УДК 517.57

О. Б. Скасків, О. М. Тракало (Львів. нац. ун-т)

ПРО СТІЙКІСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

We establish necessary and sufficient conditions for logarithms of the maximal terms of the entire Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ and $B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n e^{z\lambda_n}$ to be asymptotically equivalent as $\operatorname{Re} z \to +\infty$ outside some set of finite measure.

Встановлено необхідні і достатні умови для того, щоб логарифми максимального члена цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ і максимального члена цілого ряду Діріхле $B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n e^{z\lambda_n}$ були асимптотично еквівалентними при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

Нехай $\lambda = (\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ — довільна послідовність. Через $S(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних в усій комплексній площині рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}. \tag{1}$$

Для $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \ge 0\}$ максимальний член ряду (1). Нехай L — клас додатних неперервних на $[0; +\infty)$ функцій l таких, що $l(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, тобто l монотонно зростає до $+\infty$ на деякому інтервалі $[x_0; +\infty)$. Через W позначимо клас функцій $w \in L$ таких, що $\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x)\, dx < +\infty$.

Для довільної, що не перетворюється в нуль, комплексної послідовності (b_n), а також функції $w \in W$ введемо до розгляду ряди Діріхле

$$B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n e^{z\lambda_n}, \quad B^-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} e^{z\lambda_n}, \quad B_w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n) + z\lambda_n}.$$

Якщо послідовність $\{b_n : n \ge 0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задовольняє умову

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left(|b_n| + |b_n|^{-1}\right) < +\infty, \tag{2}$$

то $F \in S(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $B \in S(\lambda)$ і $B^- \in S(\lambda)$, а з того, що $B_w \in S(\lambda)$ і $\ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \le w(\lambda_n)$, $n \ge n_1$, випливає $\{F, B, B^-\} \subset S(\lambda)$.

Нижче під мірою будемо розуміти борелеву міру на промені $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, тобто невід'ємну зліченно-адитивну локально скінченну (тобто таку, що для кожного скінченного інтервалу його міра є скінченною) функцію множини, визначену на σ-алгебрі борелевих множин на $\mathbb{R}_+$.

Наступну, анонсовану в [1], теорему застосовано до дослідження зростання цілих рядів Діріхле на кривих.

Теорема А [1]. *Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ при $n \to +\infty$ послідовність додатних чисел і виконуються умови* (2) *та*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < +\infty. \tag{3}$$

Для того щоб для кожної функції $F \in S(\lambda)$ *при* $\sigma \to +\infty$ *зовні деякої множини* $E \subset [0; +\infty)$ *скінченної лебегової міри справджувались асимптотичні рівності*

$$\ln \mu(\sigma, F) = \big(1 + o(1)\big) \ln \mu(\sigma, B) = \big(1 + o(1)\big) \ln \mu(\sigma, B^{-}), \tag{4}$$

необхідно і достатньо, щоб існувала функція $w \in W$, *для якої*

$$\ln\big(|b_n| + |b_n|^{-1}\big) \leq w(\lambda_n), \qquad n \geq n_1. \tag{5}$$

У випадку, коли співвідношення (4) виконуються при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної лебегової міри, будемо говорити, що максимальний член ряду Діріхле (1) є *стійким* (*стійким за Гайсиним*).

Нехай $\psi \in L$. Будемо говорити, що максимальний член ряду (1) є ψ-*стійким,* якщо співвідношення

$$\psi\big(\ln \mu(\sigma, F)\big) = \big(1 + o(1)\big) \psi\big(\ln \mu(\sigma, B)\big) = \big(1 + o(1)\big) \psi\big(\ln \mu(\sigma, B^{-})\big) \tag{6}$$

виконуються при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної лебегової міри.

У цій статті знайдено необхідні і достатні умови стійкості максимального члена ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$. Зазначимо, що якщо знайдену тут умову інтерпретувати у вигляді окремих достатніх умов на показники і функцію w (у цьому зв'язку див. наслідок 1), то замість умови на показники (3) стійкість за Гайсиним забезпечує умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{7}$$

яка є значно слабшою за умову (3).

Крім цього, вказано достатні умови ψ-стійкості. На думку авторів отримані тут твердження є цікавими як з огляду на знайдені в [1] застосування таких тверджень, так і самі по собі.

Зауважимо, що, не зменшуючи загальності, далі можна вважати, що $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $n \geq 0$. Доведемо спочатку наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $B_w \in S(\lambda)$, $w \in L$ *і виконується умова* (5). *Якщо*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln \nu(t)}{t^2} dt < +\infty, \tag{8}$$

де $\nu(t) = \int_0^t e^{w(x)} dn(x)$, $n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$, *то максимальний член* $\mu(\sigma, F)$ *є стійким.*

***Наслідок* 1.** *Нехай для* $\lambda = (\lambda_n)$ *виконується умова* (7), *а для* (b_n) — *умова* (5). *Якщо* $F \in S(\lambda)$ *і* $w \in W$, *то максимальний член* $\mu(\sigma, F)$ *є стійким.*

Доведення наслідку. Відомо (див., наприклад, [2]), що умова (7) є рівносильною до умови $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln n(t)\, dt < +\infty$. Враховуючи, що $\nu(t) \leq e^{w(t)} n(t)$ і $w \in W$, безпосередньо переконуємось, що виконується умова (8).

З умови $w \in W$ випливає, що $w(\lambda_n) = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, тому з умови $F \in S(\lambda)$ маємо, що $B_w \in S(\lambda)$. Застосування теореми 1 завершує доведення наслідку.

***Доведення теореми* 1.** Досить довести, що $\ln \mu(\sigma, F) = \big(1 + o(1)\big) \ln \mu(\sigma, B_w)$ при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри. Нехай $a(t)$, $b(t)$ — такі неперервні невід'ємні функції, що $a(\lambda_n) = a_n$, $b(\lambda_n) = e^{w(\lambda_n)}$ і

$$\mu(\sigma, F) = \sup\{a(t)e^{t\sigma} : t \geq 0\}, \qquad \mu(\sigma, B_w) = \sup\{a(t)b(t)e^{t\sigma} : t \geq 0\}.$$

За умовою (5) для всіх досить великих σ

$$\mu(\sigma, B_w^-) \le \mu(\sigma, B) \le \mu(\sigma, B_w) \qquad \mu(\sigma, B_w^-) \le \mu(\sigma, B^-) \le \mu(\sigma, B_w),$$

де $B_w^-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-w(\lambda_n)+z\lambda_n}$. Тому, оскільки, з одного боку,

$$\mu(\sigma, B_w^-) \le \mu(\sigma, F) \le F(\sigma) \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\sigma\lambda_n} e^{w(\lambda_n)} = \int_0^{+\infty} a(t) e^{t\sigma} d\nu(t) \overset{\mathrm{df}}{=} B_1(\sigma), \tag{9}$$

а з іншого —

$$\mu(\sigma, F) \le \mu(\sigma, B_w) \le B_w(\sigma) \le \int_0^{+\infty} a(t) e^{\sigma t} d\nu(t) = B(\sigma), \tag{10}$$

для завершення доведення досить двічі скористатись наступним твердженням з [3].

Лема. *Нехай* $I(\sigma)$ — *функція, що зображується для всіх* $\sigma \ge 0$ *інтегралом вигляду*

$$I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{\sigma t} dv(t), \tag{11}$$

де v — *міра на* $\mathbb{R}_+$, *а* $f(t) \ge 0$, $t \ge 0$, — v*-вимірна функція. Якщо виконується умова*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln v_0(t)}{t^2} dt < +\infty, \qquad v_0(t) = v((0, t]), \tag{12}$$

то

$$\ln I(\sigma) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, I) \tag{13}$$

при $\sigma \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної лебегової міри, де* $\mu_*(\sigma, I) = \sup\{ f(t) e^{\sigma t} \colon t \in \operatorname{supp} v \}$, *а* $\operatorname{supp} v = \{ x \in \mathbb{R}_+ \colon (\forall \varepsilon > 0)[v((x - \varepsilon; x + \varepsilon)) > 0] \}$ — *носій міри* v.

Застосовуючи лему до інтегралів в (9) і (10), послідовно при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної лебегової міри отримуємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \le \ln B_1(\sigma) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, B_1) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F)$$

та

$$\ln \mu(\sigma, F) \le \ln \mu(\sigma, B_w) \le \ln B_w(\sigma) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, B_1) =$$

$$= (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F),$$

тобто, з огляду на те, що для міри $dv(t) = d\nu(t)$ виконується умова (8), а отже і умова (12), теорему 1 доведено.

Використовуючи іншу теорему (доведену в [3] для функцій вигляду (11)), подібно до того, як ми отримали теорему 1, доводимо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $w \in L$, *а* $\psi \in L$ *така, що функція* $\psi'(x)/\psi(x)$ — *не зростаюча,* $\psi(x) = o(x\psi'(x))$ $(x \to +\infty)$. *Якщо існують* $\{\omega_1, \omega_2\} \subset W$ *такі, що*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\psi'(\omega_1(t))}{\psi(\omega_1(t))} \ln^+ \nu\left(t - \sqrt{\omega_2^{-1}(t)};\ t + \sqrt{\omega_2^{-1}(t)}\right] = 0,$$

де $\nu(a; b] = \nu(b) - \nu(a)$, $\nu(t) = \int_0^t e^{w(x)} dn(x)$, ω_2^{-1} — *обернена функція до* ω_2, *то у випадку, коли* $B_w \in S(\lambda)$ *і виконується умова* (5), *максимальний член* $\mu(\sigma, F)$ *є* ψ*-стійким.*

Той факт, що умова (8) є необхідною для стійкості максимального члена кожного цілого ряду Діріхле (1), отримаємо з наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай* ν — *міра на* $\mathbb{R}_+$, *для якої*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\ln \nu_0(t)}{t} = +\infty, \qquad \ln \nu_0(t) = O(t), \qquad t \to +\infty,$$

де $\nu_0(t) = \nu((0,t])$. *Існує додатна функція* I, *визначена для всіх* $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *інтегралом* (11), *така, що для деяких* $d > 0$, $\sigma_0 > 0$ *і для всіх* $\sigma \ge \sigma_0$

$$\ln I(\sigma) \ge (1+d) \ln \mu_*(\sigma, I).$$

Доведення. Скористаємось модифікацією конструкції, яка використовувалась в [2] для доведення подібного твердження в класі $S(\lambda)$. При цьому окремі міркування повторюємо майже дослівно. Нехай $V_0(t) = \int_1^t \nu_0(x)/x\,dx$, $B = (1-2d)^{-1}$,

$$\psi(y) = -By\int_1^y t^{-2} \ln\big(V_0(A(t+1))/\ln(t+1)\big)dt, \qquad 0 < A < 1,$$

$$f(y) = \begin{cases} \exp\{\psi(y)\}, & y \ge 1, \\ 1, & 0 < y \le 1. \end{cases}$$

Враховуючи, що

$$\int_0^T \frac{\ln \nu_0(t)}{t^2}\,dt = -\frac{\ln \nu_0(T)}{T} + \int_0^T \frac{d\ln \nu_0(t)}{t},$$

$$V_0(t) \ge \int_{t/e}^{t} \frac{\nu_0(x)}{x}\,dx \ge \nu_0\!\left(\frac{x}{e}\right),$$

маємо

$$\int_1^{+\infty} t^{-2} \ln\big(V_0(A(t+1))/\ln(t+1)\big)dt = +\infty.$$

Тому інтеграл

$$I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(y)e^{\sigma y}\,d\nu(y)$$

для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+$ визначає значення $I(\sigma) < +\infty$. Справді, за умовою, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\ln \nu_0(t) \le -1/6\psi(t)$ $(t \ge 2)$, а при фіксованому $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma \le \frac{1}{2}\int_1^y t^{-2} \ln\big(V_0(A(t+1))/\ln(t+1)\big)dt, \qquad y \ge y_0,$$

тому з розгляду інтеграла

$$\int_2^{+\infty} e^{1/2\psi(y)}d\nu(y) = \int_2^{+\infty} e^{1/2\psi(y)}d\nu_0(y) = \nu_0(y)e^{1/2\psi(y)}\Big|_2^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \nu_0(y)e^{1/2\psi(y)}d\psi(y) \le$$

$$\le -\nu_0(2) + \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} e^{1/3\psi(y)}\,d(-\psi(y)) = -\nu_0(2) + \frac{3}{2}e^{1/3} < +\infty$$

отримуємо потрібний висновок; при цьому ми скористались тим, що $\ln v_0(t) = o(|\psi(t)|)$, $t \to +\infty$, і $\psi(t)$ монотонно не зростає до $-\infty$ при $t \to +\infty$.

Розглянемо тепер для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}_+$ функцію

$$\psi_0(y, \sigma) = \psi(y) + \sigma y.$$

Як і в [2], переконуємось, що $\psi_0(y, \sigma)$ для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}_+$ є вгнутою функцією від $y \geq 1$. Справді,

$$V_0(A(y+1)) = \int_1^{A(y+1)} \frac{v_0(t)}{t} dt \leq v_0(A(y+1)) \ln (A(y+1)) < v_0(A(y+1)) \ln (y+1),$$

тому

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = -B \frac{[v_0(A(y+1)) \ln (y+1) - V_0(A(y+1))]}{y(y+1) \ln (y+1) V_0(A(y+1))} < 0.$$

Функція $\psi_0(y, \sigma)$ при кожному $\sigma \in \mathbb{R}_+$ має єдину точку максимуму $\bar{y} = y(\sigma) \geq \geq 1$, яку визначаємо, як і в [2], з рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -B \int_1^y t^{-2} \ln (V_0(A(t+1)) / \ln (t+1)) dt -$$

$$- \frac{B}{y} \ln (V_0(A(y+1)) / \ln (y+1)) + x = 0,$$

а також $\psi(y, \sigma) \geq \psi(1, \sigma) = \sigma \geq 0$ $(1 \leq y \leq \bar{y}, \sigma \geq 0)$. Звідси

$$\max \{ \psi(y) + yx : y \geq 1 \} = \psi(\bar{y}) + \bar{y} x = B \ln (V_0(A(\bar{y}+1)) / \ln (\bar{y}+1)) \leq$$

$$\leq B \ln v_0(A(\bar{y}+1)) \leq B \ln v_0(\bar{y}),$$

а оскільки

$$\ln \mu_*(\sigma, I) = \sup \{ \ln f(y) + \sigma y : y \in \operatorname{supp} v \} \leq \max \{ \psi(y) + yx : y \geq 1 \},$$

то для $\sigma \geq 0$ послідовно маємо

$$I(\sigma) \geq \int_1^{\bar{y}} f(y) e^{\sigma y} dv(y) \geq \int_1^{\bar{y}} dv(y) = v_0(\bar{y}) - v_0(1)$$

та при $\sigma \to +\infty$

$$\ln F(\sigma) \geq \ln v_0(\bar{y}) + \ln \left(1 - \frac{v_0(1)}{v_0(\bar{y})} \right) \geq \frac{1}{B} \ln \mu_*(\sigma, I) + o(1) =$$

$$= (1 + 2d) \ln \mu_*(\sigma, I) + o(1) \geq (1 + d) \ln \mu_*(\sigma, I).$$

Теорему 3 доведено.

З теореми 3 отримуємо наступне твердження, яке вказує на необхідність умови (8) для стійкості максимального члена ряду (1) у випадку, коли для послідовності показників виконується умова (7).

Теорема 4. *Нехай для деякої послідовності* $\lambda = (\lambda_n)$, *для якої виконується умова* (7), *і для деякої функції* $w \in W$ *умова* (8) *не виконується. Тоді існують функція* $F \in S(\lambda)$ *така, що* $B_w \in S(\lambda)$, *множина* $E \subset [0; +\infty)$ *скінченної лебегової міри і стала* $h > 0$ *такі, що* $\ln \mu(\sigma, B_w) > (1 + h) \ln \mu(\sigma, F)$ *для всіх* $\sigma \in [0; +\infty) \setminus E$, *тобто максимальний член ряду* (1) *не є стійким* (*за Гайсиним*).

Доведення. З того, що умова (8) не виконується, за теоремою 3 випливає, що існує додатна функція f, для якої

$$\ln F_1(\sigma) > (1+2h)\ln\mu_*(\sigma, F_1), \qquad \sigma \geq \sigma_0,$$

де

$$F_1(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{\sigma x}\,dv(x) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{w(x)}e^{\sigma x}\,dn(x) = B(\sigma),$$

$\mu_*(\sigma, F_1) = \sup\{f(x)e^{\sigma x}\colon x \geq 0\}$. Якщо тепер вибрати $a_n = f(\lambda_n)$ і до другого інтеграла застосувати лему (оскільки для $dn(x)$ виконується умова (12)), то послідовно при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної лебегової міри отримаємо

$$(1+2h)\ln\mu(\sigma, F) \leq (1+2h)\ln\mu_*(\sigma, F_1) \leq \ln F_1(\sigma) \leq$$

$$\leq (1+o(1))\ln\sup\{f(x)e^{w(x)}e^{\sigma x} : x \in \operatorname{supp} dn(x)\} =$$

$$= (1+o(1))\ln\sup\{a_n e^{w(\lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\} = (1+o(1))\ln\mu(\sigma, B).$$

Теорему 4 доведено.

З леми і теореми 3 безпосередньо отримуємо також наступне твердження.

Теорема 5. *Для того щоб для кожної функції вигляду* (11) *співвідношення* (13) *виконувалось при* $\sigma \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної лебегової міри, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (12).

На завершення висловимо припущення, що у теоремі 4 умова (7) є зайвою, а також, що у теоремах 1, 2 і наслідку 1 умову $B_w \in S(\lambda)$ можна замінити умовою $(\forall\sigma \in \mathbb{R}_+)\colon |a_n|e^{w(\lambda_n)+\sigma\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$.

1. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера // Докл. РАН. – 2000. – **370**, № 6. – С. 735–737.
2. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 1. – С. 41–47.
3. *Скаскив О. Б.* О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле // Там же. – 1999. – **56**, № 2. – С. 282–292.

Одержано 11.07.2003