УДК 517.944

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Чернигов. технол. ин-т)

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В УТОЧНЕННОЙ ШКАЛЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ*

We study the theory of elliptic boundary-value problems in the refined two-sided scale of the Hörmander spaces $H^{s,\varphi}$, where $s \in R$, φ is a functional parameter slowly varying on $+\infty$. In the case of the Sobolev spaces H^s, the function $\varphi(|\xi|) \equiv 1$. We establish that the considered operators possess the properties of the Fredholm operators, and the solutions are globally and locally regular.

Вивчається теорія еліптичних граничних задач в уточненій двосторонній шкалі просторів Хермандера $H^{s,\varphi}$, де $s \in R$, φ — повільно змінний на $+\infty$ функціональний параметр. У випадку просторів Соболєва H^s функція $\varphi(|\xi|) \equiv 1$. Встановлено фредгольмовість розглянутих операторів, глобальну та локальну регулярність розв'язків.

1. Введение. В настоящей работе исследуется оператор регулярной эллиптической задачи с однородными граничными условиями в уточненной двусторонней шкале гильбертовых функциональных пространств на ограниченной области. Гладкостные свойства функций пространств этой шкалы определяются двумя параметрами — числовым s и функциональным φ. Параметр φ является медленно меняющейся на $+\infty$ функцией одной переменной и уточняет основную s-гладкость. В частном случае $\varphi \equiv 1$ получается известная шкала бесселевых потенциалов. Основной результат работы — теорема о нетеровости указанного оператора в уточненной шкале при действительных неполуцелых s. В качестве приложения приводится утверждение о локальном повышении уточненной гладкости решения эллиптической граничной задачи. Отметим, что пространства функциональной гладкости были впервые введены и рассмотрены в работах [1, 2]. В настоящее время эти пространства являются предметом различных исследований (см., например, [3, с. 381 – 415; 4] и приведенную в них библиографию).

2. Уточненная шкала пространств. Напомним, что положительная функция φ, заданная на действительной полуоси $[b, +\infty)$, называется *правильно меняющейся* на $+\infty$ функцией порядка $s \in \mathbb{R}$, если φ измерима по Борелю на $[b, +\infty)$ и для любого $\lambda > 0$ справедливо

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \to \lambda^s \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка $s = 0$ называется *медленно меняющейся* на $+\infty$. Обозначим через SV совокупность всех медленно меняющихся на $+\infty$ функций. Очевидно, φ — правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка s тогда и только тогда, когда $\varphi(t) = \lambda^s \varphi_0(t)$, $t \geq b$, для некоторого $\varphi_0 \in \mathrm{SV}$.

Теория правильно меняющихся функций была основана И. Караматой в 30-х годах прошлого столетия. Эти функции близки по свойствам к степенным и достаточно изучены [5 – 7]. Они имеют многочисленные приложения, в основном благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа.

Приведем два простых примера [6, с. 48 – 50] медленно меняющихся функций.

***Пример* 1.** Пусть дано k действительных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Положим

* Частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (грант 01.07 / 00252).

$\varphi(t) := (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \ldots (\ln \ldots \ln t)^{r_k}$, $t >> 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{SV}$.

***Пример* 2.** Для $r < 1$ положим $\varphi(t) := \exp(\ln^r t)$, $t > 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{SV}$.

Известно (см., например, [6, с. 10]), что каждая функция $\varphi \in \mathrm{SV}$ допускает представление вида

$$\varphi(t) \;=\; \exp\left(\beta(t) + \int_b^t \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \right), \qquad t \;\ge\; b, \tag{1}$$

для некоторых числа $b > 0$, непрерывной функции $\alpha : [b, +\infty) \to \mathbb{R}$, стремящейся к нулю в $+\infty$, и измеримой по Борелю ограниченной функции $\beta : [b, +\infty) \to \mathbb{R}$, имеющей конечный предел в $+\infty$. Обратное также верно: любая функция вида (1) принадлежит классу SV. Отсюда, в частности, следует, что положительная дифференцируемая на $[b, +\infty)$ функция φ, удовлетворяющая условию

$$\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

принадлежит классу SV.

Опираясь на понятие медленно меняющейся функции, введем уточненную двустороннюю шкалу пространств распределений, заданных на n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех таких положительных функций φ, определенных на $[1, +\infty)$, что:

а) φ измерима по Борелю на $[1, +\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b)$, где $1 < b < +\infty$;

в) $\varphi \in \mathrm{SV}$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех таких распределений u медленного роста, заданных на $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\hat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle \xi \rangle^{2s} \varphi^2(\langle \xi \rangle) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \;<\; \infty. \tag{2}$$

Здесь и далее интеграл берется по всему $\mathbb{R}^n$, а $\langle \xi \rangle = \left(1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения его элементов u, v используем величину

$$\int \langle \xi \rangle^{2s} \varphi^2(\langle \xi \rangle) \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Это скалярное произведение порождает норму, равную корню квадратному из левой части неравенства (2).

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ является частным *изотропным* случаем пространств, рассмотренных Л. Хермандером [1, с. 54], а также Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [2, с. 14]. Отметим, что их пространства совпадают в гильбертовом случае. Для $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с известным пространством $H^s(\mathbb{R}^n)$ бесселевых потенциалов на $\mathbb{R}^n$. Из результатов упомянутых выше работ следует, что пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ полное, причем множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в нем. Кроме того, пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s,1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ двойственны относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ (здесь необходимо иметь в виду, что $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$). Далее, поскольку [6, с. 24]

$$t^{-\varepsilon}\varphi(t) \to 0 \quad \text{и} \quad t^{\varepsilon}\varphi(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0,$$

справедливы непрерывные плотные вложения

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), \qquad \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Таким образом, для пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ числовой параметр s задает основную гладкость, а функциональный параметр φ определяет подчиненную дополнительную гладкость, т. е. уточняет основную (степенную) s-гладкость. При этом семейство пространств $\left\{ H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M} \right\}$ будем называть *уточненной шкалой* (по отношению к двусторонней шкале $\left\{ H^s(\mathbb{R}^n) \colon s \in \mathbb{R} \right\}$ пространств бесселевых потенциалов).

Как известно [6, с. 23], для любого $\varphi \in \mathrm{SV}$ существует такая функция $\varphi_1 \in \mathrm{SV} \cap C^\infty((0;+\infty))$, что $\varphi(t)/\varphi_1(t)$ при $t \to +\infty$. Следовательно, при определении пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ можно вместо класса $\mathcal{M}$ взять более узкую совокупность всех положительных функций $\varphi \in \mathrm{SV} \cap C^\infty((0;+\infty))$. При этом с точностью до эквивалентности норм получим тот же запас пространств, нормы в которых уже будут вычисляться с помощью бесконечно гладкого весового множителя $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)$.

Введем теперь аналоги пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для замкнутых и открытых множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для замкнутого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $H_Q^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совокупность тех распределений $u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, носитель которых лежит в Q. Из первого вложения (3) следует, что $H_Q^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — замкнутое подпространство в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть Ω — открытое множество $\mathbb{R}^n$ и $\overline{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Рассмотрим фактор-пространство

$$H^{s,\varphi}(\Omega) = \frac{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}{H_{\hat{Q}}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

Поскольку $H_{\hat{Q}}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, пространство (4) также гильбертово. Скалярное произведение классов смежности

$$\left\{ v_j + w \colon w \in H_{\hat{Q}}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \right\}, \qquad j = 1; 2,$$

из пространства (4) равно скалярному произведению в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ распределений $v_j - \Pi v_j$, $j = 1; 2$, где Π — ортопроектор в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $H^{s,\varphi}_{\hat{Q}}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что пространство (4) естественно трактовать как пространство сужений на Ω всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. При этом норма в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ сужения v равна

$$\inf\left\{ \|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : u = v \text{ на } \Omega \right\}.$$

Всюду далее предполагается, что Ω — открытая ограниченная бесконечно гладкая область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ, причем $n \geq 2$. Пусть $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$. Обозначим через $C^\infty(\overline{\Omega})$ совокупность сужений на $\overline{\Omega}$ всех функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим $C_0^\infty(\Omega) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} u \in \Omega \right\}$. Будем отождествлять функцию из $C_0^\infty(\Omega)$ с ее сужением на Ω. Отметим следующие свойства пространств $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и $H^{s,\varphi}_{\overline{Q}}(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тогда*:

а) *множество* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *плотно в* $H^{s,\varphi}(\Omega)$;

б) *множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $H^{s,\varphi}(\Omega)$ *при* $s < 1/2$ *и в* $H^{s,\varphi}_{\hat{Q}}(\mathbb{R}^n)$ *при любом* s;

в) *пространства* $H^{s,\varphi}(\Omega)$ *и* $H^{-s,1/\varphi}_{\overline{Q}}(\mathbb{R}^n)$ *взаимно двойственны относительно скалярного произведения в пространстве* $L_2(\Omega)$;

г) *с точностью до эквивалентности норм* $H^{s,\varphi}_{\overline{Q}}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi}(\Omega)$ *при* $|s| < 1/2$.

Последнее равенство понимается в том смысле, что оператор сужения распределения на Ω *осуществляет изоморфизм между записанными пространствами.*

Ниже мы будем рассматривать эллиптический оператор в двусторонней шкале

$$\left\{ H^{s,\varphi} : s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M} \right\}, \tag{5}$$

которую построим следующим образом. Для $s \geq 0$ положим $H^{s,\varphi} = H^{s,\varphi}(\Omega)$. Для $s < 0$ обозначим через $H^{s,\varphi}$ гильбертово пространство, двойственное к $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ относительно скалярного произведения в пространстве $L_2(\Omega)$. Отметим, что в силу предложения 1 с точностью до эквивалентности норм справедливы равенства

$$H^{s,\varphi} = H^{s,\varphi}(\Omega), \quad s > -\frac{1}{2}, \quad H^{s,\varphi} = H^{s,\varphi}_{\overline{Q}}(\mathbb{R}^n), \quad s < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Двустороннюю шкалу (5) будем также называть уточненной. Далее в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначениях пространств (6) будем опускать.

3. Эллиптический оператор в уточненной шкале. Пусть на множестве

$\overline{\Omega}$ задан формальный линейный дифференциальный эллиптический оператор A четного порядка $2k$ с коэффициентами класса $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Рассмотрим для него однородную граничную задачу

$$Au = f \ \text{ на } \ \Omega, \qquad B_j u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Здесь и всюду далее B_j, $j = 1, \ldots, k$, — линейные дифференциальные граничные операторы различных порядков $\operatorname{ord} B_j \leq 2k - 1$ с бесконечно гладкими на Γ коэффициентами. Далее предполагается, что граничная задача (7) является *регулярной эллиптической* на Γ. Это означает [8, с. 167], что оператор A правильно эллиптичен на $\overline{\Omega}$, а система $\{B_j,\ j = 1, \ldots, k\}$ нормальна и удовлетворяет условию дополнительности по отношению к A на Γ.

Рассмотрим также однородную граничную задачу

$$A^{+} v = g \ \text{ на } \ \Omega, \qquad B_j^{+} v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

формально сопряженную к задаче (7) относительно формулы Грина [8, с. 168]

$$(Au, v) + \sum_{j=1}^{k} \left\langle B_j u, C_j^{+} v \right\rangle = (u, A^{+} v) + \sum_{j=1}^{k} \left\langle C_j u, B_j^{+} v \right\rangle,$$

справедливой для любых $u, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Здесь A^{+} — формально сопряженный к A линейный дифференциальный эллиптический оператор порядка $2k$ с коэффициентами класса $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $\{B_j\}$, $\{C_j\}$, $\left\{C_j^{+}\right\}$ — нормальные системы линейных дифференциальных граничных операторов с бесконечно гладкими на Γ коэффициентами, причем порядки этих операторов удовлетворяют условию

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^{+} = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^{+} = 2k - 1,$$

и, наконец, $(\cdot,\cdot)$ и $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярные произведения в пространстве $L_2(\Omega)$ и в $L_2(\Gamma)$ соответственно. Обозначим $m_j := \operatorname{ord} B_j$, $m_j^{+} := B_j^{+}$. Известно [8, с. 168], что задачи (7) и (8) являются одновременно регулярно эллиптическими.

С задачами (7), (8) свяжем некоторые функциональные пространства. Положим

$$C^{\infty}(\text{гр}) := \left\{ u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \colon B_j u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \ \ (j = 1, \ldots, k) \right\},$$

$$C^{\infty}(\text{гр})^{+} := \left\{ v \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \colon B_j^{+} v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \ \ (j = 1, \ldots, k) \right\}.$$

Для $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ обозначим через $H^{s,\varphi}(\text{гр})$ и $H^{s,\varphi}(\text{гр})^{+}$ замыкания соответственно множеств $C^{\infty}(\text{гр})$ и $C^{\infty}(\text{гр})^{+}$ в $H^{s,\varphi}$. Пространства $H^{s,\varphi}(\text{гр})$ и $H^{s,\varphi}(\text{гр})^{+}$ имеют следующее конструктивное описание.

Предложение 2. *Если* $s > -1/2$ *и* $s \neq m_j + 1/2$, $j = 1, \ldots, k$, *то* $H^{s,\varphi}(\text{гр}) = \{u \in H^{s,\varphi}(\Omega) \colon B_j u = 0$ *на* Γ *для всех* $j = 1, \ldots, k$ *таких, что* $s > m_j + 1/2\}$, *причем здесь для* $u \in H^{s,\varphi}(\Omega) \subset H^{s-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, *распределение* $B_j u$ *на* Γ *понимается в смысле теоремы о следах* [8, с. 82], *примененной к пространству* $H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ *бесселевых потенциалов на* Ω. *Далее, если* $s < 1/2$, *то с точностью до эквивалентности норм* $H^{s,\varphi}(\text{гр}) = H_{\overline{Q}}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. *Наконец, это* *предложение сохраняет силу, если в его формулировке заменить* (гр) *на* $(\text{гр})^+$, B_j *на* B_j^+ *и* m_j *на* m_j^+.

Обозначим также $N := \{ u \in C^\infty(\text{гр}) \colon Au = 0 \text{ на } \Omega \}$ и $N^+ := \{ v \in C^\infty(\text{гр})^+ \colon A^+ v = 0 \text{ на } \Omega \}$. Из общей теории эллиптических граничных задач [8, с. 169] следует, что пространства N и N^+ конечномерны. Это позволяет построить в шкале (5) совокупные проекторы на подпространства, ортогональные соответственно N и N^+ относительно формы $(\cdot, \cdot)$, являющейся расширением по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. *Для произвольного* $u \in H^{s,\varphi}(\text{гр})$ *существует такой единственный элемент* $u_0 \in N$, *что* $(u - u_0, w) = 0$ *для любого* $w \in N$. *При этом отображение* $P \colon u \to u_1 = u - u_0$ *является проектором пространства* $H^{s,\varphi}$ *на замкнутое подпространство*

$$\{ u_1 \in H^{s,\varphi} \colon (u_1, w) = 0 \ \text{для любого} \ w \in N \}$$

таким, что образ Pu *не зависит от* s, φ. *Это предложение сохраняет силу, если в его формулировке заменить* N *на* N^+ *и* P *на* P^+.

Наконец, для произвольных $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ положим

$$M_{\sigma,\varphi} := \{ h \in H^{\sigma,\varphi} \colon (h, w) = 0 \ \text{для любого} \ w \in C^\infty(\text{гр})^+ \}.$$

Очевидно, это замкнутое подпространство в пространстве $H^{\sigma,\varphi}$. Кроме того, в силу первого равенства (6) $M_{\sigma,\varphi} = \{0\}$ при $\sigma > -1/2$.

Сформулируем теперь основной результат работы. Предварительно напомним следующее определение [8, с. 109]. Линейный ограниченный оператор $T \colon X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *нетеровым,* если его ядро и коядро конечномерны, а область значений замкнута в Y.

Теорема 1. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, *причем*

$$s \neq m_j + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad s \neq m_j^+ + \frac{1}{2} \quad \text{для каждого} \quad j = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Тогда отображение

$$u \mapsto \{ Au + h \colon h \in M_{s-2k,\varphi} \},$$

заданное на функциях $u \in C^\infty(\text{гр})$, *продолжается по непрерывности до линейного ограниченного нетерового оператора*

$$A_{(\text{гр})} \colon H^{s,\varphi}(\text{гр}) \to H^{s-2k,\varphi} / M_{s-2k,\varphi} \tag{10}$$

с ядром N *и коядром* N^+. *Сужение оператора на* $P(H^{s,\varphi}(\text{гр}))$ *осуществляет изоморфизм*

$$A_{(\text{гр})} \colon P(H^{s,\varphi}(\text{гр})) \leftrightarrow P^+(H^{s-2k,\varphi}) / M_{s-2k,\varphi}.$$

Таким образом, оператор $A_{(\text{гр})}$ регулярной эллиптической однородной граничной задачи оставляет инвариантным функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$, уточняющий основную s-гладкость пространства. Здесь необходимо иметь в виду, что

$$H^{s-2k,\varphi}/M_{s-2k,\varphi} = H^{s-2k,\varphi} \quad \text{при} \quad s > 2k - \frac{1}{2}.$$

Отметим также, что пространства $H^{s-2k,\varphi}/M_{s-2k,\varphi}$ и $H^{2k-s,1/\varphi}(\text{гр})^+$ двойственны относительно формы $(\cdot,\cdot)$ при любом действительном s.

Теорема 1 переносит известные результаты Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [9], [10] (§ 5.5) со шкалы пространств бесселевых потенциалов (случай $\varphi \equiv 1$) на уточненную шкалу пространств. Отметим, что в несколько иной односторонней уточненной шкале регулярная эллиптическая задача (с неоднородными граничными условиями) исследовалась Г. Шлензак [11]. При этом рассматривались лишь достаточно гладкие пространства (применительно к данным построениям это случай $s \geq 2k$).

4. Локальное повышение гладкости. Обозначим через $H^{-\infty}$ объединение всех пространств $H^{s,\varphi}$, где $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Положим

$$M_{-\infty} := \left\{ h \in H^{-\infty} : (h, w) = 0 \ \text{ для любого } \ w \in C(\text{гр})^+ \right\}.$$

Операторы (10), взятые вместе для всех $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, определяют линейное отображение

$$A_{(\text{гр})} : H^{-\infty} \to H^{-\infty}/M_{-\infty}.$$

Зададимся следующим вопросом. Пусть распределение $u \in H^{-\infty}$ удовлетворяет уравнению

$$A_{(\text{гр})} u = \{ f + h : h \in M_{-\infty} \}, \tag{11}$$

причем f имеет данную гладкость на некотором открытом в $\overline{\Omega}$ множестве. Что тогда можно сказать о гладкости решения на этом множестве? Сформулируем ответ на этот вопрос.

Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $\Omega_0 = \overline{\Omega} \cap U \neq \neq \varnothing$. Положим $\Gamma_0 := \Gamma \cap U$ (возможен случай $\Gamma_0 = \varnothing$). Введем следующие пространства уточненной гладкости на Ω_0. Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ обозначим через $H^{s,\varphi}_{\text{loc}}(\Omega_0)$ совокупность всех таких $u \in H^{-\infty}$, что $\chi u \in H^{s,\varphi}$ для любой функции $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, носитель которой $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0$. (Отметим, что здесь произведение χu определено, поскольку отображение

$$u \mapsto \chi u \quad (u \in C^\infty(\overline{\Omega}))$$

продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора в каждом пространстве шкалы (5).) Далее, положим

$$H^{s,\varphi}_{\text{loc}}(\Omega_0, \text{гр}, \Gamma_0) =$$

$$= \left\{ u \in H^{s,\varphi}_{\text{loc}}(\Omega_0) : B_j u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \ \text{ для всех } \ j = 1, \ldots, k; \ s > m_j + \frac{1}{2} \right\}.$$

Здесь предполагается, что $s \neq m_j + 1/2$, $j = 1, \ldots, k$.

Теорема 2. *Пусть* $u \in H^{-\infty}$ *является решением уравнения* (11), *в котором* $u \in H^{s-2k,\varphi}_{\text{loc}}(\Omega_0)$ *для некоторого* $s \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющего* (9), *и некоторого*

$\varphi \in \mathcal{M}$. *Тогда* $u \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \text{гр})$.

Это утверждение — теорема о локальном повышении уточненной гладкости решения регулярной эллиптической задачи с однородными граничными условиями. Заметим, что в случае $\overline{\Omega} \subset U$ (т. е. $\Omega_0 = \overline{\Omega}$, $\Gamma_0 = \Gamma$) „локальные" пространства совпадают с „глобальными":

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) = H^{s,\varphi} \quad \text{и} \quad H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \text{гр}, \Gamma) = H^{s,\varphi}(\text{гр}).$$

Поэтому теорема 2 содержит также утверждение о глобальном повышении гладкости, т. е. во всей замкнутой области $\overline{\Omega}$. Наконец, отметим еще случай $U \subset \Omega$ (т. е. $\Gamma_0 \neq \varnothing$), который приводит к утверждению о повышении гладкости внутри области Ω.

Теорема 2 переносит известный результат Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [9], [10] (§ 7.3) о локальном повышении гладкости решений со шкалы пространств бесселевых потенциалов (случай $\varphi \equiv 1$) на уточненную двустороннюю шкалу пространств.

1. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
2. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 35–74.
3. *Трибель Х.* Теории функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
4. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators // Cambridge Tracts in Math. – 1999. – № 120. – 252 p.
5. *Haan L. de.* On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes // Math. Cent. Tracts. – 1970. – № 32. – 124 p.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
8. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
9. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745–748.
10. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.
11. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. – 1974. – № 4. – С. 48–58.

Получено 03.02.2005