbf{Q} = \sum_{x\in\mathbb{Z}, x\neq 0} (z^x - 1)\mathbf{\Pi}_0(x) + \mathbf{Q}. \tag{4}$$

Як і у [8], $\mathbf{K}(z)$ можна назвати символом відповідного оператора $\mathbf{L}$ (у [8] кумулянта дійснозначного процесу $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ $\mathbf{K}(z) = \ln\mathbf{E}\big[e^{-z\xi(1)}\big]$ є символом відповідного складнішого інтегро-диференціального оператора $\mathbf{L}_0$). При відсутності стрибків χ_{kr} на ЛМ $\xi_I(t)$ — „чистий” пуассонівський процес на $x(t)$ $\mathbf{g}_I(s,z) = \mathbf{E}\big[z^{\xi_I(\theta_s)}\big] = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}_d(z) - \mathbf{Q})^{-1}$. При відсутності пуассонівських процесів $\xi_k(t), k \in \mathbb{E}$, $\mathbf{g}_2(s,z) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) - \mathbf{P}) - \mathbf{Q})^{-1}$ визначає генератрису блукання, що описується сумами стрибків $\{\chi_{kr}^{(n)}\}$ на переходах $x(t)$:

$$[S_{n(t)}]_{kr} = \sum_{i=1}^{n(t)} \chi_{j_{i-1}j_i}^{(i)}, \qquad j_0 = k, \quad j_{n(t)} = r,$$

де $n(t)$ — число стрибків $x(t)$ на $[0,t]$, $\mathrm{P}\{n(t) = k\} = \mathrm{P}\{\sigma_k < t, \sigma_{k+1} > t\}$.

Еволюція цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ЛМ з довільним розподілом стрибків у $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ описується матричною генератрисою

$$\mathbf{g}_t(z) = \big\|E[z^{\xi(t)},\, x(t) = r|\, x(0) = k]\big\| = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)}, \tag{5}$$

де згідно з другим співвідношенням у (4) матрична кумулянта $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \sum_{x \neq 0} (z^x - 1)\mathbf{\Pi}_0(x) + \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x), \tag{6}$$

$$\mathbf{P}_s = s \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = \mathbf{g}(s,1) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{7}$$

Для екстремумів процесу та їх доповнень, а також для функціоналів перетину додатного (від'ємного) рівня введемо наступні позначення:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \leqslant t' \leqslant t} (\inf)\xi(t'), \quad \xi^{\pm} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} (\inf)\xi(t), \quad \bar{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{+}(t), \quad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^{-}(t),$$

$$\tau^{+}(x) = \inf\{t > 0, \quad \xi(t) > x\}, \quad x \geqslant 0, \qquad \tau^{-}(x) = \inf\{t > 0, \xi(t) < x\}, \quad x \leqslant 0,$$

$$\gamma^{+}(x) = \xi(\tau^{+}(x)) - x, \quad \gamma_{+}(x) = x - \xi(\tau^{+}(x) - 0),$$

$$\mathbf{g}_{\pm}(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)} = \big\| E[z^{\xi^{\pm}(\theta_s)}, x(\theta_s) = r | x(0) = k] \big\|, \quad k, r = \overline{1,m},$$

$$\mathbf{g}^{-}(s,z) = \mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)}, \quad \mathbf{g}^{+}(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}.$$

Відповідні перетворення генератрис цих функціоналів описуються рівняннями типу (3) з тим же оператором $\mathbf{L}_s = s\mathbf{I} - \mathbf{L}$ з відповідно складнішими правими частинами. Символом $\mathbf{L}_s$ є матриця $s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)$, обернення якої визначає в (4) генератрису $\mathbf{g}(s,z)$. Тому при знаходженні генератрис вказаних функціоналів важливу роль відіграє матрична факторизація $\mathbf{g}(s,z)$ та уточнення зображення її компонент для майже напівнеперервних процесів. У [12] одержано матричний аналог о. ф. т., що встановлює зв'язок між $\mathbf{g}(s,z)$ та $\mathbf{g}_{+}(s,z)$, $\mathbf{g}^{-}(s,z)$, $\big(\mathbf{g}_{-}(s,z), \mathbf{g}^{+}(s,z)\big)$:

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}\, z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \mathbf{g}_{+}(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^{-}(s,z), \\ \mathbf{g}_{-}(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^{+}(s,z). \end{cases} \tag{8}$$

Зауважимо, що всі наступні ймовірності є строго додатними:

$$\mathbf{p}_{\pm}(s) = \mathbf{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0\} = \big\| \mathrm{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0,\, x(\theta_s) = r | x(0) = k\} \big\|,$$

$$\mathbf{q}_{\pm}(s) = \mathbf{P}\{\pm\xi^{\pm}(\theta_s) > 0\} = \big\| \mathrm{P}\{\pm\xi^{\pm}(\theta_s) > 0,\, x(\theta_s) = r | x(0) = k\} \big\| = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_{\pm}(s),$$

$$\mathbf{p}^{+}(s) = \mathbf{P}\big\{\check{\xi}(\theta_s) = 0\big\}, \qquad \mathbf{p}^{-}(s) = \mathbf{P}\big\{\bar{\xi}(\theta_s) = 0\big\}, \tag{9}$$

$$\mathbf{q}^{+}(s) = \mathbf{P}\big\{\check{\xi}(\theta_s) > 0\big\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^{+}(s), \qquad \mathbf{q}^{-}(s) = \mathbf{P}\big\{\bar{\xi}(\theta_s) < 0\big\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^{-}(s).$$

У статті [13] показано, що одна з пари компонент о. ф. т. (8) є матричною дробово-лінійною функцією відносно z, а інша визначається застосуванням операції проектування до генератриси розподілу самого процесу. Наше завдання полягає в тому, щоб із пар $\big\{\mathbf{g}_{+}(s,z),\, \mathbf{g}^{-}(s,z)\big\}$ і $\big\{\mathbf{g}_{-}(s,z),\, \mathbf{g}^{+}(s,z)\big\}$ виразити „непрості" генератриси розподілів без застосування операції проектування. Для цього наведемо поняття зворотного ЛМ (див. [15]) і використаємо допоміжні твердження про обернення сингулярно збурених матриць, наведені в [14, 16, 17].

Якщо $x(t)$ — однорідний регулярний ЛМ з твірною матрицею $\mathbf{Q}$ і матрицею $\mathbf{P}(t)$, то згідно з (7) її перетворення Лапласа – Карсона є оберненням сингулярно збуреної матриці $(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ $\big(|s\mathbf{I}-\mathbf{Q}|\neq 0$ при достатньо малих $s>0\big)$.

Для $x(t)$ існує стаціонарний розподіл $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0=\|p_{kr}^0\|,\ p_{kr}^0=\pi_r\,\forall\,k$, що визначається як границя обернення (7) при $s\to 0$:

$$\mathbf{P}_0=\lim_{s\to 0}s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \tag{10}$$

При цьому мають місце співвідношення

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}_0=\mathbf{0},\qquad \mathbf{P}_0\mathbf{Q}=\mathbf{0}. \tag{11}$$

Перше з них є очевидним, а друге визначає єдиний розв'язок відповідної системи лінійних рівнянь для значень стаціонарних імовірностей $\{\pi_k\}$ (див. [17]).

Позначимо для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (6) $\mathbf{M}_1^0=\mathbf{E}\xi(1)=\sum_{x\neq 0}x\mathbf{\Pi}_0(x)$, $\mathbf{D}_0=$ $=\mathbf{D}\xi(1)=\sum_{x\neq 0}x^2\mathbf{\Pi}_0(x)$, які далі вважаємо обмеженими. Крім того, позначимо $\widetilde{\mathbf{K}}(z)=$ $=\sum_{x\neq 0}(z^x-1)\mathbf{\Pi}_0(x)$ і відмітимо, що при $z=1+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$ $\widetilde{\mathbf{K}}(1+\varepsilon)\approx\varepsilon\widetilde{\mathbf{K}}'(1)+\dfrac{\varepsilon^2}{2}\widetilde{\mathbf{K}}''(1)$, де $\widetilde{\mathbf{K}}'(1)=\mathbf{E}\xi(1)=\mathbf{M}_1^0$, $\widetilde{\mathbf{K}}''(1)=\mathbf{D}\xi(1)=\mathbf{D}_0$.

Тоді при $z=1+\varepsilon$ має місце наближення

$$-\mathbf{K}(z)=(1-z)\mathbf{M}_1^0-\frac{1}{2}(1-z)^2\mathbf{D}_0-\mathbf{Q}+o(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Відповідно усереднені по стаціонарному розподілу $\mathbf{P}_0$ моменти позначимо так:

$$m_1^0=\sum_{k=1}^m\pi_k\sum_{r=1}^m\left[\delta_{kr}E\xi_k(1)+\sum_{r\neq k}^m n_kp_{kr}E\chi_{kr}\right], \tag{13}$$

$$\sigma_0^2=\sum_{k=1}^m\pi_k\sum_{r=1}^m\left[\delta_{kr}D\xi_k(1)+\sum_{r\neq k}^m n_kp_{kr}D\chi_{kr}\right]. \tag{14}$$

Для ергодичних ЛМ $x(t)$ в [15] введено поняття зворотного ЛМ $\widehat{x}(t)$.

Означення. *Якщо $x(t)$ — ергодичний ЛМ з твірною матрицею $\mathbf{Q}=\mathbf{N}(\mathbf{P}-\mathbf{I})$ з діагонально записаним стаціонарним розподілом $\mathbf{R}=\|\delta_{kr}\pi_r\|$, то зворотним до ЛМ $x(t)$ називається ЛМ $\widehat{x}(t)$, який визначається твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}=\mathbf{S}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{N}(\widehat{\mathbf{P}}-\mathbf{I})$, де $\mathbf{S}=\mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}$.*

Зворотний процес $\widehat{\xi}(t)(t\geqslant 0)$ на ЛМ $\widehat{x}(t)$ визначається кумулянтою і генератрисою $\widehat{\xi}(\theta_s)$: $\widehat{\mathbf{K}}(z)=\mathbf{S}\mathbf{K}^T(z)\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{g}}(s,z)=\mathbf{E}z^{\widehat{\xi}(\theta_s)}=s\big(s\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{K}}(z)\big)^{-1}$.

О. ф. т. (8) у термінах генератрис екстремумів зворотного процесу $\widehat{\mathbf{g}}_\pm(s,z)=\mathbf{E}z^{\widehat{\xi}^\pm(\theta_s)}$ набирає вигляду

$$\mathbf{g}(s,z)=\begin{cases}\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_-^T(s,z)\mathbf{S}^{-1},\\[2mm] \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_+^T(s,z)\mathbf{S}^{-1}.\end{cases} \tag{15}$$

З (8) та (15) випливають наступні співвідношення зв'язку між розподілами екстремумів звичайного та зворотного процесів:

$$\mathbf{g}^{\pm}(s,z) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}^T_{\pm}(s,z)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{P}_s = \mathbf{S}\,(\widehat{\mathbf{P}}_s)^T\mathbf{S}^{-1};\ \mathbf{q}^{+}(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}^T_{+}(s)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{q}^{-}(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}^T_{-}(s)\mathbf{S}^{-1}.$$

Мають місце наступні зображення матриць $\mathbf{p}^{\pm}_{*}(s)$ та $\mathbf{p}^{*}_{\pm}(s)$ (див. [14]):

$$\mathbf{p}^{*}_{\pm}(s) = \mathbf{p}_{\pm}(s)\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^{\pm}(0)},\ \tau^{\pm}(0) < \infty\big] = \mathbf{I} - \mathbf{T}^{\pm}_{*}(s,0), \tag{16}$$

$$\mathbf{p}^{\pm}_{*}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{\pm}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}\big(\mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^{\pm}(0)},\ \widehat{\tau}^{\pm}(0) < \infty]\big)^T\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{S}\big(\widehat{\mathbf{T}}^{\pm}_{*}(s,0)\big)^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}, \tag{17}$$

$$\mathbf{T}^{\pm}_{*}(s,0) = \mathbf{q}_{\pm}(s)\mathbf{P}_s^{-1}, \qquad \widehat{\mathbf{T}}^{\pm}_{*}(s,0) = \widehat{\mathbf{q}}_{\pm}(s)\widehat{\mathbf{P}}_s^{-1}.$$

2. Узагальнення співвідношень для генератрис розподілу екстремальних значень та їх доповнень у випадку майже напівнеперервності зверху. Розглянемо майже напівнеперервний зверху цілочисловий пуассонівський процес $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ з кумулянтою:

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_1(z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} + \sum_{x<0}(z^x - 1)(\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{p}_2(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{0} < \mathbf{C} < \mathbf{I}. \tag{18}$$

Для нього згідно з [13] „нескладні” компоненти о. ф. т. у (8) мають вигляд

$$\mathbf{g}_{+}(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}z)(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z)^{-1}\mathbf{p}_{+}(s),$$

$$\mathbf{p}_{+}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{19}$$

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_{+}(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_{+}(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C},$$

$$\mathbf{g}^{+}(s,z) = \mathbf{p}^{+}(s)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z),$$

$$\mathbf{p}^{+}(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}), \tag{20}$$

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^{+}(s) + \mathbf{C}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{+}(s).$$

Розглянемо вкладений ЛМ $(y^1_{*} = x(\tau^{+}(0)),\ y^0_{*} = x(0))$ з матрицею перехідних імовірностей $\mathbf{P}_{*} = \big\|\mathrm{P}\{y^1_{*} = r | y^0_{*} = k\}\big\|$ та твірною матрицею $\mathbf{Q}_{*} = \mathbf{P}_{*} - \mathbf{I}$, де $\mathbf{P}\{\tau^{+}(0) < \infty\} = \big\|\mathrm{P}\{\tau^{+}(0) < \infty,\ y^1_{*} = r | y^0_{*} = k\}\big\|$, $\mathbf{T}^{+}_{*}(s,0) = \big\|E[e^{-s\tau^{+}(0)},\ y^1_{*} = r|y^0_{*} = k]\big\|$.

Аналогічно введемо поняття зворотного ЛМ до вкладеного з твірною матрицею

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{*} = \mathbf{S}\mathbf{Q}^T_{*}\mathbf{S}^{-1}, \qquad \widehat{\mathbf{Q}}_{*} = \widehat{\mathbf{P}}_{*} - \mathbf{I},$$

$$\mathbf{P}\big\{\,\widehat{\tau}^{+}(0) < \infty\big\} = \big\|\mathrm{P}\{\widehat{\tau}^{+}(0) < \infty,\ \widehat{y}^1_{*} = r|\widehat{y}^0_{*} = k\}\big\| = \widehat{\mathbf{P}}_{*},$$

$$\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*}(s,0) = \big\|E[e^{-s\widehat{\tau}^{+}(0)},\ \widehat{y}^1_{*} = r|\widehat{y}^0_{*} = k]\big\|; \qquad \widehat{\mathbf{P}}_{*} = \big\|\mathrm{P}\{\widehat{y}^1_{*} = r|\widehat{y}^0_{*} = k\}\big\|, \quad k, r = \overline{1,m}.$$

Введемо позначення $\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}_{*})^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}_{*})^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}\big(\mathbf{E}\big[\widehat{\tau}^{+}(0)\big]\big)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*\mathbf{S}}(s,0) = \mathbf{S}\big(\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*}(s,0)\big)^T\mathbf{S}^{-1}$.

Згідно з (16), (17), (19), (20), введеними поняттями та позначеннями, значення $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$ виражаються через $\mathbf{T}^{+}_{*}(s,0)$, $\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*\mathbf{S}}(s,0)$:

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{T}_*^+(s,0) + \big(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0)\big)\mathbf{C}, \tag{21}$$

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0) + \mathbf{C}\big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0)\big). \tag{22}$$

Розглянемо такі можливі випадки:

1. Якщо $m_1^0 > 0$, то $\mathbf{T}_*^+(0,0) = \mathbf{P}_*$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(0,0) = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}$ і генератриса $\tau^+(0)$ при $s \to 0$ задовольняє наближення

$$\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0) = -\mathbf{Q}_* + s\mathbf{M}_* + o(s), \qquad \mathbf{M}_* = \mathbf{E}\tau^+(0) > 0. \tag{23}$$

Позначимо стаціонарний розподіл вкладеного ЛМ із твірною матрицею $\mathbf{Q}_*$ через $\mathbf{\Pi}_* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \|\pi_{*kr}\|$, $\pi_{*kr} = \rho_{*r}$, $k,r = \overline{1,m}$, а усереднення $\mathbf{M}_*$ по ρ_{*r}

$$\mu_*^+ = \sum_{k=1}^m \rho_{*k} \sum_{r=1}^m E\big[\tau^+(0),\, y_*^1 = r | y_*^0 = k\big].$$

Генератриса $\widehat{\tau}^+(0)$ при $s \to 0$ задовольняє наближення

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_* + s\widehat{\mathbf{M}}_* + o(s), \qquad \widehat{\mathbf{M}}_* = \mathbf{E}\widehat{\tau}^+(0) > 0. \tag{24}$$

Запишемо (24) у вигляді

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} + s\widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} + o(s). \tag{25}$$

Відповідно стаціонарний розподіл зворотного ЛМ з твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}_*$ позначимо через $\widehat{\mathbf{\Pi}}_* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}_*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{*kr}\|$, $\widehat{\pi}_{*kr} = \widehat{\rho}_{*r}$, $k,r = \overline{1,m}$, а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}_*$ по $\widehat{\rho}_{*r}$ — через

$$\widehat{\mu}_*^+ = \sum_{k=1}^m \widehat{\rho}_{*k} \sum_{r=1}^m E\big[\widehat{\tau}^+(0),\, \widehat{y}_*^1 = r | \widehat{y}_*^0 = k\big].$$

При $s \to 0$ граничні співвідношення (21) та (22) наберуть вигляду

$$\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{P}_* + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_*)\mathbf{C}, \qquad \mathbf{q}_+^*(0) = \mathbf{P}_*, \qquad \mathbf{p}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_*,$$

$$\mathbf{R}_0^{-1} = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} + \mathbf{C}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}), \qquad \mathbf{q}_*^+(0) = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}, \qquad \mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}.$$

2. Якщо $m_1^0 < 0$, то $\mathbf{T}_*^+(0,0) < \mathbf{P}_*$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(0,0) < \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}$. З (21) та (22) при $s \to 0$ випливає

$$\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{q}_+^*(0) + \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{C}, \qquad \mathbf{q}_+^*(0) < \mathbf{P}_*, \qquad \mathbf{p}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_+^*(0),$$

$$\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{q}_*^+(0) + \mathbf{C}\mathbf{p}_*^+(0), \qquad \mathbf{q}_*^+(0) < \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}, \qquad \mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_*^+(0).$$

3. Якщо $m_1^0 = 0$, то $\mathbf{T}_*^+(0,0) = \mathbf{P}_*$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(0,0) = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}$.

Із лем 1, 2 з [14] і співвідношень (21)–(23) та (25) випливає таке твердження.

Лема 1. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес, то при $0 < m_1^0 < \infty$ мають місце співвідношення*

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{M}_* - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*,$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_*, \tag{26}$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*\mathbf{S}}(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\widehat{\mathbf{M}}_{*}-\widehat{\mathbf{Q}}_{*})^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}^{+}_{*}}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}},$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}^{+}_{*}}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}, \tag{27}$$

а при $-\infty < m_1^0 < 0$ — *співвідношення*

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} = \mathbf{0}, \tag{28}$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1} = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Зауважимо, що $\mathbf{\Pi}_*\mathbf{P}_* = \mathbf{\Pi}_*$, $\mathbf{P}_*\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{\Pi}_*$, $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_*$.

Кумулянту (18) зведемо до вигляду

$$\mathbf{K}(z) = (z-1)\big[\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1} - z^{-1}\big(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)\big)\big] + \mathbf{Q}, \tag{30}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) = \sum_{x\leqslant 0} z^x \mathbf{P}\big\{\xi_k^{(1)} < x\big\}, \quad |z|\geqslant 1, \qquad \widetilde{\mathbf{F}}_-(z) = \sum_{x\leqslant 0} z^x \big\|p_{kr}\mathrm{P}\big\{\chi_{kr}^{(1)} < x\big\}\big\|, \quad |z|\geqslant 1,$$

$$\mathbf{K}(1) = \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{K}(\infty) = -\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2 - \mathbf{N}.$$

Теорема 1. *Якщо* $\xi(t)$ — *майже напівнеперервний зверху процес на ЛМ* $x(t)$, *то при* $|z|\geqslant 1$ *генератриса* $\xi^-(\theta_s)$ *має вигляд*

$$\mathbf{g}_-(s,z) = s\big(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z)\big)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}) =$$

$$= s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\big[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}\big](\mathbf{I}-\mathbf{C}), \tag{31}$$

$$\mathbf{p}_-(s) = s\big(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\big)^{-1}(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}), \tag{32}$$

$$\mathbf{g}_-(s,1) = \mathbf{P}_s. \tag{33}$$

Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, *то розподіл абсолютного мінімуму* ξ^- *невироджений і згідно з* (27) *справджуються граничні співвідношення*

$$\mathbf{g}_-(z) = \mathbf{E}z^{\xi^-} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z) = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}(1-z)\big(-\mathbf{K}(z)\big)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{P}_0 =$$

$$= \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\Big[\mathbf{\Lambda}_1 + (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{C})\Big(\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)\Big)\Big]^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{34}$$

$$\mathbf{g}_-(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}^{+}_{*}m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \frac{1}{\widehat{\mu}^{+}_{*}m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_* = \frac{\nu_0^+}{\widehat{\mu}^{+}_{*}m_1^0}\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0, \tag{35}$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0, \qquad \frac{1}{\widehat{\mu}^{+}_{*}} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}, \tag{36}$$

де $\nu_0^+ = \sum_{k=1}^m \pi_k \nu_k^+$, $\nu_k^+ = (1-c_k)^{-1}$,

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\big(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{N})\big)^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{37}$$

$$\mathbf{E}\big[\widehat{\tau}^+(0)\big] = (\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_0^{-1})', \tag{38}$$

а $\check{\xi}$ *має вироджений розподіл.*

Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, *то розподіл* ξ^- *вироджений, а розподіл* $\check{\xi}$ *невироджений і визначається наступними граничними співвідношеннями при* $s \to 0$:

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{p}^+[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z), \tag{39}$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^+(0). \tag{40}$$

Якщо $m_1^0 = 0$, *то розподіли* ξ^-, $\check{\xi}$ *вироджені.*

Доведення. З другої рівності у (8) згідно з (4), (7) і (20) отримаємо перше співвідношення у (31) $\mathbf{g}_-(s,z) = s\big(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)\big)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})$. Для доведення другого співвідношення в (31) множники $(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1})^{-1}$ зведемо до вигляду

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1})^{-1} = (\mathbf{R}_s - \mathbf{I}z)(\mathbf{R}_s - \mathbf{I})^{-1} =$$

$$= (\mathbf{R}_s - \mathbf{I})(\mathbf{R}_s - \mathbf{I})^{-1} + (1-z)(\mathbf{R}_s - \mathbf{I})^{-1} = \big[\mathbf{I} + (1-z)(\mathbf{R}_s - \mathbf{I})^{-1}\big].$$

Формули (32) і (33) отримаємо із першого співвідношення в (31) після граничного переходу відповідно при $z \to \infty$ та $z \to 1$ з урахуванням (30) та (7).

У випадку $0 < m_1^0 < \infty$ генератриса абсолютного мінімуму згідно з (27) визначається із (31) при $s \to 0$ після врахування (30) та попередніх зауважень:

$$\mathbf{g}_-(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z) = \lim_{s\to 0} s\big(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)\big)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}\big[\mathbf{I} + (1-z)(\mathbf{R}_s - \mathbf{I})^{-1}\big](\mathbf{I} - \mathbf{C}) =$$

$$= (1-z)\big(-\mathbf{K}(z)\big)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}z)\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} =$$

$$= \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\Big[\mathbf{\Lambda}_1 + (z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{C})\Big(\mathbf{Q}(1 - z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)\Big)\Big]^{-1}\mathbf{\Pi}_*. \tag{41}$$

Першу рівність у (35) отримуємо із $\mathbf{g}_-(z)$ після граничного переходу при $z \to 1$ у другому рядку (41) та врахування умови леми 2 (див. [14]). Оскільки $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_*$, то отримаємо другу рівність у (35). Перетворивши добуток $\mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_* = \nu_0^+\mathbf{\Pi}_*$, запишемо третю рівність у (35). Виконуючи граничний перехід у (33) при $s \to 0$, отримуємо $\mathbf{g}_-(1) = \mathrm{P}_0$. Таким чином, співвідношення (35) і (36) встановлено.

Врахувавши умови (36) у співвідношенні (41), отримаємо (34). Співвідношення (37) визначаємо із (32) при $z \to \infty$. Із співвідношення $(\mathbf{R}_0^{-1})' = \lim_{s\to 0}\dfrac{1}{s}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}) = \lim_{s\to 0}\dfrac{1}{s}(\mathbf{I} - \mathbf{C})(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0)) = (\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{E}\big[\widehat{\tau}^+(0)\big]$ випливає (38).

Останні частини в (34) та (41), виражені через $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z) \in L_-^0$, згідно з одержаними граничними значеннями $\mathbf{g}^-(s,1)$ та $\mathbf{g}^-(1)$, $\mathbf{g}^-(s,\infty)$, $\mathbf{g}^-(\infty)$ (які не дорівнюють 0 та ∞), дають підставу стверджувати, що вони належать до класу L_{-}^{0}, визначеного у [13], і тому операція проектування $[\cdot]_{-}^{0}$ не впливає на них.

Легко довести, що $\check{\xi}$ має вироджений розподіл. З (20) при $s \to 0$, врахувавши умову (11), отримаємо $\lim_{s\to 0} \mathbf{p}^{+}(s) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_0^{-1}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{P}_*) = \mathbf{0}$, отже, $\mathbf{g}_{+}(s,z) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$.

При $-\infty < m_1^0 < 0$ (39) і (40) випливають відповідно із першого та другого співвідношень у (20) при $s \to 0$ з урахуванням всіх викладок та позначень.

Якщо $m_1^0 = 0$, то $\mathbf{p}_{+}(s) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^{+}(s) = \mathbf{0}$ згідно з (19), (20) та умовами (11), а отже, $\mathbf{g}_{+}(s,z) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^{+}(s,z) = \mathbf{0}$ при $s \to 0$. Таким чином, ξ^{+}, $\overline{\xi}$ мають вироджені розподіли.

Майже аналогічно встановлюється наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес на ЛМ $x(t)$, то при $|z| \geqslant 1$ генератриса $\overline{\xi}(\theta_s)$ задовольняє співвідношення*

$$\mathbf{g}^{-}(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$

$$= (\mathbf{I}-\mathbf{C})[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}, \tag{42}$$

$$\mathbf{p}^{-}(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}s(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\mathbf{C})^{-1}, \tag{43}$$

$$\mathbf{g}^{-}(s,1) = \mathbf{P}_s. \tag{44}$$

Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, то розподіл $\overline{\xi} = \lim_{s\to 0}\big(\overline{\xi}(\theta_s) - \xi^{+}(\theta_s)\big)$ невироджений і згідно з (26) генератриса визначається граничним співвідношенням при $s \to 0$

$$\mathbf{g}^{-}(z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^{-}(s,z) = \frac{m_1^0}{\nu_0^{+}}\mathbf{P}_0(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\big(-\mathbf{K}(z)\big)^{-1} =$$

$$= \frac{m_1^0}{\nu_0^{+}}\mathbf{P}_0\left[\mathbf{\Lambda}_1 + (\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_{-}(z))(z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{C})\right]^{-1}, \tag{45}$$

$$\mathbf{g}^{-}(1) = \frac{1}{\mu_*^{+}}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^{+}}{\mu_*^{+}m_1^0}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0, \tag{46}$$

$$\frac{1}{\mu_*^{+}} = \frac{m_1^0}{\nu_0^{+}}, \tag{47}$$

$$\mathbf{p}^{-} = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^{+}}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_1+(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\mathbf{C})^{-1}, \tag{48}$$

$$\mathbf{E}[\tau^{+}(0)] = (\mathbf{Z}_0^{-1})'(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}, \tag{49}$$

а ξ^{+} має вироджений розподіл.

Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, то розподіл $\overline{\xi}$ вироджений, а розподіл ξ^{+} невироджений і визначається співвідношеннями

$$\mathbf{g}_{+}(z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}z)[\mathbf{I}-\mathbf{Z}_0^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_{+}, \tag{50}$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{P}_0. \tag{51}$$

Якщо $m_1^0 = 0$, *то розподіли* $\overline{\xi}$, ξ^+ *вироджені.*

Доведення. З першої рівності у (8) отримаємо $\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s((\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}\mathbf{g}(s,z)$. Тоді згідно з (4) і (19) $\mathbf{g}^-(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}$. Отже, перше співвідношення в (42) доведено. Для доведення другого співвідношення в (42) перетворимо множники $(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)$ так само, як і в теоремі 1. Співвідношення (43) і (44) отримуються із (42) шляхом граничного переходу при $z \to \infty$ і $z \to 1$ після врахування (30).

У випадку $0 < m_1^0 < \infty$ генератриса $\mathbf{g}^-(z)$ згідно з (26) визначається із (42) при $s \to 0$ та врахування попередніх викладок:

$$\mathbf{g}^-(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^-(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_0^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1}. \tag{52}$$

Першу рівність у (46) отримуємо із (52) при $z \to 1$ та леми 2 (див. [14]). Добуток $\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0 = \nu_0^+\mathbf{P}_0$, де $(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1} = \|E\xi_1^+\| = \|\delta_{kr}\nu_k^+\|$, дає другу рівність у (46). Остання рівність у (46) випливає з (44) після граничного переходу при $s \to 0$, а рівність (47) — із (46). Співвідношення (45) отримуємо із (52), попередньо підставивши (36) та (47). Друге співвідношення у (45) випливає із першого після підстановки замість $\mathbf{K}(z)$ (30). З граничного співвідношення

$$(\mathbf{Z}_0^{-1})' = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))(\mathbf{I}-\mathbf{C}) = \mathbf{E}[\tau^+(0)](\mathbf{I}-\mathbf{C})$$

після врахування (21) випливає (49).

Останні частини в (42) та (45), виражені через $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z) \in L_-^0$, згідно з одержаними граничними значеннями $\mathbf{g}^-(s,1)$ та $\mathbf{g}^-(1)$, $\mathbf{g}^-(s,\infty)$, $\mathbf{g}^-(\infty)$ (які не дорівнюють 0 та ∞), дають підставу стверджувати, що вони належать до класу L_-^0 і тому операція проектування $[\cdot]_-^0$ не впливає на них.

ξ^+ має вироджений розподіл, оскільки, здійснивши граничний перехід при $s \to 0$ у (19) і врахувавши (11) та попередні викладки, отримаємо $\lim_{s\to 0}\mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I}-\mathbf{P}_*)\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$, отже, $\mathbf{g}_+(s,z) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$.

Розглянемо випадок $-\infty < m_1^0 < 0$. Співвідношення (50) і (51) випливають відповідно із першого та другого співвідношень в (19) при $s \to 0$ з урахуванням всіх викладок та позначень.

Якщо $m_1^0 = 0$, то $\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{0}$ згідно з (19), (20) та умовою (11), а отже, $\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{0}$ при $s \to 0$. Таким чином ξ^+, $\overline{\xi}$ мають вироджені розподіли.

3. Аналоги співвідношень для генератрис екстремальних значень та їх доповнень у випадку майже напівнеперервності знизу. У даному пункті наведемо коротко отримані результати для майже напівнеперервних знизу процесів, оскільки їх справедливість встановлюється аналогічно до співвідношень, отриманих у випадку майже напівнеперервних зверху процесів.

Розглянемо майже напівнеперервний знизу цілочисловий процес $\xi(t)$ на ЛМ з кумулянтою:

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_2(1-z)(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} + \sum_{x>0}(z^x-1)(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{p}_1(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{0} < \mathbf{B} < \mathbf{I}. \tag{53}$$

Згідно з [13] деякі „нескладні” компоненти о. ф. т. у (8) є матричними дробово-лінійними функціями

$$\mathbf{g}_{-}(s,z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\mathbf{p}_{-}(s),$$

$$\mathbf{p}_{-}(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{54}$$

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{q}_{-}(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_{-}(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{g}^{-}(s,z) = \mathbf{p}^{-}(s)(z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),$$

$$\mathbf{p}^{-}(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)), \tag{55}$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^{-}(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{-}(s).$$

Як і у випадку майже напівнеперервних процесів, розглянемо вкладений ЛМ $(y_1^* = x(\tau^-(0))$, $y_0^* = x(0))$ з матрицею перехідних імовірностей $\mathbf{P}^* = \|\mathrm{P}\{y_1^* = r|y_0^* = k\}\|$ та твірною матрицею $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^* - \mathbf{I}$, де $\mathbf{P}\{\tau^-(0) < \infty\} = \|\mathrm{P}\{\tau^-(0) < \infty,\, y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\|$, $\mathbf{T}_*^-(s,0) = \left\|E[e^{-s\tau^-(0)},\, y_1^* = r|y_0^* = k]\right\|$, а також зворотний ЛМ до вкладеного з твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{S}(\mathbf{Q}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}^* = \widehat{\mathbf{P}}^* - \mathbf{I}$, $\mathbf{P}\{\widehat{\tau}^-(0) < \infty\} = \|\mathrm{P}\{\widehat{\tau}^-(0) < \infty,\, \widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k\}\| = \widehat{\mathbf{P}}^*$, $\widehat{\mathbf{T}}_*^-(s,0) = \left\|E[e^{-s\widehat{\tau}^-(0)},\, \widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k]\right\|$, $\widehat{\mathbf{P}}^* = \left\|\mathrm{P}\{\widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k\}\right\|$, $k,r = \overline{1,m}$, $\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\mathbf{E}[\widehat{\tau}^-(0)])^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0) = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{T}}_*^-(s,0))^T\mathbf{S}^{-1}$.

Для процесу $\xi(t)$ значення $\mathbf{Z}(s)$, $\mathbf{R}(s)$ виражаються через $\mathbf{T}_*^-(s,0)$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0)$:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{T}_*^-(s,0) + (\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^-(s,0))\mathbf{B}, \tag{56}$$

$$\mathbf{R}(s) = \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0) + \mathbf{B}(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0)). \tag{57}$$

Стаціонарний розподіл вкладеного ЛМ з твірною матрицею $\mathbf{Q}^*$ позначимо $\mathbf{\Pi}^* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q}^*)^{-1} = \|\pi_{kr}^*\|$, $\pi_{kr}^* = \rho_r^*$, $k,r = \overline{1,m}$, а усереднення $\mathbf{M}^*$ по ρ_r^*

$$\mu_*^- = \sum_{k=1}^m \rho_k^* \sum_{r=1}^m E[\tau^-(0),\, y_1^* = r|y_0^* = k].$$

Відповідно для зворотного ЛМ з матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}^*$: $\widehat{\mathbf{\Pi}}^* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{Q}}^*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{kr}^*\|$, $\widehat{\pi}_{kr}^* = \widehat{\rho}_r^*$, $k,r = \overline{1,m}$, а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}^*$ по $\widehat{\rho}_r^*$

$$\widehat{\mu}_*^- = \sum_{k=1}^m \widehat{\rho}_k^* \sum_{r=1}^m E[\widehat{\tau}^-(0),\, \widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k].$$

Як і в п. 2, мають місце такі випадки:

1. Якщо $m_1^0 < 0$, то при $s \to 0$ співвідношення (56) та (57) набирають вигляду

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{P}^* + (\mathbf{I}-\mathbf{P}^*)\mathbf{B}, \qquad \mathbf{q}_-^*(0) = \mathbf{P}^*, \qquad \mathbf{p}_-^*(0) = \mathbf{I}-\mathbf{P}^*,$$

$$\mathbf{R}(0) = \widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^* + \mathbf{B}(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^*), \qquad \mathbf{q}_*^-(0) = \widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^*, \qquad \mathbf{p}_*^-(0) = \mathbf{I}-\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^*.$$

2. Якщо $m_1^0 > 0$, то $\mathbf{T}_*^-(0,0) < \mathbf{P}^*$, $\widehat{\mathbf{T}}_*^-(0,0) < \widehat{\mathbf{P}}^*$. З (56), (57) при $s \to 0$ маємо

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{q}_-^*(0) + \mathbf{p}_-^*(0)\mathbf{B}, \qquad \mathbf{q}_-^*(0) < \mathbf{P}^*, \qquad \mathbf{p}_-^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_-^*(0),$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{q}_*^-(0) + \mathbf{B}\mathbf{p}_*^-(0), \qquad \mathbf{q}_*^-(0) < \widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^*, \qquad \mathbf{p}_*^-(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_*^-(0).$$

3. Якщо $m_1^0 = 0$, то $\mathbf{T}_*^-(0,0) = \mathbf{P}^*$, $\widehat{\mathbf{P}}^* = \widehat{\mathbf{T}}_*^-(0,0)$.

Із лем 1, 2 в [14] та попередніх співвідношень випливає таке твердження.

Лема 2. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес, то при $-\infty < m_1^0 < 0$ мають місце співвідношення*

$$\lim_{s\to 0} s\big(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^-(s,0)\big)^{-1} = \lim_{s\to 0} s\big(s\mathbf{M}^* - \mathbf{Q}^*\big)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^-}\mathbf{\Pi}^*,$$
$$\lim_{s\to 0} s\big(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s)\big)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^-}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{\Pi}^*, \tag{58}$$

$$\lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s\big(s\widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{S}}^* - \widehat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{S}}^*\big)^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^*,$$
$$\lim_{s\to 0} s\big(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s)\big)^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^*(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}, \tag{59}$$

а при $0 < m_1^0 < \infty$ — співвідношення

$$\lim_{s\to 0} s\big(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s)\big)^{-1} = \mathbf{0}, \qquad \lim_{s\to 0} s\big(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s)\big)^{-1} = \mathbf{0}.$$

Зауважимо, що $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{\Pi}^*$, $\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{\Pi}^*$, $\mathbf{\Pi}^*\mathbf{P}^* = \mathbf{\Pi}^*$.

Кумулянта (53) записується у вигляді

$$\mathbf{K}(z) = (1-z)\left[\mathbf{\Lambda}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \Big(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z)\Big)\right] + \mathbf{Q}, \tag{60}$$

де $\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) = \sum_{x\geqslant 0} z^x\mathbf{P}\{\xi_k^{(1)} > x\}$, $|z| \leqslant 1$, $\widetilde{\mathbf{F}}_+(z) = \sum_{x\geqslant 0} z^x\big\| p_{kr}\mathrm{P}\{\chi_{kr}^{(1)} > x\}\big\|$, $|z| \leqslant 1$, до того ж

$$\mathbf{K}(1) = \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{K}(0) = -\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{N}.$$

Мають місце аналогічні теореми, які наведемо без доведення.

Теорема 3. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ЛМ $x(t)$, то при $|z| \leqslant 1$ генератриса $\xi^+(\theta_s)$ має вигляд*

$$\mathbf{g}_+(s,z) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}) =$$

$$= s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}[\mathbf{I} + (z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}](\mathbf{I} - \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{p}_+(s) = s(s\mathbf{B} + \mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}), \qquad \mathbf{g}_+(s,1) = \mathbf{P}_s.$$

Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, то розподіл абсолютного максимуму ξ^+ невироджений і згідно з (59) *справджуються граничні співвідношення*

$$\mathbf{g}_+(z) = \mathbf{E}z^{\xi^+} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_+(s,z) = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(1-z)\big(\mathbf{K}(z)\big)^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0 =$$

$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\Big[\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{I}-\mathbf{B}z^{-1})\Big(\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1} - z\Big(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z)\Big)\Big)\Big]^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{61}$$

$$\mathbf{g}_+(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^* = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{\Pi}^* = \frac{\nu_0^-}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0,$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}, \qquad \nu_0^- = \sum_{k=1}^m \pi_k\nu_k^-,\ \nu_k^- = (1-b_k)^{-1},$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0, \qquad \mathbf{E}[\widehat{\tau}^-(0)] = (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(0))',$$

а $\overline{\xi}$ має вироджений розподіл.

Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, то розподіл ξ^+ вироджений, а розподіл $\overline{\xi}$ невироджений і визначається співвідношеннями

$$\mathbf{g}^-(z) = \mathbf{p}^-(z\mathbf{I}-\mathbf{R}(0))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}), \qquad \mathbf{p}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^-(0).$$

Якщо $m_1^0 = 0$, то розподіли ξ^+, $\overline{\xi}$ вироджені.

Теорема 4. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес на ЛМ $x(t)$, то при $|z| \leqslant 1$ генератриса $\check{\xi}(\theta_s)$ задовольняє співвідношення*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})\big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s)\big)^{-1}\big(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s)\big)(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}s\big(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z)\big)^{-1} =$$

$$= (\mathbf{I}-\mathbf{B})[\mathbf{I}+(z-1)(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}](z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}s\big(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z)\big)^{-1},$$

$$\mathbf{p}^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})\big((\mathbf{Z}(s))^{-1}-\mathbf{I}\big)^{-1}s\big(s\mathbf{B}+\mathbf{\Lambda}_2+(\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N})\mathbf{B}\big)^{-1}, \quad \mathbf{g}^+(s,1) = \mathbf{P}_s.$$

Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, то розподіл $\check{\xi} = \lim_{s\to 0}\left(\overline{\xi}(\theta_s) - \xi^-(\theta_s)\right)$ невироджений і згідно з (58) *його генератриса визначається співвідношенням при $s \to 0$*

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^+(s,z) = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(1-z)(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\big(\mathbf{K}(z)\big)^{-1} =$$

$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0\Big[\mathbf{\Lambda}_2 + \Big(\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1} - z\Big(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z)\Big)\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B}z^{-1})\Big]^{-1}, \tag{62}$$

$$\mathbf{g}^+(1) = \frac{1}{\mu_*^-}\mathbf{\Pi}^*(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\frac{1}{|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^-}{\mu_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0, \quad \frac{1}{\mu_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-},$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N})\mathbf{B})^{-1}, \quad \mathbf{E}[\tau^-(0)] = (\mathbf{Z}(0))'(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1},$$

а ξ^- має вироджений розподіл.

Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, *то розподіл* $\check{\xi}$ *вироджений, а розподіл* ξ^- *невироджений і визначається співвідношеннями*

$$\mathbf{g}_-(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{B})[z\mathbf{I} - \mathbf{Z}(0)]^{-1}\mathbf{p}_-, \qquad \mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \mathbf{p}_-^*(0)\mathbf{P}_0.$$

Якщо $m_1^0 = 0$, *тоді розподіли* $\check{\xi}$, ξ^- *вироджені.*

***Зауваження* 1.** Матричні співвідношення в теоремах 1 – 4 для $\mathbf{g}_\pm(s,z)$ та $\mathbf{g}^\pm(s,z)$ мають складніший вигляд, ніж у випадку звичайних цілочислових пуассонівських процесів. Це ускладнення обумовлене тим, що в даному випадку виникає потреба в розгляді зворотного процесу на ЛМ та його відповідних характеристик, необхідних для вияснення двоїстості о. ф. т. (8) і (15) та ймовірнісної інтерпретації компонент о. ф. т. Крім того, деякі з характеристик зворотного процесу вимагають додаткового вивчення (леми 1, 2) з метою встановлення відповідних граничних співвідношень (34), (61) та (45), (62) для $\mathbf{g}_\mp(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_\mp(s,z)$, $\mathbf{g}^\mp(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^\mp(s,z)$ при $\pm m_1^0 > 0$.

У скалярному випадку відповідні скорочення для майже напівнеперервного зверху цілочислового процесу $\xi(t)$ ($\mathbf{C} = c$) випливають з того, що $Z_s^{-1} = R_s^{-1} = q_+(s) + cp_+(s)$, оскільки $p^+(s) = p_+(s)$, $P_s = P_0 = 1$, $\xi^+(\theta_s) \doteq \overline{\xi}(\theta_s)$, $\xi^-(\theta_s) \doteq \check{\xi}(\theta_s)$. Для майже напівнеперервного знизу цілочислового процесу $\xi(t)$ ($\mathbf{B} = b$) мають місце аналогічні спрощення. Оскільки $p^-(s) = p_-(s)$, то $Z(s) = R(s) = q_-(s) + bp_-(s)$.

***Зауваження* 2.** Одержані в теоремах 1 – 4 компоненти факторизації $\mathbf{g}_\pm(s,z)$ та $\mathbf{g}^\pm(s,z)$, що визначають генератриси розподілів екстремумів та їх доповнень, необхідні для знаходження генератрис перестрибкових функціоналів $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$:

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)} z^{\gamma_i(x)},\, \tau^+(x) < \infty\big], \quad i = 1, 2.$$

Ці генератриси визначають першу та другу дисконтну (при $s > 0$) функції банкрутства (при $s \to 0$ і $m_1^0 < 0$ відповідні граничні функції банкрутства). Генератриси $\xi^\pm(\theta_s)$, що виражаються матричними дробово-лінійними функціями (див. (19) та (54)), визначають геометричний розподіл екстремумів (а також і генератрис $\tau^\pm(x)$), на підставі якого обчислюються дисконтні функції банкрутства. Крім того, при $\pm m_1^0 < 0$ генератриси $\mathbf{g}_\pm(z)$ (див. (34) і (61)) визначають розподіли $\xi^\pm$:

$$\mathbf{p}_k^+ = \mathbf{P}\{\xi^\pm = k\}, \quad \pm k \geqslant 0.$$

Для процесу ризику з дискретним розподілом вимог та з геометрично розподіленими преміями хвіст розподілу ξ^+ визначає функцію банкрутства

$$\mathbf{\Psi}(u) = \mathbf{P}\{\xi^+ > u\} = \sum_{k>u} \mathbf{p}_k^+, \qquad (\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{q}_+ < \mathbf{P}_0), \quad u \geqslant 0.$$

У випадку напівнеперервності (зверху $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, знизу $\mathbf{B} = \mathbf{0}$) співвідношення (34), (45) та (61), (62) нагадують класичну формулу Полячека – Хінчина для скалярного випадку. Крім того, з теореми 4 випливає таке твердження.

Наслідок. *Якщо для напівнеперервного знизу процесу ризику* $\xi(t)$ *на ЛМ вимоги* $\xi_k^{'}$ *мають біноміальний розподіл з матричним параметром* $\mathbf{P}^{'} = \| \delta_{kr} p_k^{'} \|_{k,r\in\mathbb{E}}$ *і*

$$\mathbf{p}_1(n) = \big\|\delta_{kr}\mathrm{P}\{\xi_k^{'} = n\}\big\| = C_m^n(\mathbf{P}^{'})^n(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{'})^{m-n}, \quad 0 \leqslant n \leqslant m,$$

то при відсутності стрибків $\{\chi_{kr}\}$, $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$, $x > 0$, $\widetilde{\mathbf{F}}_+(z) = \mathbf{0}$, *за умови* $m_1^0 = m\sum_{k=1}^m \pi_k\lambda_k^{(1)}p_k^{'} - \sum_{k=1}^m \pi_k\lambda_k^{(2)} < 0$ *генератриса* ξ^+ *згідно з* (61) *має вигляд*

$$\mathbf{g}_+(z) = |m_1^0|\big[\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{Q}\frac{z}{1-z} - \mathbf{\Lambda_1}\frac{z}{1-z}\sum_{k=1}^m (1-z^k)\mathbf{p}_1(k)\big]^{-1}\mathbf{P}_0, \quad \nu_0^- = 1,$$

$$\mathbf{p}_+ = |m_1^0|\mathbf{\Lambda}_2^{-1}\mathbf{P}_0, \qquad \mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{q}_+ = \big(\mathbf{I} - |m_1^0|\mathbf{\Lambda}_2^{-1}\big)\mathbf{P}_0.$$

Аналогічне твердження має місце для випадку, коли всі вимоги ξ_k' мають біноміальний розподіл зі спільним скалярним параметром $0 < p^{'} < 1$

$$\mathbf{p}_1(k) = C_n^k(\mathbf{p}^{'})^k(\mathbf{I} - \mathbf{p}^{'})^{n-k}, \quad \mathbf{p}' = p^{'}\,\mathbf{I},$$

за умови $m_1^0 = np^{'}\sum_{k=1}^m \pi_k\lambda_k^{(1)} - \sum_{k=1}^m \pi_k\lambda_k^{(2)} < 0$.

1. *Dickson D. C. M.* Some comments on the compound binomial model // Astin Bull. – 1994. – **24**, № 1. – P. 33 – 45.
2. *Willmot G. E.* Ruin probabilities in the compound binomial model // Insurance: Math and Econ. – 1992. – **12**. – P. 133 – 142.
3. *Cheng S., Gerber H. U., Shiu E. S. W.* Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model // Insurance: Math and Econ. – 2000. – **26**. – P. 239 – 250.
4. *Ежов И. И., Скороход А. В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – **14**, № 1. – С. 3 – 14.
5. *Arjas E.* On a fundamental identity in the theory of semi-Markov processes // Adv. Appl. Probab. – 1972. – **4**, № 2. – P. 258 – 270.
6. *Могульський А. А.* Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1974. – **11**. – С. 86 – 96.
7. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. – Hackensack: World Sci., 2010. – 602 p.
8. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
9. *Карнаух Є. В.* Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова: Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2007. – 18 с.
10. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 544 с.
11. *Гусак Д. В., Турениязова А. И.* О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 707 – 711.
12. *Гусак Д. В., Герич М. С.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інформ. – 2011. – **22**, № 2. – С. 54 – 63.
13. *Герич М. С.* Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова // Карпат. мат. публ. – 2012. – **4**, № 2. – С. 229 – 240.
14. *Герич М. С.* Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 21 – 27.
15. *Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
16. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. – Киев: Наук. думка, 1976. – 182 с.
17. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.

Одержано 11.09.13,
після доопрацювання — 16.06.15